Mat-1.150 Reaalianalyysi: 4. harj. vastauksineen ma 17.2.1997 (2 sivua)

Tehtävä 4.1 ([2.24] *helpohko, lyhyehkö*):
Lusinin lauseen [2.24] todistus herättää seuraavat kysymykset:
(a) Todistuksen alkuosassa oletetaan A kompaktiksi. Miksi? Eikö $\mu(A) < \infty$ riitä?
(b) Mihin joukkoa V tarvitaan? Onko selvää, että on olemassa sellainen avoin V, että $A \subset V$ ja $\bar{V}$ on kompakti?

Vastaus: (**Vihje:** (a) tee vastaesimerkki (ei-kompakti A), jossa b-kohdan joukkoa $\bar{V}$ ei saada kompaktiksi. (b) Käytä ensin X:n lokaalia kompaktisuutta ja sitten A:n on kompaktisuutta.)

(a) Jos vaikkapa $A = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R}$ ja $\mu = m$, niin $m(A) = 0$, mutta mikään A:n sisältävä suljettu joukko $\bar{V}$ ei voi olla kompakti, koska tällöin $\bar{V} \supset \bar{A} = \mathbb{R}$ eli $\bar{V} = \mathbb{R}$.
(b) Kompaktisti sulkeutuvaa V tarvittiin siihen, että g:n kantaja saatiin rajattua kompaktiin joukkoon.
V:n olemassaolo todistetaan seuraavasti: Lauseen edellä kerrottiin oletettavan, että X on lokaalisti kompakti, ts. jokaisella pisteellä on ympäristö W, jonka sulkeuma on kompakti.[1] Poimitaan jokaiselle $a \in A$ tällainen $W_a \circlearrowleft X$. $A \subset \cup_{a \in A} W_a$, joten A:n kompaktisuuden perusteella ko. avoimen peitteen äärellinen osapeite $W_{a_1} \cup ... \cup W_{a_n} =: V$ peittää A:n. $K := \bar{W}_{a_1} \cup ... \cup \bar{W}_{a_n}$ on kompakti (htll) ja suljettu (htll tai [R1:Th2.24]), joten $\bar{V} \subset K$, joten $\bar{V}$ on kompakti [Th2.4].

Tehtävä 4.2 ([1.6] *vaikeahko, keskipitkä*):
Yritä osoittaa, että mihinkään joukkoon X ei voida konstruoida σ-algebraa $\mathfrak{M}$, jossa olisi numeroituvan monta mitallista joukkoa (siis $\mathfrak{M} \approx \mathbb{N}$).

Vastaus:(**Vihje**: konstruoi numeroituvan monesta mitallisesta joukosta $2^{\mathbb{N}}$ <u>eri</u> mitallista joukkoa.)

(Huom.: todistuksen alaviitteissä on yleissivistävää joukko-oppia, joka on logiikkaan tai algebraan tutustuneille tuttua.)
Oletetaan $\mathfrak{M} \succeq \mathbb{N}$ ja todistetaan $\mathfrak{M} \succeq 2^{\mathbb{N}}$:
Relaatio "$a \sim b$ joss $\forall E \in \mathfrak{M}$ $[a \in E \iff b \in E]$" (ts. "a kuuluu samoihin mitallisiin joukkoihin kuin b") on selvästi ekvivalenssirelaatio. Olkoon $\mathcal{A}$ sen määräämien ekvivalenssiluokkien kokoelma. Jos $E \in \mathfrak{M}$, niin selvästi $E = \cup_{A \in \mathcal{A} \wedge A \cap E \neq \emptyset} A$ (siis $\mathfrak{M}$:n joukot ovat $\mathcal{A}$:n alkioiden yhdisteitä).[2] Niinpä $\mathcal{A} \succeq \mathbb{N}$ (koska muutoin $\mathfrak{M}$:ssä olisi enintään $2^{\mathcal{A}} < \infty$ alkiota).[3]

Valitaan jostain $\mathcal{A}$:n osajoukosta alkio a_1, toisesta a_2, kolmannesta a_3 jne. Olkoon B näiden yhdiste. $\forall j, k \in \mathbb{N}_+$, $j \neq k$ valitaan $E_{j,k} \in \mathfrak{M}$ s.e. $a_j \in E_{j,k} \not\ni a_k$ (koska $a_j \not\sim a_k$, $\exists$ tällainen tai sellainen E, jolla $a_k \in E \not\ni a_j$, jolloin $E_{j,k} = E^c \in \mathfrak{M}$ kelpaa).
$E_j := \cap_{k \in \mathbb{N}_+ \setminus \{j\}} E_{j,k} \in \mathfrak{M}$, jolloin $B \cap E_j = \{a_j\}$ $(\forall j)$. Tällöin kaikki $2^{\mathbb{N}}$ perheen $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ osajoukkoa ovat eri joukkoja, joten $\mathfrak{M} \succeq 2^{\mathbb{N}} \succ \mathbb{N}$.[4]
Siis olemme todistaneet, että jokainen ääretön σ-algebra on ylinumeroituva.

Tehtävä 4.3 ([3.10] *vaikeahko, keskipitkä*):
[R2:Exe3.16] Olkoon $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jono mitallisia funktioita $X \to \mathbb{C}$ ja supetkoon $f_n(x)$ $\forall x \in X$. Olkoon $\mu(X) < \infty$. Todista Jegorovin (Egoroff) lause, eli että $\forall \epsilon > 0$ $\exists E \in \mathfrak{M}$ s.e. $\mu(X \setminus E) < \epsilon$ ja $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti E:llä. (Vihje: [R2:teht. 3.16].)

Vastaus:[5] $S(n,k) := \cap_{i,j>n} \{x \in X \,\big|\, |f_i(x) - f_j(x)| < 1/k\} \in \mathfrak{M}$.[6]
Merkitään jonon $\{f_n(x)\}$ raja-arvoa $f(x)$:llä $\forall x$. Olkoon $x \in X$. Oletuksen perusteella $\{f_n(x)\}$ on Cauchy-jono,[7] joten $\forall k \in \mathbb{N}_+$ $\exists n \in \mathbb{N}_+$ s.e. $x \in S(n,k)$ (tämähän on suunnilleen Cauchy-jonon määritelmä, joskin siinä on $\epsilon > 0$ luvun $1/k > 0$ sijaan). Niinpä $\cup_{n \in \mathbb{N}_+} S(n,k) = X$, jos $k \in \mathbb{N}_+$.

Niinpä $\mu(S(n,k)) \overset{n \to \infty}{\nearrow} \mu(X)$ [R2:1.19d] (koska $S(n,k) \subset S(n+1,k)$ $\forall n,k$) jokaisella $k \in \mathbb{N}_+$, joten voidaan valita luvut n_k s.e. $\mu(S(n,k)) > \mu(X) - 2^{-k}\epsilon$. Olkoon $E := \cap_{k \in \mathbb{N}_+} S(n_k, k)$.

1^o $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti E:ssä: $\forall 1/k > 0$ $\exists n_k$ $\forall x \in E$ $[i,j > n_k \implies |f_i(x) - f_j(x)| < 1/k]$, koska $E \subset S(n_k, k)$, joten $|f_i(x) - f(x)| = \lim_{j \to \infty} |f_i(x) - f_j(x)| \leq 1/k$. Siis $\forall 2/k > 0$ $\exists n_k$ $\forall x \in E$ $[i > n_k \implies |f_i(x) - f(x)| < 2/k]$.[8]

---

[1] Joissain teoksissa määritelmä kuuluu "$\forall x \in X$ on olemassa kompakti $K \subset X$ s.e. $x \in K^o$". Määritelmät ovat ekvivalentteja Hausdorff-avaruuksissa ja muunlaisia ei juuri käytetä (mutta on olemassa eräs ei-Hausdorff-avaruus, jossa Rudinin määritelmä on aidosti vahvempi, kompaktit joukot eivät aina ole suljettuja eivätkä kompaktien joukkojen leikkaukset kompakteja).

[2] Tod.: selvästi $a \in A \in \mathcal{A} \wedge A \cap E \neq \emptyset \implies A \subset E$ jne.

[3] Olkoon $B = \{b_1, ..., b_n\}$. Tällöin jokainen B:n osajoukko B' voidaan koodata n-merkkiä pitkäksi 01-jonoksi $k_1 k_2 ... k_n$, missä $k_j = 1$ joss $b_j \in B'$. Toisaalta eri jonot vastaavat aina eri osajoukkoja, joten B:llä on 2^n osajoukkoa. Myös äärettömän joukon $\mathcal{A}$ osajoukkojen perhe vastaa (bijektiivisesti) funktioita $\mathcal{A} \to \{0,1\}$, joista käytetään usein merkintää $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$ tai $2^{\mathcal{A}}$ (ja vastaavasta syystä funktioiden $f : X \to Y$ joukosta käytetään merkintää Y^X).
(Yleissivistävä kuriositeetti: $2^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$, koska Cantorin joukko $\approx 2^{\mathbb{N}}$ [R1:teht.3.19&] ja toisaalta $\mathbb{R} \ni r \mapsto \{q \in \mathbb{Q} \,\big|\, q < r\}$ on injektio. Sen sijaan joukkoa E s.e. $\mathbb{N} \prec E \prec 2^{\mathbb{N}}$ ei ole olemassa kontinuumihypoteesin (CH) perusteella; kaikki eivät hyväksy kontinuumihypoteesia (eikä sitä tai sen negaatiota voi todistaa) (sama pätee varsin yleisesti hyväksyttyyn valinta-aksioomaan).

[4] Jos X on mikä tahansa joukko, sen osajoukkojen perhe eli potenssijoukko $\mathcal{P}(X) = 2^X$ on aidosti mahtavampi (esim. $|2^{\emptyset}| = |\{\emptyset\}| = 1 \wedge |\emptyset| = 0$), koska mikään $f : X \to 2^X$ ei voi olla surjektio, koska tällöin voitaisiin määritellä $Y := \{x \in X \,\big|\, x \notin f(x)\} \in 2^X$ (ts. $\forall y \in X$ $[y \in Y \iff y \notin f(y)]$) ja tällöin surjektiivisuuden perusteella jollain $y \in X$ olisi $f(y) = Y$, jolloin $y \in f(y) \iff y \notin f(y)$ eli ristiriita.

[5] Huom.: Jos $X = \mathbb{R} \wedge \mu = m \wedge f_n(x) := x/n$, niin $f_n(x) \to 0$ $\forall x$, mutta arvolla $k = 1$ sama n_1 ei kelpaa kaikille $x \in E$, koska valitsemalla $x > n_1$ on $|f_{n_1}(x) - 0| > 1$, ellei $]n_1, \infty[\subset X \setminus E$, jolloin $m(X \setminus E) = \infty$. Siis $\mu(X) < \infty$ on tarpeen.
Vastaavasti $X =]0,1[\wedge f_n(x) := 1/nx$ osoittaa, ettei aina voida valita $E = X$ (koska tällöin olisi ristiriitaisesti $x < 1/n_1 \implies f_{n_1}(x) > 1$; sen sijaan esim. $E =]\epsilon/2, 1[\subset X$ kelpaisi).

[7] Missä tahansa metrisessä avaruudessa suppeneva jono on aina Cauchy-jono. Jos käänteinenkin pätee, ko. avaruutta sanotaan täydelliseksi (*complete*). $\mathbb{R}^k$ ja sen suljetut osajoukot ovat täydellisiä [R1] (samoin L^p, $\mathcal{C}_b$ ja $\mathcal{C}_0$ muttei yleensä $\mathcal{C}_c$).

[8] Yleensäkin suppeneva jono suppenee tasaisesti joss se on tasaisesti Cauchy.

2^o $\mu(E^c) = \mu(\cup_k S(n_k,k)^c) \le \sum_k \mu(S(n_k,k)^c) < \sum_k 2^{-k}\epsilon = \epsilon$, QED.

Tehtävä 4.4 ([Luku 1] *keskitasoa, keskipitkä*):
Konstruoi sellainen välin $X := [0,1]$ (täydellistetty) Borel-mitta μ, että funktio $x \mapsto f(x) = x$ ei kuulu joukkoon $\mathcal{L}^1(\mu)$, mutta funktio $x \mapsto g(x) = x^2$ kuuluu ja lisäksi
(a) $E \cap \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\} = \emptyset \Rightarrow \mu(E) = 0$;
(b) $\exists h \in \mathcal{L}$ $(h \ge 0 \wedge \mu(E) = \int_E h(x)\,dx \;\forall E \in \mathcal{B})$ [1.29], missä $\mathcal{B}$ on Borel-joukkojen perhe.
(c) Onko mahdollista toteuttaa (a) ja (b) yhtaikaa?

Vastaus: *Jos ν on numeroituvan joukon A mitta, niin mitan σ-additiivisuuden perusteella $\nu(E) = \sum_{x\in E}\nu(\{x\}) = \sum_{x\in E} a_x$ $\forall E \subset A$, missä $a_x := \nu(\{x\}) \in [0,\infty]$ $\forall x \in A$. Nyt mon. konv. tai dom. konv. perusteella $\int_A F\,d\nu = \sum_{x\in A} F(x)\nu(\{x\}) = \sum_{x\in A} F(x)a_x$ (*), kun $F \ge 0$ (mon. konv.) tai $\sum_{x\in A}|F(x)|a_x < \infty$ (i.e. $F \in L^1(\nu)$) (dom. konv.).* [9]

(a) $A := \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Koska $\mu|_{\mathcal{P}(A)}$ on $(A,\mathcal{P}(A))$:n mitta (htl), $\mu|_{\mathcal{P}(A)}$ on siis em. muotoa. Nyt $\mu(A^c) = 0$, joten $\int_X F\,d\mu = \int_A F\,d\mu = \sum_{x\in A} F(x)\mu(\{x\})$ $\forall F$ (*). Jos nyt valitaan $\mu(\{x\}) = 1$ $\forall x \in A$, niin $\int_X f\,d\mu \overset{*}{=} \sum_{x\in A} f(x)\mu(\{x\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(\frac{1}{k})\cdot 1 = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k} = \infty$ ja $\int_X g\,d\mu \overset{*}{=} \sum_{x\in A} g(x)\mu(\{x\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}}(\frac{1}{k})^2 < \infty$.

(b) $g(x) \to 0$ nopeammin kuin $f(x) \to 0$, kun $x \to 0+$, joten yritetään nytkin saada mitta räjähtämään äärettömiin nollassa, muttei liian nopeasti (aivan kuten (a)-kohdassakin): $\int_X F\,d\mu = \int_X Fh\,dm$ $\forall F \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M});[0,\infty])$ [R2:1.29]. Jos nyt valitaan $h(x) = x^{-2}\chi_{]0,1]}(x) \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M});[0,\infty[)$ (koska määritelty kahdessa jatkuvassa (siis Borel-mitallisessa) palassa). $\int_0^1 f\,d\mu \overset{1.29}{=} \int_0^1 fh\,dm = \int_0^1 x^{-1} \overset{mon.konv.}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^{-1}\chi_{[\frac{1}{n},1]} = \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^1 x^{-1} = \lim_{n\to\infty}(\ln 1 - \ln\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\ln n = \infty$, mutta $\int_X g\,d\mu = \int_X x^2x^{-2} = \int_X 1 = 1 < \infty$.
(c) Ei ole mahdollista: jos (a) ja (b) olisivat tosia, niin olisi $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c) = \int_A h + 0 = 0 + 0 = 0$ (koska $m(A) = 0$, koska A on numeroituva) ja siis $\int_X f\,d\mu = 0$.

Kommentteja: f ja g ovat jatkuvia ja siis Borel-mitallisia, eikä tehtävässä ole muitakaan kohtia, joissa mitan täydellistäminen vaikuttaisi tuloksiin. (Jos $\nu : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ on mitta ja $\nu^* : \mathfrak{M}^* \to [0,\infty]$ on sen täydellistymä, niin triviaalisti $\mathfrak{M}$-mitalliset joukot ja funktiot ovat $\mathfrak{M}^*$-mitallisia. Jos $f \ge 0$ ja $s = \sum_{k=1}^n \alpha_k\chi_{E_k}$ on $\mathfrak{M}^*$-mitallinen porrasfunktio sekä $0 \le s \le f$, niin $s' := \sum_{k=1}^n \alpha_k\chi_{A_k} \ge 0$ on $\mathfrak{M}$ mitallinen porrasfunktio ja $0 \le s' \le s \le f$ ja $\int s = \int s'$, kunhan joukot A_k valitaan kuten lauseessa [R2:1.36]. Niinpä (jos $f \ge 0$ on $\mathfrak{M}$-mitallinen) $\int f\,d\nu^* = \int f\,d\nu$ (jos $f \in \mathcal{L}(X,\mathfrak{M};\mathbb{C})$, niin sama seuraa jakamalla f neljään osaansa [R2:1.31]).)

(a) (Huom.: $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{B}$ (suljettujen) yksiöiden numeroituvina yhdisteinä).
(Huom.: koska $\mu(A^c) = 0$, kaikki A^c:n osajoukot ovat mitallisia [R2:1.36], peräti $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$ ($E = (E\cap A)\cup(E\cap A^c) \in \mathfrak{M} := \mathcal{B}^*$, missä $\mathcal{B}^*$ tarkoittaa Borel-σ-algebran täydellistymää μ:n suhteen).)

(b)-kohdassa tehty mon. konv. -temppuhan vastaa $[0,\infty]$-funktion epäoleellista Riemann-integraalia; jos integrandi saavuttaa negatiivisiakin arvoja, niin mon. konv. ei aina päde [R2:1.26].) (Huom.: Jos $h \equiv 1$, niin $\mu = m$ (ja $\mathfrak{M}$ on Lebesgue-mitallisten $[0,1]$:n osajoukkojen perhe); jos $h \equiv 0$, niin $\mu \equiv 0$ ja $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$.) (Huom.: merkinnällä $\int_0^1 d\mu$ tarkoitetaan jotain integraaleista $\int_{[0,1]}, \int_{[0,1[}, \int_{]0,1]}, \int_{]0,1[}$, joten sitä ei pidä käyttää, ellei $\mu(\{0\}) = 0 = \mu(\{1\})$ (jolloin kaikki neljä integraalia yhtyvät).)

Tehtävä 4.5 ([3.1] *helpohko, lyhyehkö*):
Olkoon $-\infty \le a < b \le \infty$. Osoita, että jokaisella konveksilla $\phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ on jokaisessa pisteessä $t \in]a,b[$ oikeanpuoleinen derivaatta $\frac{d^+}{dt}\phi(t)$ ja vasemmanpuoleinen derivaatta $\frac{d^-}{dt}\phi(t)$ ja että $\frac{d^-}{dt}\phi(t) \le \frac{d^+}{dt}\phi(t)$.

Vastaus: (Vihje: [R2:3.1(2)].) Konveksilla funktiolla ϕ pätee aina $\forall\lambda \in [0,1]$, $x,y \in]a,b[$

$$\phi(x+\lambda(y-x)) = \phi((1-\lambda)x+\lambda y) \le (1-\lambda)\phi(x)+\lambda\phi(y) = \phi(x)+\lambda(\phi(y)-\phi(x))$$

Lisäksi $t < u \le v < b \implies \frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} \le \frac{\phi(v)-\phi(t)}{v-t}$ (*), koska (merkitään $\lambda := \frac{u-t}{v-t}$)

$$\frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} = \frac{\phi(t+\lambda(v-t))-\phi(t)}{\lambda(v-t)} \le \frac{\phi(t)+\lambda(\phi(v)-\phi(t))-\phi(t)}{\lambda(v-t)} \le \frac{\lambda(\phi(v)-\phi(t))}{\lambda(v-t)}.$$

Olkoon $a < t' < t$. Merkitään $\beta := \inf_{u>t}\frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} < \infty$. Kaavan [R2:3.1(2)] perusteella $\frac{\phi(t)-\phi(t')}{t-t'} \le \beta$, joten $\beta \in]-\infty,\infty[$. Nyt $\frac{d^+}{dt}\phi(t) = \beta$, koska jos $\epsilon > 0$, niin on olemassa $u_\epsilon > t$ s.e. $\frac{\phi(u_\epsilon)-\phi(t)}{u_\epsilon-t} - \beta < \epsilon$ ja tällöin $0 \le \frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} - \beta < \epsilon$ $\forall u \in]t,u_\epsilon[$ kaavan (*) perusteella. Aivan samoin nähdään, että $\frac{d^-}{dt}\phi(t) = \sup_{s<t}\frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s}$. Kaavan [R2:3.1(2)] perusteella $\frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s} \le \frac{d^+}{dt}\phi(t)$ $\forall s \in]a,t[$ ja siis $\frac{d^-}{dt}\phi(t) \le \frac{d^+}{dt}\phi(t)$.
(Huom.: $\exists\phi'(t) \iff \frac{d^-}{dt}\phi(t) = \frac{d^+}{dt}\phi(t)$.)

---

[9] Olkoon $A = \{x_1, x_2, ...\}$. $A_n := \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Tällöin $F = \lim_n F_n$, missä $F_n := \chi_{A_n}F$, joten dominoitua konvergenssia voidaan soveltaa, jos esim. $|F| \in L^1$ (majorantti), ja suppeneminen on monotonista, jos $F \ge 0$.

Tuloksen olisi voinut todistaa myös ilman mon. konvergenssin lausetta: $\phi : x \mapsto \nu(\{x\})$ on σ-mitallinen funktio, missä $\sigma(\{x\}) = 1$ $\forall x \in E$ ("lukumäärämitta"), ja ϕ indusoi mitan ν kuten [R2:1.29]:ssä, jonka perusteella myös $\int_E F\,d\nu = \int_E F\phi\,d\sigma = \sum F(x)\phi(x)$ $\forall F \ge 0$.