

Laskennallinen mekaniikka

Elegantit Cauchyn yhtälöt

Rolf Stenberg
Teknillinen korkeakoulu
Rolf.stenberg@hut.fi

Cauchyn elastisuus-yhtälöillä on ollut yleisyydestään ja eleganssistaan huolimatta varsin pieni rooli mekaniikan perusopetuksessa, koska niiden ratkaiseminen oli käytännössä mahdotonta ennen tietokoneiden ja elementtimenetelmän keksimistä. Sen jälkeen numeerinen ratkaisu oli helppoa, mutta uusia, yllättäviä ongelmia ilmeni. Triviaalit, analyttisesti helposti ratkaistavissa olevat tehtävät olivatkin tietokoneelle hankalia.

Matemaattinen elastisuusteoria sai alkunsa 180 vuotta sitten eli 30. syyskuuta 1822. **Augustin-Louis Cauchy** esitti Ranskan tiedeakatemian viikkokokouksessa työnsä, jossa hän määritteli jännitys- ja muodonmuutostensorien käsitteet. Hän osoitti, kuinka niiden avulla voidaan kuvata kiinteän kappaleen mekaanista tilaa, jännityksiä, siirtymiä ja energiaa.

Cauchyn yhtälöillä on yleisyydestään ja eleganssistaan huolimatta ollut melko vähäinen rooli mekaniikan perusopetuksessa. Ne mainitaan oppikirjoissa lähinnä vain yleissivistyksen vuoksi. Tämä johtuu siitä, että yleisten elastisuusyhtälöiden ratkaiseminen kolmiulotteiselle kappaleelle on mahdotonta. Ratkaisulla tarkoitetaan tässä kaavaa, joka ilmaisee kappaleen jännitystilän. Matemaatikko voi tosin osoittaa, että ratkaisu on olemassa ja yksikäsitteinen, mutta tämä tieto on käy-

tännön insinöörille melko ydentekevää.

Yhtälöt voidaan joissain erikoistapauksissa yksinkertaistaa siten, että ratkaisu on mahdollista analyttisesti, kynän ja paperin avulla. Erikoistapaukset ovat kehittyneet hyvin luonnollisista syistä: suuri osa näkemistämme tekniikan ja luonnon rakenteista koostuu sauvoista, palkeista, levyistä ja kuorista. Kaikille näille on olemassa yksinkertaistettuja teorioita, jotka on usein nimetty löytäjän mukaan. Puhutaan Euler-Bernoullin palkeista, Kirchhoffin laatoista, Saint Venantin vääntösauvoista, Reissner-Mindlinin laatoista ja Koiter-Novoshilovin kuorista. Näille malleille on yhteistä se, että ne perustuvat fysikaalisesti perustelluille oletuksille siirtymä- ja jännityskentistä.

Klassinen linja huipentui 1940-luvulla kehitettyihin kuorimalleihin, jotka edustavat äärimmäistä rajaa, mihin analyttisillä menetelmillä voi päästä. Itse asiassa kuoriyhtälöt ovat niin mutkikkaita, että niiden käyttökelpoisuus on jo kyseenalaista. Kuorilla tarkoitetaan esimerkiksi simpukan tai munankuoren kaltaisia pintoja, jotka kaarevuutensa takia voivat kantaa hyvin suuren kuorman.

Mahdottomasta helppoa

Klassinen insinöörimekaniikka alkoi menettää kiinnostavuutensa tutkimuskohteena. Samoihin aikoihin tapahtui mullistus, joka käänsi mekaniikan maailman ylösalaisin. Keksittiin tietokone. Ennen mahdottoman tehtävän eli Cauchyn elastisuusyhtälön ratkaisu ei ollut vain mahdollista, vaan itse asiassa helppoa vastakeksityn elementtimenetelmän myötä.

Menetelmä perustuu tasapainoyhtälöiden systemaattiseen hyödyntämiseen. Analysoitava kappale jaetaan pienempiin osiin, elementteihin, ja jokaisessa elemen-

tissä jännityskenttää kuvataan polynomilla. Tämän jälkeen elementeille kirjoitetaan tasapainoehdot, jotka ohjelmoidaan, minä jälkeen tietokone sekä muodostaa että ratkaisee yhtälöt.

Tietokone tekee kaiken työn. Nykyaikaisille tietokoneille ei ole mitenkään erityistä ratkaista ongelmaa, jossa on kymmeniä tuhansia tai jopa miljoonia elementtejä. Matemaattisesti on myös helppoa osoittaa, että tarkkuus lisääntyy elementtien lukumäärän myötä.

Edellä esitetty on tietysti yksinkertaistus, mutta menetelmän periaate on helppo. Se pohjautuu perustavaa laatua oleville matemaattisille ja fysikaalisille periaatteilla. Liioittelematta voidaan väittää, että kolmannen vuoden teekkari voi oppia menetelmän kolmessa, neljässä opintoviikossa. 1960–70-luvuilla edistysaskeleet seurasivat toisiaan. Vain Mooren laki ja tietokonebudjetit näyttivät olevan rajoitteina.

Suurta laskentatehoa triviaaliin ongelmaan

Hiljalleen osoittautui, että kaikki ei kuitenkaan ollut kunnossa. Ne, mitkä olivat ennen olleet mahdollisia analyttisesti – ohuet rakenteet, palkit, laatat ja kuoret – aiheuttivat suurimmat ongelmat laskelmille. Tietokoneen avulla lasketuista palkeista ja laatoista tuli aivan liian jäykkiä ja jännityksistä aivan liian suuria. Ruvettiin puhumaan lukkiutumislmiöstä. Jos palkkia lasketaan kolmiulotteisena kappaleena elementtimenetelmää käyttäen, numeerinen palkki käyttäytyy oikean palkin tavoin vasta, kun käytetään hyvin suurta määrää elementtejä. Tätä ennen numeerinen palkki ei taivu laisinkaan. Melko triviaalin ongelman ratkaisemiseen joudutaan käyttämään suurta laskentatehoa.

Se, että klassiset kynällä ja paperilla ratkaistavat ongelmat olivat tietokoneelle vaikeita, oli paradoksaalista ja vaikeasti monen

”Se, että klassiset kynällä ja paperilla ratkaistavat ongelmat olivat tietokoneelle vaikeita, oli paradoksaalista ja vaikeasti monen sulatettavissa.”

sulatettavissa. Kaiken lisäksi suuri osa klassisesta laatta- ja kuoriteoriasta oli vaipunut unholaan. Lukkiutumislmiön ymmärtäminen ja sen välttävien menetelmien kehittäminen on siksi ollut eräs numeerisen mekaniikan keskeisistä teemoista.

Tänä päivänä avoimia ongelmia on jäljellä vain yksi eli ohuiden kuorien laskenta. Tähän ei tietääkseni ole vielä yhtään matemaattisesti vedenpitävää teoriaa. Muille perusongelmille on yhtenäinen teoria ja näihin on myös sekä nopeita että luotettavia menetelmiä.

Jälkiviisaasti voidaan sanoa, että klassisen matemaattisen fysiikan suuret mestarit, kuten **Bernoulli, Kirchhoff ja Koiter**, olivat oikeassa. Ne siirtymäoletukset, joihin heidän teorian perustui, ovat oikeita. Laskentamenetelmä sovellettuna ohuelle kappaleelle pyrkii automaattisesti täyttämään näitä oletuksia. Jos laskentamenetelmän oletukset eivät ole sopuosinnassa oikeiden fysikaalisten oletusten kanssa, ilmenevä ristiriita johtaa lukkiutumiseen ja numeerisen menetelmän tehottomuuteen.

Perinnettä ei kannata hylätä

Uskon, että kehitys monilla muilla alueilla on tai on ollut samalaista. Puhdas numeronmurskaus johtaa helposti umpikujaan. Kaikilla alueilla on pitkä perinne me-



Tampereen kaupunki

Suuri osa ihmisen tekemistä ja luonnon rakenteista koostuu sauvoista, palkeista, levyistä ja kuorista. Reima ja Raili Pietilän suunnittelema Tampereen kaupunginkirjasto sai muotonsa soittimella olevasta metsosta. Kirjaston sisäänkäynti on nokan alla, kirjahalli on pyrstösulkien alla ja työhuoneet siipien alla.

netelmistä ja ideoista, joita tuskin kannattaa heittää laidan yli. Sen sijaan niitä voidaan käyttää ja modifioida nykyaikaisiin laskentamenetelmiin.

Näin on laita virtauslaskennassa. Tällä alueella kehitys on poikennut selvästi siitä, mitä tapahtui lujuusopin alueella. Elementtimenetelmän käytön ensiyritykset epäonnistuivat nimittäin täydellisesti. Syinä epäonnistumiselle olivat myös tässä tapauksessa ylioptimismi ja välinpitämättömyys klassisissa teorioissa kumuloitunutta tietoa kohtaan.

Viisikymmentä vuotta sitten lujuuslaskennassa tapahtui käänne, kun lentokoneteollisuudessa otettiin tietokoneet käyttöön. Mekaniikka oli pioneerialue teknillis-tieteelliselle tietojenkäsittelylle.

Henkilökohtaisesti uskon, että olemme nyt uudessa käännoispisteessä. Ensinnäkin peruskysymykset kuoria lukuunottamatta on selvitetty ja on aika punnita, mikä on jatkossa mekaniikan tutkimuksen keskipisteenä.

”Puhdas numeronmurskaus johtaa helposti umpikujaan. Kaikilla alueilla on pitkä perinne menetelmistä ja ideoista, joita tuskin kannattaa heittää laidan yli.”



Nykyaikaiset mikrotietokoneet ovat niin tehokkaita, että sekä opettajilla että opiskelijoilla on henkilökohtainen työväline, jolla he voivat laskea sellaisia laskuja, jotka vielä kymmenen vuotta sitten olivat utopiaa.

Tulevaisuudessa painopiste on todennäköisesti teoreettisemmassa matemaattis-luonnontieteellisessä opetuksessa, jossa tietokone on luonnollinen työväline. Viitteitä tästä näkee uusimmissa tuulissa, jotka trenditietoisesti yleensä puhaltavat englanniksi: Computational Science and Technology, Multiphysics ja MicroElectroMechanical System (MEMS). Näissä pyritään simuloimaan ongelmia, joissa eri ilmiöt ovat kytkettyjä. Mallit pohjautuvat fysikaalisille perusperiaatteille ja mekaniikka sisältyy näihin aina yhtenä osana.

Artikkeli perustuu mekaniikan professori Rolf Stenbergin virkaanastujaisesityksensä Teknisessä korkeakoulussa 24.9.2002.