Mat-1.150 Reaalianalyysi: 9. harj. vastauksineen ma 24.3.1997 (2 sivua)
Huom.: tehtävä 8.2 oli itse asiassa [R2:Th6.13]. 1. välikoe meni yllättävän hyvin (10-24 p. kaikilla neljällätoista), valitustilaisuudesta myöhästyneet voivat ottaa yhteyttä assistenttiin (km@iki.fi).

Tehtävä 9.1 ([6.10] *helpohko, nopeahko*):
Olkoon λ, μ ja ν äärellisiä positiivisia mittoja[1] $(X, \mathfrak{M})$:llä.
(i) Jos $\nu << \mu << \lambda$, niin todista "ketjusääntö" $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$.
(ii) Jos $\mu << \lambda << \mu$, niin todista, että $\frac{d\mu}{d\nu} = (\frac{d\nu}{d\mu})^{-1}$.
(iii) Jos $\nu << \mu$, niin todista, että $\nu(\{x \in X \mid \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\} = 0$.

Vastaus: Huom.: jos $\mu << \lambda$, niin[2] $\exists! f \in L^1(\lambda)$ s.e. $\mu(E) = \int_E f\,d\lambda\ \forall E \in \mathfrak{M}$ [R2:6.10] ja tällöin merkitään $\frac{d\mu}{d\lambda} := f$.
(i) Merkitään $f := \frac{d\mu}{d\lambda} \wedge g := \frac{d\nu}{d\mu} \wedge h := \frac{d\nu}{d\lambda}$ (onhan $\nu << \lambda$, koska $<<$ on transitiivinen, koska $\lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$).

$$\int_E h\,d\lambda = \nu(E) = \int_E g\,d\mu \overset{1.29}{=} \int_E gf\,d\lambda\ \forall E,$$

joten $h - gf = 0$ m.k.$[\lambda]$ [1.39b], QED.
(ii) $\int_E 1\,d\mu = \mu(E) = \int_E \frac{d\mu}{d\mu}\,d\mu\ \forall E \in \mathfrak{M}$, joten $\frac{d\mu}{d\mu} = 1$ m.k.$[\mu]$. (i)$\implies 1 = \frac{d\mu}{d\mu} = \frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}$ m.k.$[\mu] \implies \frac{d\mu}{d\nu} = (\frac{d\nu}{d\mu})^{-1}$ m.k.$[\mu]$.
(iii) $N := \{x \in X \mid \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\}$. $\nu(N) = \int_N \frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu = \int_N 0\,d\mu = 0$, QED.

Tehtävä 9.2 ([6.11] *keskitasoa, keskipitkä*):
Olkoon μ positiivinen ja ν äärellinen positiivinen mitta $(X, \mathfrak{M})$:llä.
(a) Todista, että $\nu << \mu$ joss $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ s.e. $E \in \mathfrak{M} \wedge \mu(E) < \delta \implies \nu(E) < \epsilon$.
(b) Näytä, että oletus ν:n äärellisyydestä ei ole tarpeeton.

Vastaus:(a) Tämä on lause [6.11] (pätee kaikille kompleksisille ν).
(b) Jos $X = [0,1]$, $\mu = m$ ja $\lambda(E) := \int_E t^{-1}\,dt\ \forall E \in \mathfrak{M}_{[0,1]}$, niin $m(E) = 0 \implies \lambda(E) = 0$, joten $\lambda << m$, mutta $\lambda([0,r]) = \int_{[0,r]} t^{-1}\,dt = \Big|_0^r \ln t = \infty > \epsilon := 1$, vaikka $m([0,r]) = r < \delta$, kun valitaan $r := \min(\delta/2, 1/2)$.

Tehtävä 9.3 ([6.14] *työläähkö, pitkähkö*):

[1] Positiivinen mitta on äärellinen joss se on kompleksinen mitta [R2:1.18&6.1].
[2] "$\exists!$" := "on olemassa yksikäsitteinen".

Olkoot μ ja ν reaalisia mittoja $(X, \mathfrak{M})$:llä. Määritellään $\mu \vee \nu := \mu + (\nu - \mu)^+ \wedge \mu \wedge \nu := \mu - (\nu - \mu)^-$.
(i) Todista, että $\lambda := \mu \vee \nu$ on pienin reaalinen mitta, jolle pätee $\lambda(E) \geq \mu(E) \wedge \lambda(E) \geq \nu(E)\ \forall E \in \mathfrak{M}$. Muotoile vastaava väite $\mu \wedge \nu$:lle. **(ii)** Todista $\nu_1, \nu_2 << \mu \implies \nu_1 \wedge \nu_2, \nu_1 \vee \nu_2 << \mu$. **(iii)** Esitä $\mu \wedge \nu$:n ja $\mu \wedge \nu$:n Radonin–Nikodymin derivaatat [6.10, p. 122] μ:n ja ν:n derivaattojen avulla.

Vastaus:Tässä esitetään tehtävän "insinööriratkaisu", ts. väännetään tulos väkisin kasaan eleganssista välittämättä. Aloitetaan valitsemalla jokin positiivinen $\pi >>$kaikki tutkittavat mitat.
Selvästi $\pi := |\mu| + |\nu| >> \mu, \nu, \nu - \mu, \lambda$ (huom.: aina $\pi >> \mu \iff \pi >> |\mu|$), joten voidaan määritellä $f := \frac{d\mu}{d\pi},\ g := \frac{d\nu}{d\pi},\ h := \frac{d\lambda}{d\pi}$.

(i) $\nu(E) - \mu(E) = \int_E (g - f)\,d\pi\ \forall E$, joten $\frac{d(\nu-\mu)}{d\pi} = g - f$, siis $\frac{d|\nu-\mu|}{d\pi} = |g - f|$ [6.13], ja näin ollen $\frac{d(\nu-\mu)^+}{d\pi} = [|g-f| - (g-f)]/2 = (g-f)^+$, koska $(\nu-\mu)^+ = [|\nu-\mu| - (\nu-\mu)]/2$ [6.6].[3]

Niinpä $\frac{d\lambda}{d\pi} = \frac{d\mu}{d\pi} + \frac{d(\nu-\mu)^+}{d\pi} = f + (g-f)^+ = \max(f,g)$. Siis $\lambda(E) = \int_E \max(f,g)\,d\pi \geq \int_E f\,d\pi = \mu(E)$ ja vast. $\lambda(E) \geq \nu(E)$. Olkoon sitten $\beta = \beta_1 + \beta_2$ reaalinen mitta, missä $\beta_1 << \pi \wedge \beta_2 \perp \pi$ [6.10]. Jos $\beta_1, \lambda_1 << \pi \wedge \beta_2, \lambda_2 \perp \pi$ [6.10], niin selvästi[4] $\beta_1 + \beta_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2 \iff \beta_1 \geq \lambda_1 \wedge \beta_2 \geq \lambda_2$. Niinpä[5] $\beta \geq \mu \iff \beta_2 \geq 0 \wedge \frac{d\beta_1}{d\pi} \geq \frac{d\mu}{d\pi}$ m.k.$[\pi]$. Siksi

$$\beta \geq \mu, \nu \iff \beta_2 \geq 0 \wedge \frac{d\beta_1}{d\pi} \geq \max(\frac{d\mu}{d\pi}, \frac{d\nu}{d\pi}) = \frac{d\lambda}{d\pi} \text{ m.k.}[\pi]$$

$$\iff \beta_2 \geq 0 = \lambda_2 \wedge \beta_1 \geq \lambda = \lambda_1 \iff \beta \geq \lambda,$$

QED.[6] Vastaavasti todistetaan, että $\beta \leq \mu, \nu \implies \beta \leq \mu \wedge \nu$.

(ii) Tämä todistettiin jo yllä: $\mu >> \nu_1, \nu_2 \implies \mu >> r\nu_1 + s\nu_2, |\nu_1|, |\nu_2|$ (koska $\mu(E) = 0 \implies \nu_1(E) = 0 = \nu_2(E) \implies r\nu_1(E) + s\nu_2(E) = 0$ jne.), joten $(\nu_2 - \nu_1)^+(E) = [|\nu_2 - \nu_1|(E) + (\nu_2 - \nu_1)(E)]/2 = 0$ jne.

(iii) Tämä todistetaan kuten (i):ssä: $\frac{d\mu\vee\nu}{d\pi} = \max(\frac{d\mu}{d\pi}, \frac{d\nu}{d\pi}) \in L^1(\pi)$ (ts. m.k.$[\pi]$) aina kun π on sellainen positiivinen mitta, että $\mu, \nu << \pi$.

[3] Onhan selvästi $\frac{d(r\mu+s\nu)}{d\pi} = r\frac{d\mu}{d\pi} + s\frac{d\nu}{d\pi}$ (m.k., siis $L^1(\pi)$-funktioina), koska $(r\mu+s\nu)(E) = r\int_E f\,d\pi + s\int_E g\,d\pi = \int_E (rf + sg)\,d\pi$.
[4] "$\implies$": triv.; "$\impliedby$": Valitaan A s.e. $\pi(A) = 0 \wedge \beta_2, \lambda_2 << A$. Jos $\lambda_2(E) > \beta_2(E)$ jollain $E \in \mathfrak{M}$, niin $\lambda(E \cap A) = 0 + \lambda_2(E \cap A) = \lambda_2(E) > \beta_2(E) = 0 + \beta_2(E \cap A) = \beta(E \cap A)$; jos taas $\lambda_1(E) > \beta_1(E)$, niin vast. $\lambda(E \cap A^c) = \lambda_1(E \cap A^c) + 0 = \lambda_1(E) > \ldots = \beta(E \cap A^c)$, QED.
[5] $\beta_1 \geq \mu = \mu_1 \iff \beta_1(E) - \mu(E) = \int_E [\frac{d\beta_1}{d\pi} - \frac{d\mu}{d\pi}]\,d\pi \geq 0\ \forall E \iff \frac{d\beta_1}{d\pi} - \frac{d\mu}{d\pi} \geq 0$ m.k.$[\pi]$.
[6] Tekisi mieli merkitä $\mu \vee \nu =: \max(\mu, \nu)$. Näin ei voi kuitenkaan tehdä, koska $X = \{-1, 1\} \wedge \mathfrak{M} = 2^X \wedge \mu(\{x\}) = x \wedge \nu = -\mu \implies \max(\mu,\nu)(X) = 0 \neq 2 = \max(\mu,\nu)(\{-1\}) + \max(\mu,\nu)(\{1\})$, joten $\max(\mu, \nu)$ ei yleensä ole mitta (kun taas $\mu \vee \nu$ on aina; tässä se on $= |\mu| = |\nu|$ =lukumäärämitta).

Tehtävä 9.4 ([6.14] *keskitasoa, lyhyehkö*):
Olkoot μ, ν äärellisiä positiivisia mittoja $(X, \mathfrak{M})$:ssä. Näytä, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät (ekvivalentit):
(i) $\mu \perp \nu$, (ii) $\mu \wedge \nu = 0$, (iii) $\mu \wedge \nu = \mu + \nu$.

Vastaus: Huom.: nyt $\mu = |\mu| \wedge \nu = |\nu|$). **(i)$\Longrightarrow$(ii)** Olkoon $\mu << A \wedge \nu << A^c$. $\pi := \mu + \nu >> \mu, \nu$, $f := \frac{d\mu}{d\pi}$, $g := \frac{d\nu}{d\pi}$, jolloin $f, g \geq 0$ ja $\int_{A^c} f\, d\pi = \mu(A^c) = 0$ eli $f = 0$ m.k.$[\pi]$ A^c:ssä, ts. $f = 0$ joukossa $A^c \setminus N_f$, missä $\pi(N_f) = 0$ ja vast. $g = 0$ joukossa $A \setminus N_g$. Niinpä $\min(f, g) = 0$ joukossa $(A^c \setminus N_f) \cup (A \setminus N_g) \supset (N_f \cup N_g)^c$ ja $\pi(N_f \cup N_g) = 0$, joten $\min(f, g) = 0$ m.k. Siis $\mu \wedge \nu(E) = \int_E \min(f, g)\, d\pi = 0\ \forall E \in \mathfrak{M}$, QED.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Olkoon $\mu \wedge \nu = 0$, määritellään f, g, π kuten yllä. $N := \{\min(f, g) = 0\}$. $A := \{g = 0\} \in \mathfrak{M}$. Nyt $\min(f, g) = 0$ m.k.$[\pi]$, joten $\pi(N) = 0$. Luonnollisesti $f = 0$ joukossa $A^c \setminus N$. Niinpä $\mu(A^c) = \int_{A^c} f\, d\pi = 0$, joten $\mu << A$. Toisaalta $\nu(A) = 0$, joten $\mu \perp \nu$, QED.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $f + g = \min(f, g) + \max(f, g)$, joten $\mu + \nu = \mu \wedge \nu + \mu \vee \nu$, joten $\mu \vee \nu = \mu + \nu \iff \mu \wedge \nu = 0$, QED.

Tehtävä 9.5 ([6.16] *keskitasoa, keskipitkä*):
Olkoon Z normiavaruus. Sanotaan, että jono $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset Z$ suppenee heikosti Z:ssa kohti pistettä $f \in Z$ (merkitään $f_j \rightharpoonup f$) joss

$$\Lambda f_j \overset{j \to \infty}{\to} \Lambda f \quad \forall \Lambda \in Z^* := \mathcal{L}(Z, \mathbb{K}).$$

(Tässä $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on Z:n skalaarikunta (kerroinkunta).)
(i) Olkoon $1 < p < \infty \wedge 1/q + 1/p = 1$ ja olkoon $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ mitta-avaruus. Todista, että $f_j \to f$ heikosti avaruudessa $L^p(\mu)$ joss

$$\forall g \in L^q(\mu) \quad \left[\int_X f_j g\, d\mu \overset{j \to \infty}{\to} \int_X fg\, d\mu\right].$$

(ii) Todista $f_j \to f \implies f_j \rightharpoonup f$. Osoita, että käänteinen ei päde edes kaikissa $Z = L^p(\mu)$.
(iii) Todista $f_j \rightharpoonup f \implies \|f\|_p \leq \liminf_{j \to \infty} \|f_j\|_p$.

Vastaus:[7] **(i)** $\forall \Lambda \in L^p(\mu)^*\ \exists! g_\Lambda \in L^q(\mu)$ $[\Lambda(f) = \int_X f g_\Lambda\, d\mu \quad \forall f \in L^p(\mu)]$ ja lisäksi $\|g_\Lambda\|_q = \|\Lambda\|_{L^p(\mu)^*}\ \forall \Lambda$ [6.16]. Toisaalta Hölderin epäyhtälön etc. perusteella jokainen $g \in L^q(\mu)$ selvästi määrää jonkin $\Lambda \in L^p(\mu)^*$, joten kuvaus $\Lambda \mapsto g_\Lambda$ on isometrinen isomorfismi $L^p(\mu)^* \to L^q(\mu)$, eli nämä kaksi avaruutta voidaan samaistaa (Banach-avaruuksina) [6.16][8]. Tämä on tärkeää muistaa!
Niinpä $\int_X f_j g_\Lambda\, d\mu = \Lambda f_j \to \Lambda f = \int_X f g_\Lambda\, d\mu \quad \forall \Lambda \in L^p(\mu)^*$ joss $\int_X fg\, d\mu \to \int_X fg\, d\mu\ \forall g \in L^q(\mu)$, QED.
(ii) $\Lambda \in \mathcal{L}(Z, \mathbb{K})$ kertoo, että Λ on jatkuva (ja lineaarinen), joten [Rudin1]:n perusteella $\Lambda \lim_j f_j = \lim_j \Lambda f_j$ aina kun $\Lambda \in Z^*$, siis $f_j \rightharpoonup f$, QED.
Olkoon sitten $Z = \ell^p(\mathbb{N}_+) \ni e_j := \chi_j(\cdot)$ (ts. $e_1 := (1, 0, 0, ...)$, $e_2 := (0, 1, 0, 0, ...)$ jne.). Tällöin $\|e_j\|_p^p := \sum_{k=1}^\infty |e_j(k)|^p = 1^p = 1\ \forall j$, joten $d(e_j, 0) = \|e_j - 0\|_p = 1 \not\to 0$ (siis $e_j \not\to 0$, eikä muuallekaan, koska e_j ei ole Cauchy-jono, koska $\|e_j - e_k\| = 2^{1/p} \Leftarrow j \neq k$), mutta jos $\Lambda \in \ell^p(\mathbb{N})^*$ eli $g := g_\Lambda \in \ell^q(\mathbb{N})$, niin

$$\Lambda(e_j) = \int_{\mathbb{N}} e_j g\, d\sigma = \sum_{k \in \mathbb{N}} e_j(k) g(k) = 0 + 1 \cdot g(j) = g(j) \to 0,$$

koska $\infty > \|g\|_q^q = \sum_{j=1}^\infty |g(j)|^q \implies |g(j)|^q \to 0 \implies |g(j)| \to 0$. Siis $e_j \rightharpoonup 0$.[9]
(iii) Olkoon $f_j \rightharpoonup f$. Valitaan $\Lambda \in Z^*$ s.e. $\|\Lambda\| = 1 \wedge \Lambda(f) = \|f\|_Z$ [R2:5.20]. Tällöin

$$\|f\|_Z = \Lambda f = |\Lambda f| = |\lim_j \Lambda f_j| = \lim_j |\Lambda f_j| = \liminf_j |\Lambda f_j| \leq \liminf_j \|\Lambda\| \|f_j\| = \liminf_j \|f_j\|.$$

[10]

———————————

Vihjeitä: **9.1**: (i) $\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu = ...\, d\lambda$ [6.10&1.29] (ja [1.39b]). (ii)$\Leftarrow$(i); (iii) on helppo.
9.2: (a) Tämä on [6.11], mutta jos haluat todistaa itse, esim. tee vastaoletus: $\exists \epsilon > 0$ s.e. $\forall n \in \mathbb{N}_+\ \exists E_n \in \mathfrak{M}$ $[\mu(E_n) < 2^{-n} \wedge \lambda(E_n) > \epsilon]$. (b) Esim. $\nu(E) = \int_E t^{-1}\, dt \wedge \mu = m \wedge X = [0, 1]$.
9.3: Totea, että $\pi := |\mu| + |\nu| >> \mu, \nu, \mu \vee \nu$. Esim. laske sitten $\frac{d\mu \vee \nu}{\pi}$ (kuten (iii):ssä) ja päättele loput sen avulla.
9.4: Esim. laske em. derivaattojen avulla.
9.5: (i) [R2:6.16]. (ii) Muista, että Λ on jatkuva. Vastaesim.: $Z := \ell^p(\mathbb{N})$, $f_j := e_j := \chi_{\{j\}}(\cdot) = (0, ..., 0, 1, 0, ...) \in \ell^p(\mathbb{N})$. (iii) Sovella [R2:5.20].

[7]Huom.: normiavaruuteen Z voidaan aina määritellä heikko topologia $\mathcal{T}_w$, jossa jono suppenee joss se suppenee heikosti Z:ssa [R3:3.11]. Äärellisulotteisissa normiavaruuksissa ($\mathbb{C}^n$ tms.) tämä topologia on sama kuin tavallinen euklidinen topologia (koska muita äärellisulotteisia (TVS:iä, ts.) Hausdorffin vektoritopologioita (summa ja skalaarikertolasku jatkuvia) ei ole [R3:1.21]), mutta jos Z on ääretönulotteinen, Z_w ei ole normeerautuva [R3:3.11] (ts. sen heikko topologia ei ole minkään normin määräämä). Huom.: vastaavasti Z^*:een voidaan määritellä heikko topologia Z^{**}:n avulla tai vielä heikompi "heikko*-topologia" Z:n avulla [R3:3.14]. Heikko topologia ja ei-normi-TVS:t ovat pääasiassa [R3]:n eikä tämän kurssin alaa.

[8]Oikeastaan vasta [R2: Exercise 6.6] todistaa, että tämä pätee kaikilla μ.

[9]Vastaavasti $L^p(\mathbb{R})$:ssä voitaisiin määritellä $f_j := \chi_{[j,j+1]}$ (ja $L^p(T)$:ssä $f_j(x) := e^{ijx}$ [R2:5.15]). Jos $L^p(\mu)$ on äärellisulotteinen (esim. $X = \{1\} \wedge \mu(X) = 1 \implies X \cong \mathbb{K}$), niin vahva ja heikko topologia yhtyvät [R3:1.21].

[10](Huom.: (ii)-kohdan esimerkissä $\|0\|_Z = 0 < 1 = \liminf_j \|e_j\|$.)