Mat-1.150 Reaalianalyysi: 10. harj. vastauksineen ma 7.4.1997 (2 sivua)
1. välikokeeseen osallistumattomat voivat suorittaa sen keskiviikkona 9.4.97 klo 17–20! Ilmoittautukaa luennoitsijalle (juha.kinnunen@helsinki.fi tai p. 191 22875).

Tehtävä 10.1 ([7.5] *helpohko, lyhyehkö*):
Todista seuraavat maksimaalifunktioita koskevat väitteet.

(i) $f \in L^1_{\text{loc}} \wedge \exists a \in \mathbb{R}^k\ [Mf(a) = 0] \implies f(x) = 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}^k$.
(ii) $f, g \in L^1(\mathbb{R}^k) \implies M(f+g)(x) \le Mf(x) + Mg(x)$.
(iii) $f \in L^1(\mathbb{R}^k) \wedge \lambda \in \mathbb{R} \implies M(\lambda f)(x) = |\lambda| Mf(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^k$.
(iv) $f \in L^1(\mathbb{R}) \not\Longrightarrow Mf \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) := \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \,|\, \|g\|_{L^1(K)} := \int_K |g| < \infty\ \forall K \subset\subset \mathbb{R}\}$.
(Ohje: $f(x) := \chi_{]0,1/2[}(x)/[x(\log x)^2]$.)[1]

Vastaus: Olkoon $f, g : X \to \mathbb{R} \wedge \lambda \ge 0$. Tällöin $\sup_{x\in X}[f(x) + g(x)] \le \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x)$ ja $\sup_{x\in X} \lambda f(x) = \lambda \sup f(x)$ (htll).

$$Mf(a) := \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |f|\, dm \ (a \in \mathbb{R}^k,\ f \in L^1_{\text{loc}}).$$

(Tässä $f \in L^1_{loc}$ oli tarpeen siksi, että muutoin ei Mf:ää voi määritellä.)
(i) $0 = Mf(a) := \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |f|\, dm$

$$\implies 0 = \int_{B(a,r)} |f|\, dm\ \forall r \implies 0 = m(\{f \ne 0\} \cap B(a,r))\ \forall r$$

$$\implies 0 = \lim_{n\to\infty} m(\{f \ne 0\} \cap B(a,n)) = m(\{f \ne 0\}) \text{ [1.19d], QED.}$$

(ii) $M(f+g)(x) := \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |f+g|\, dm$

$$\le \sup_{0<r<\infty} [m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |f|\, dm + m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |g|\, dm]$$

$$\le \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |f|\, dm + \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |g|\, dm$$

$= Mf(x) + Mg(x)$, QED.
(iii) $M(\lambda f)(a) := \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |\lambda f|\, dm = \sup_{0<r<\infty} |\lambda| m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |f|\, dm$

$$= |\lambda| \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |f|\, dm = |\lambda| Mf(a), \text{ QED.}$$

(iv) $(Mf)(x) > (B(x,x))^{-1} \int_0^{2x} |f| > (2x)^{-1} \int_0^x (\log t)^{-2} t^{-1}\, dt = (2x)^{-1} \Big|_0^x - (\log t)^{-1}$

$$= (2x)^{-1}[-(\log x)^{-1} + (-\infty)^{-1}] = (2x)^{-1}/\log x^{-1}\ \forall x \in]0, 1/4[,$$

joten $\int_0^{1/4} (Mf)(x)\, dx \ge \int_0^{1/4} 1/2x \log x^{-1}\, dx = \frac{1}{2} \int_4^\infty 1/s \log s\, ds = \infty$ (esim. [R1:3.29] ja sarjan integraalitesti). Siis $Mf \notin L^1([0, 1/4])$, joten $Mf \notin L^1_{loc}$.

[1] Tässä, kuten yleensäkin kirjallisuudessa, $\log := \ln$.

Tehtävä 10.2 ([7.5] *helppo, lyhyt*):
Osoita, että $f(x) := |x|^{-n}$ kuuluu heikkoon $L^1(\mathbb{R}^n)$:een muttei $L^1(\mathbb{R}^n)$:een.

Tärkeää taustatietoa: Seuraavat kaksi lemmaa (ja $\mathbb{R}^n$:n napakoordinaatit [R2: p. 176, Exe 8.6]) kuuluvat yleissivistykseen!

Lemma 0.0.1 *Olkoon $g : [0, \infty[\to [0, \infty]$ Borel-funktio (eli Borel-mitallinen, siis esim. paloittain jatkuva). Tällöin*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(|x|) dx = \int_0^\infty g(r) a_n r^{n-1}\, dr$$

missä a_n on $\mathbb{R}^n$:n yksikköpallopinnan $(n-1)$-ulotteinen mitta ("pinta-ala") (r-säteisen $n-1$-mitta on $a_n r^{n-1}$; ko. pallon "tilavuus" (n-mitta) on $m(B_r) = v_n r^n$, missä $0 < a_n, v_n < \infty$.) [R2: p. 176, Exe 8.6]

Tästä saadaan suoraan ($g(r) := \chi_{]R_1,R_2[} r^{-p}$):

Lemma 0.0.2

$$\int_{R_1<|z|<R_2} |z|^{-p} dz = a_n \int_{R_1}^{R_2} r^{-p} r^{n-1}\, dr = \frac{a_n}{n-p} \Big|_{R_1}^{R_2} r^{n-p} \ (p \ne n,\ \textit{muutoin } a_n \log r)$$

Joten $p < n \iff z^{-p} \in L^1(B_R)$, $\quad p > n \iff z^{-p} \in L^1(B_R^c)$.
Erityisesti $\frac{M}{1+|x|^a} \in L^p \quad 1 \le p \le \infty$, *kun* $a > n$.

Vastaus:

$$m(\{|f| > \lambda\}) = m(\{|x|^n < \lambda^{-1}\}) = m(\{|x| < \lambda^{-1/n}\})$$

$$= m(B(0, \lambda^{-1/n})) = m(B_{\mathbb{R}^n}(0,1)) \cdot (\lambda^{-1/n})^n = v_n \lambda^{-1},$$

joten $\lambda m(\{|f| > \lambda\}) = v_n$ on rajoitettu eli $f \in$ heikko L^1. Kuitenkin $\int_{\mathbb{R}^n} f\, dm \ge \int_{B(0,1)} f\, dm = a_n \int_0^1 r^{-n} r^{n-1}\, dr = a_n \Big|_0^1 \ln r = \infty$ lemman perusteella, ts. $f \notin L^1$ (mikään $|x|^p$, $p \in \mathbb{R}$ ei kuulu L^1:een missään $\mathbb{R}^n$), QED.

Tehtävä 10.3 ([8.7] *keskitasoa, keskipitkä*):
Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^k$, $\rho > 0$. $d(x,A) := \inf\{|x-y| \mid y \in A\}$, $E := \{x \in \mathbb{R}^k \mid d(x,A) = \rho\}$.
(i) Näytä, että E on suljettu.
(ii) Näytä, että $\forall x \in E\ \exists y \in \bar{A}\ [|x-y| = \rho \wedge B(y,\rho) \cap E = \emptyset]$.
(iii) Näytä, että $\limsup_{r\to 0+} \frac{m(E\cap B(x,r))}{m(B(x,r))} \leq 1/2\ \forall x \in E$.
(iv) Todista, että $m(E) = 0$.

Vastaus: Jos $A = \mathbb{R}^k$, niin väitteet ovat triviaaleja, joten y.l.o.e. $A \neq \mathbb{R}^k$.
(i) Missä tahansa metrisessä avaruudessa $f : x \mapsto d(x,A) \in \mathbb{R}$ on jatkuva, koska $d(x,x') < \delta_\epsilon := \epsilon \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon$, kuten helposti nähdään. Niinpä $E := f^{-1}\{\rho\} \subset^{c} \mathbb{R}^k$, koska $\{\rho\} \subset^{c} \mathbb{R}$.
(ii) $g : \mathbb{R}^k \ni y \mapsto |x-y| \in \mathbb{R}$ on jatkuva[2] Toisaalta $x \in E \implies \forall \epsilon > 0\ \exists y \in A\ [|x-y| < \rho + \epsilon]$, joten infimum löytyy joukosta $K := \bar{B}(x,\rho+1) \cap \bar{A} \subset^{K} \mathbb{R}^k$ ($K \subset \mathbb{R}^k$ on kompakti joss se on suljettu ja rajoitettu) (infimum löytyy K:sta, koska pisteiden $y \in \bar{A} \setminus K$ etäisyys x:stä $> \rho + 1$). Nyt $\rho = \inf_{y\in A} |x-y| = \inf_{y \in K} |x-y| = \inf_{y\in K} g(y) = g(y_0)$ jollain $y_0 \in K$, koska kompaktissa joukossa jatkuva funktio saavuttaa miniminsä (ja maksiminsa).[3] $B(y_0,\rho) \cap E$ on tietysti tyhjä, koska E:n pisteen etäisyys mistään A:n pisteestä ei ole $< \rho$ (eikä mistään $\bar{A}$:n pisteestä (htll)).
(iii) Piirrä kuva (ii):n tilanteesta: kun $r \to 0+$, niin $B(y,\rho)$:n osuus $B(x,r)$:stä kasvaa puoleen. Sama eksaktisti: Olkoon em. kuvassa $z \in \partial B(y,\rho) \cap \partial B(x,r)$ (leikkauskäyrällä).[4] Tällöin kolmion $x-y-z$ sivut ovat r, ρ, ρ. Olkoon α kulma x:n kohdalla. Kosinilauseen perusteella $\rho^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\alpha$ eli $\cos\alpha = r/2 \to 0+$, joten $\cos\alpha \to \frac{\pi}{2}-$. Niinpä em. kolmion pyörähdyskartio riittää valtaamaan koko puolipallon, kun $r \to 0+$, joten $F_r := \bar{B}(y,\rho) \cap \bar{B}(x,r)$ toteuttaa $m(F_r)/m(B(x,r)) \to 1/2$.[5]
(iv) Metrinen tiheys $f_E(x) = 1$ m.k. $x \in E$ [7.12]. Olkoon $N \subset E$ nollajoukko s.e. $f_E(x) = 1\ \forall x \in E \setminus N$. Kohdan (iii) perusteella $E \setminus N = \emptyset$, joten $E = N$ on nollajoukko, QED.

Tehtävä 10.4 ([7.12] *keskitasoa, lyhyt*):
Konstruoi $E \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$ s.e. $\limsup_{r\to 0+} \frac{m(E\cap]-r,r[)}{2r} = 1 \wedge \liminf_{r\to 0+} \frac{m(E\cap]-r,r[)}{2r} = 0$.

Vastaus:(Huom.: erityisesti E:n metrinen tiheys ei ole määritelty 0:ssa.)
Pitäisi siis olla esim. jono $r_n \to 0+$ s.e. joka toisella n olisi $]0, r_n[$ melkein pelkkää E:tä ja joka toisella melkein pelkkää E^c:tä, vieläpä kasvavassa suhteessa. Sitten vain kopsataan sama $\mathbb{R}_-$:lle ja homma on kunnossa.

$$r_k := 1/k!,\ E_1 := \cup_{n\in\mathbb{N}_+}[r_{2n+1}, r_{2n}],\ E := E_1 \cup (-E_1).$$

Nyt $(2r_{2n})^{-1} m(E\cap]-r_{2n}, r_{2n}[) \geq (2r_{2n})^{-1} 2m(]r_{2n+1}, r_{2n}[) = (r_{2n})^{-1}(r_{2n} - r_{2n+1})$ $= (1 - 1/(2n+1)) \to 1$ ja

$$(2r_{2n+1})^{-1} m(E\cap]-r_{2n+1}, r_{2n+1}[) \geq (2r_{2n+1})^{-1} 2m(]0, r_{2n+2}[)$$

$$= (r_{2n+1})^{-1} r_{2n+2} = 1/(2n+2) \to 0,\ \text{QED}.$$

Vihjeitä: **10.1**: Muut suoraan määritelmistä, (iv): laske $Mf(x)\ \forall x \in 1/4$ (f on helppo integroida ketjusäännöllä).
10.2: Ks. lemmat vastauksen alusta tai [R2:Exe8.5].
10.3: (ii) Totea, että minimi löytyy eräästä kompaktista joukosta. (iii) Piirrä kuva pallojen leikkauksesta (ks. (ii)). (iv) [R2:7.12].
10.4: $r_k := 1/k!$, ...

---

[2] $|y-y'| < \delta_\epsilon := \epsilon \implies |g(y) - g(y')| = ||x-y| - |x-y'|| < |y-y'| < \epsilon$, koska $|x-y| < |x-y'| + |y-y'| \implies |x-y| - |x-y'| < |y-y'|$, ja $|x-y'| < |x-y| + |y-y'| \implies -|y-y'| < |x-y| - |x-y'|$.
[3] Kompaktin joukon jatkuva kuva on kompakti; koska g on $\mathbb{R}$-arvoinen, $g[K] \subset^{K} \mathbb{R}$ on siis suljettu ja rajoitettu, joten se sisältää miniminsä.
[4] Kuvasta näkee, että leikkauskäyrä ei ole tyhjä. Jos silti epäilet tätä, parametrisoi jokin x-keskinen r-säteinen y_0:n kautta kulkeva ympyrä jatkuvasti, esim. $h(t) := x + e_1 r\cos t + e_2 \sin t$, missä $e_1 := (y-x)/|y-x|$ ja e_2 on sitä vastaan kohtisuora, ja totea, että $F(t) := |h(t) - y_0|$ saavuttaa arvot 0 ja 2ρ, joten se jatkuvana saavuttaa myös arvon ρ (tuo piste on siis ko. leikkauskäyrällä).
[5] Tämän eksakti toteaminen ei olisi kovin vaikeaa, esim. skaalattaisiin em. pallo yksikkö palloksi (kullakin r) (m on siirtoinvariantti ja $1/r$-skaalauksessa $1/r^k$-kertautuu [2.20&2.23]). Sitten todetaan, että em. skaalattu alue G_r on aidosti kasvava (inkluusioiden suhteen) (nähdään helposti) ja niiden yhdiste on koko avoin puolipallo, joten mitta lähestyy puolipallon mittaa [R2:1.19d].