Rudin: "R&C" -katekismus 23.8.94–9.9.02 km@iki.fi

W. Rudin: Real And Complex Analysis

Tässä tekstissä on kommentteja opiskelijalle, joka tuntee modernin analyysin perusteet (esim. [R1] eli W. Rudin: Principles of Modern Analysis) ja ryhtyy opiskelemaan TKK:n kurssin "Mat-1.150 reaalianalyysi" oppikirjaa [R2] eli W. Rudin: Real And Complex Analysis (third edition). Tämän monisteen ensisijainen tavoite on helpottaa oppimista, mutta pienellä painetusta tekstistä osa on hyödyllistä vasta mahdollisissa myöhemmissä opinnoissa. Tekstissä kerrotaan taustaa luvuille 1–8 ja poimintoja luvuista 9–20. Topologian tuntemus on avuksi, muttei lainkaan välttämätöntä. Lisäys- ja muutosehdotukset ovat tervetulleita (Kalle.Mikkola@hut.fi).

Kirjan teksti on hyvin tiivistä ja eleganttia, ja todistuksissa jää (usein ilman eksplisiittistä mainintaa) yksityiskohtia lukijan päättelyn varaan (nämä ovat hyviä harjoitustehtäviä, joita voi raapustella auki rivien väliin tms.). Ei siis pidä hermostua, jos puolen sivun lukemiseen menee joskus pari tuntia etkä silti ymmärrä tekstiä kokonaan; opiskele eteenpäin ja laske mahdollisimman monta harjoitustehtävää, niin asia avautuu lisää, ja viimeinen silaus tulee, kun asioita sovelletaan muissa kursseissa (muutenkin tämä kirja on Rudinin kolmikon sekavin). Ensimmäisen luvun todistukset eivät kuitenkaan ole kovin vaikeita, joten ne kaikki kannattanee käydä läpi (ks. vuoden 1994 koealue ensi sivulta).

Harjoitustehtävistä jotkin ovat varsin helppoja, toiset taas hyvinkin vaikeita. Yleensä niissä on yksi tai useampi temppu, jonka keksiminen voi tapahtua hetkessä tai vasta pitkän pohtimisen jälkeen. *Yhteen tehtävään ei siis kannata kerralla käyttää kovin paljon aikaa, jos ei tunne etenevänsä, vaan kannattaa laskea muita tai lukea lisää ja koittaa uudelleen (pätee yleisemminkin matematiikassa).*

0.1 Merkintöjä

& = "ja", $\forall$ = "kaikilla", $\exists$ = "on olemassa".
$A \subset B = B \supset A$ = "A on B:n osajoukko" = "$\forall a \in A\ (a \in B)$".
[1.2] tarkoittaa [R2]:n ensimmäisen luvun toista kohtaa (sivulla 8), [s.25] tarkoittaa sivua 25.
(ht) tarkoittaa, että ko. asia sopii harjoitustehtäväksi; htl = lyhyt ht, htll = erittäin lyhyt ht, htp = pitkä ht. (Suosittelen tämän paperin lyhyiden harjoitustehtävien laskemista.)
s.e. = "siten, että"; m.k. = "melkein kaikki[alla]" tai "melkein kaikilla" = a.e.
$a := 5$ tarkoittaa, että a:n määritellään olevan 5.
$f \geq g$ tarkoittaa, että f ja g ovat reaaliarvoisia ja $f(x) \geq g(x)\ \forall x$, vastaavasti $f > g$ tarkoittaa, että f ja g ovat reaaliarvoisia ja $f(x) > g(x)\ \forall x$.
$\Re f :=\mathrm{Re}\, f$; $\Im f :=\mathrm{Im}\, f$.
$f_{|E}$ tarkoittaa funktion f rajoittumaa joukkoon E (eli funktiota $E \ni x \mapsto f(x)$; oltava $E \subset X$, missä X on f:n määrittelyjoukko).
$\cup_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ tarkoittaa joukkojen A_0, A_1, ... yhdistettä [1.1] samoin kuin $\cup\{A_n \,|\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ (merkintä voi olla hämäävä, mutta ero on siinä, että jälkimmäisessä ei $\cup$-merkinnässä ole alaindeksiä; nämä merkinnät ovat käteviä ja yleisiä); $\cap$ vastaavasti.
$\dot\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ (ei käytössä [R2]:ssa) tarkoittaa joukkojen E_n yhdistettä $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n := \{x \,|\, \exists n \in \mathbb{N}\ (x \in E_n)\}$, mutta merkinnän täplä "$\bullet$" kertoo, että joukot E_n ovat erillisiä (pistevieraita, disjoint), eli $n \neq m \Rightarrow E_n \cap E_m = \emptyset$.

$A \approx B$ tarkoittaa, että A ja B ovat yhtä mahtavia eli $\exists$ bijektio $A \to B$ eli $\exists$ bijektio $B \to A$ eli $A \preceq B$ & $B \preceq A$ (joissain teoksissa $\approx$ merkitses homeomorfismia tai muuta isomorfismia).

$A \preceq B$ eli $B \succeq A$ tarkoittaa, että B on vähintään yhtä mahtava kuin A eli on olemassa injektio $A \to B$ eli on olemassa surjektio[1]$B \to A$ eli

[1]Huom. $\emptyset = \emptyset^B$ (kumpikin merkintä on joukko, jossa ei ole ainuttakaan alkiota)

$\exists B' \subset B$ s.e. $(A \approx B')$ (htl).

$A \prec B$ eli $B \succ A$ tarkoittaa, että A on vähemmän mahtava kuin B eli $A \preceq B$ & $A \not\approx B$ eli $A \not\succeq B$.

Huom.: $A \prec \mathbb{N} \iff A$ on äärellinen. $\mathbb{N}_+ \approx \mathbb{N}_0 \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$ ja $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R} \approx 2^{\mathbb{N}} \approx C$, missä C on Cantorin joukko ja $n \in \mathbb{N}_+$.
Seuraavista kaavoista [M:B.2.2] voi joskus olla hyötyä:
$\mathbb{N} \preceq A \succeq B \succeq 1 \implies A \times B \approx A \cup B \approx A$;
$2 \preceq B \preceq A \succeq \mathbb{N} \implies B^A \approx 2^A \approx \mathcal{P}(A)$;
$A \succeq \mathbb{N} \implies \forall n \in \mathbb{N}\ (A^n \approx A)$ & $\cup_{n\in\mathbb{N}} A^n \approx A$.
$A \succeq \mathbb{N}$ & $\forall a \in A\ (B_a \preceq A) \implies \cup_{a\in A} B_a \preceq A$.
$A \succeq \mathbb{N} \implies A \approx \{B \subset A \,|\, B \prec \mathbb{N}\}$.
TVS = topologinen vektoriavaruus (mm. kaikki Banach-avaruudet) [R3], ei kuulu [R2]-kurssiin.

0.2 Viitteitä

[R1] W. Rudin: Principles of Modern Analysis (ModA).
[R2] W. Rudin: Real And Complex Analysis (third edition) (ReA: 1–8; CompA: 10–20).
[R3] W. Rudin: Functional Analysis (TMH edition 1974) (erikseen tentittävissä).
[Alg] Jokin algebran perusteiden opas (esim. Myrberg: Algebra).
[M] Allekirjoittaneen väitöskirja,
http://www.math.hut.fi/~kmikkola/math/wpls-care.html
(myöhemmin myös mm. laitoksen kirjastossa), jonka liitteet A–D sisältävät mm. Banach- ja Hilbert-avaruuksien teoriaa sekä vektoriarvoisten funktioiden (pätee myös tavallisille) teoriaa: integrointi, derivointi, mitallisuus, analyyttisyys, interpolointi; L^p, H^p ja $W^{k,p}$-avaruudet yms.; distribuutiot, konvoluutiot, Laplace- ja Fourier-muunnokset; Monia näistä tuloksista on vaikea löytää kirjallisuudesta edes tavallisille funktioille, joten [M]:stä kannattaa katsoa, mikäli oppikirjasi käyttää "tavanomaista" tai "tunnettua" tulosta viitteittä. [M]:n viitteissä on lisää vastaavia etenkin skalaarifunktioille.

0.3 Yleistä

TKK:n kurssit: [R1]:n (ModA) jälkeen kannattanee suorittaa funktionaalianalyysin perusteet ennen [R2]:n lukemista (ei välttämätöntä). [R2] puolestaan on hyvä suorittaa ennen pidemmälle meneviä erikoiskursseja.

Tässä tekstissä mainitaan myös joitain asioita, jotka eivät kuulu tavalliseen reaalianalyysikurssiin, mutta joista on hyötyä kurssin suorituksen jälkeen. Nämä on yleensä kirjoitettu pienellä tekstillä tai alaviitteinä, ja ne kannattaa vain *silmäillä nopeasti* muistaakseen että jotain sellaista täältä löytyy.

Kirjaa lukiessa olisi tarvetta isolle joukolle helppoja harjoitustehtäviä vastauksineen, sillä vain laskeskelemalla voi nämä asiat oppia kunnolla. Tähän ei ole täydellistä ratkaisua, mutta tämä moniste tarjoaa paljon harjoitustehtäviä ((ht)-merkinnät); myös kirjan monet todistukset ja todistusten osat ovat hyviä harjoitustehtäviä; tosin tätä on vaikea nähdä ennalta, mutta monesti on hyödyllistä todistaa itse lause sen läpikäymisen jälkeen, tällöin näet joutuu itse ajattelemaan yksityiskohdat läpi ja tarjolla on "mallivastaus",[2] nimittäin ko. todistus. Samoin ne kurssin harjoitustehtävät, joita ei ole osannut laskea, kannattanee laskea vastausten läpikäymisen jälkeen.

ajatellaan funktioksi $B \to \emptyset$ [Alg], siksi aina $B \succeq 0$.

Algebrasta kiinnostuneille muistutan, että B^A on funktioiden $f : A \to B$ joukko (esim. $\mathbb{R}^3$ funktioiden $3 \to \mathbb{R}$ eli $\{0,1,2\} \to \mathbb{R}$ eli reaalilukukolmikoiden joukko). kaikkein formaaleimmassa esitystavassa funktio $f : A \to B$ on tapana esittää tulon $A \times B$ osajoukkona, jossa $f(a) = b \iff (a,b) \in f$. Tietysti funktion on oltava yksiarvoinen, joten $B^A = \{f \in A \times B \,|\, (a,b) \in f \ \&\ (a,b') \in f \implies b = b'\}$. Siksi siis $\emptyset^B \subset B \times \emptyset = \emptyset$, joten $\emptyset^B = \emptyset$, kuten edellä todettiin.

[2] Typografisista syistä sitaatit ovat englantilaisittain. Lisäksi kielitoimiston suosituksen vastaisesti kirjoitan "Banach-avaruus" enkä "Banachin avaruus" ja "Riemann–Stieltjes-integroituva" enkä "Riemannin ja Stieltjesin mukaisesti integroituva", sillä tämä termimäisyys nopeuttanee tekstin hahmottamista.

[R2]:n todistuksissa sovelletaan usein sitä, että yhtälöitä ja epäyhtälöitä voidaan laajentaa tiheyden perusteella seuraavasti (todistus on helpohko harjoitustehtävä):

Lause 0.3.1 *Olkoon $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ (ts. f ja g ovat jatkuvia funktioita $X \to \mathbb{C}$, missä X on jokin topologinen avaruus) ja $A \subset X$.*
(a) $f(x) = g(x)\, \forall x \in A \implies f(x) = g(x)\, \forall x \in \bar{A}$.
(b) $f(x) \le g(x)\, \forall x \in A \implies f(x) \le g(x)\, \forall x \in \bar{A}$.

Siis, jos jatkuvat funktiot ovat samoja jossain joukossa, ne ovat samoja myös ko. joukon sulkeumassa (a-kohta). Kohta (b) ei päde korvattaessa $\le$ merkillä $<$.[3]

0.4 Reaalianalyysin välikoealueet vuonna 1994

Ao. välikoealueet voivat muuttua (ilmoitetaan myöhemmin mallivastauspapereissa, samoin välikoepäivämäärät), mutta ne kertovat eri asioiden tärkeydestä. (Vuonna 1997 Ch4 siirrettiin 1. välikokeeseen, tosin tehtävittä.)

1. välikoe Koealue on [R2:Ch1–3] poislukien kohdat 1.40, 1.41, 2.22 ja 2.23 sekä kohtien 1.36, 2.12, 2.13, 2.14, 2.24, 2.25 ja 3.17 todistukset. Siis välikokeeseen tulevat harjoitukset 1–5 & 6.1–6.3 (keväällä 1997 harjoitukset 1–6). Koetehtävät ovat pääasiassa "keskitasoa" ja ne voivat olla myös todistustehtäviä.

[3] Kohdassa (a) maaliavaruus $\mathbb{C}$ voidaan korvata millä tahansa Hausdorff-avaruudella; lisäksi kummassakin kohdassa voidaan korvata jatkuvuus jonojatkuvuudella, jos sulkeuma $\bar{A}$ korvataan jonosulkeumalla (todistus helpohko topologiaa tuntevalle).

Funktionaalianalyysissä usein jokin väite muotoa $Af = Bf$ todistetaan funktioavaruuden tiheässä, helposti käsiteltävässä osajoukossa (esim. $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, kun kyseinen avaruus on $L^p(\mathbb{R}^n)$ tai $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ tms. $(1 \le p < \infty)$), ja sitten operaattorien A ja B jatkuvuuden avulla laajennetaan väite koko avaruuteen. Lauseessa esitetty muoto riittää kuitenkin lähes aina [R2]:ta lukiessa.

2. välikoe
Ch4: Ilman tod.: 4.1–4.12 ja 4.23–4.26 (4.5b tärkeä!). Todistuksineen: 4.13–4.18.
Ch5: Ilman tod.: 5.1–5.4, 5.8–5.11, 5.14–5.16, 5.19, 5.20.
Ch6: Kokonaan, paitsi kohtien 6.3, 6.11, 6.12 ja 6.19 tod. Lauseen 6.16 todistuksesta tapaus $\mu(X) < \infty$ riittää.
Ch7: Todistuksineen: 7.1–7.11 ja 7.17–7.20. Ilman tod.: kaava 7.26(15) s. 156.
Ch8: Ilman tod.: 8.8 ja 8.10–8.12. Todistuksineen: 8.1–8.7.

Huom.: Tämä on huomattavan raskas annos. Tärkeysjärjestys: 1. lauseet 2. niiden soveltaminen 3. todistusten perusideat.

Kokeissa sovellettaessa jotakin [R2]:n lausetta olisi hyvä kirjoittaa tyyliin "Koska f on mitallinen (koska jatkuva) ja $f \ge 0$, Fubinin lauseen mukaan integrointijärjestyksen saa vaihtaa"(jos ei muista lauseen nimeä, voi kirjoittaa "kirjan lauseen" tms., tuosta tekstistä tarkastaja ymmärtää, että oppilas muistaa tarpeelliset oletukset ja siitä seuraavan johtopäätöksen). Minimissäänkin edes yhtäsuuruusmerkin yläpuolelle voisi merkitä "$f \ge 0$ mit. ($\Longleftarrow$ jva)", sillä em. temput eivät kuitenkaan ole (tässä kurssissa) itsestäänselvyyksiä.

Mallivastauksissa, etenkin alaviitteissä, on usein varsin pikkutarkasti käyty yksityiskohtia läpi. Kokeissa ei olla näin tarkkoja.

1 Chapter One

Ensimmäisessä luvussa esitellään Henri Lebesguen [lö'beg][4] (1875–1941, ransk.) vuosisadan vaihteessa kehittämä Lebesgue-integraali, jo-

[4] Käytän suomalaisia kirjaimia äännemerkkien sijaan vaivani säästämiseksi; heittomerkki edeltää painollista tavua (siis sen kohdalla voi pitää pienen tauon). Huom.: suomi lausutaan yleensä kuten se kirjoitetaan, ei siis pidä antaa suomenruotsalaisen ääntämyksen "alffa", "beetta", "sinffonia", "kanttarelli", "inflaattio", "vamppyyri", "kamppanja", "intternet", "laudaattur" tarttua (kussakin noista sanoista ensimmäisen kaksoiskonsonantin pitäisi olla yksinkertainen sekä kirjoituksessa että lausunnassa!). Lisäksi "q" lausutaan "kuu" eikä "guu".

ta matemaatikot käyttävät käytännössä aina (ilman eri mainintaa) – paitsi kun integroitavan funktion arvot eivät ole lukuja (eivätkä $\mathbb{C}^n$-vektoreita, jotka integroidaan komponenteittain) vaan esim. (TVS-)vektoreita (ks. [R3]). Onneksi lukiossa (tai [R1]:stä) oppimasi Riemann-integraali [riiman] (Bernhard Riemann, 1826–66, saks.) antaa täsmälleen samat tulokset; ero on vain siinä, että Lebesgue-integraali on olemassa monilla sellaisillakin funktioilla, joita ei voi Riemann-integroida. Lisäksi vastaava mitallisuuskäsite tekee L^p-avaruuksista täydellisiä [R2:Th3.11] ja mahdollistaa kivoja, vahvoja lauseita (ilman lisäehtoa: "jos näin syntyvät funktiot sattuvat olemaan Riemann-integroituvia").

Kaikki avaruuden $\mathbb{R}^k$ (oleellisesti) Riemann-integroituvat funktiot ovat Lebesgue-integroituvia [R1:11.33] (ja näillä integraaleilla on samat arvot), mutta muitakin Lebesgue-integroituvia funktioita on olemassa: esim. funktio $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$ ei ole Riemann-integroituva, mutta sen Lebesgue-integraali (Lebesgue-mitan suhteen) on nolla. (Poikkeus: jos funktion positiiviset ja negatiiviset osat (ja sen mahdollisen imaginaariosan positiiviset ja negatiiviset osat) kumoavat toisiaan sopivasti, sen *epäoleellinen* Riemann-integraali voi olla olemassa (esim. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ja $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$), vaikkei ko. funktio olisi Lebesgue-integroituva.)

Mittoja voidaan määritellä mihin tahansa joukkoon X; niinpä ("mielekkäiden funktioiden") Lebesgue-integrointeja voidaan suorittaa missä tahansa joukossa (ei vain $\mathbb{R}^k$:ssa ja sen osajoukoissa). Olet saattanut tutustua avaruuden $\mathbb{R}$ tai yleisemmin avaruuden $\mathbb{R}^k$ Lebesgue-mitan konstruoimiseen [R1:luku 11]. [R2]:ssa puhutaan aluksi mitoista yleisesti ja vasta lauseessa [R2:Th2.20] todistetaan Lebesgue-mitan olemassaolo (ko. lauseen (d)-kohdan avulla voidaan osoittaa, että kyseessä on juuri sama mitta). Tämä siksi, että näin voidaan kerralla todistaan kaikille mitoille yhteiset lauseet; ovathan muutkin mitat kuin Lebesgue-mitta usein hyödyllisiä ja toisaalta Lebesgue-mitta on määritelty vain $\mathbb{R}^n$:ssä ja sen (mitallisissa) osajoukoissa.

Prologi ja merkinnät [s. 1–7] kannattanee vain silmäillä nopeasti; osannet asiat ennestään.

[1.2] määrittelee topologian (kr. seutuoppi), eli avointen joukkojen perheen $\mathcal{T} := \{V \subset X \,|\, V \text{ on avoin}\}$. Kyseessä on eräänlainen metriikkaa yleistetympi tapa sanoa, mitkä pisteet ovat lähellä toisiaan (tiettyyn avoimeen joukkoon kuuluvat pisteet; vrt. tiettyyn palloon kuuluvat pisteet). Jokaisessa joukossa voidaan määritellä topologioita, äärettömissä joukoissa peräti äärettömän monta erilaista topologiaa. Kuitenkin $\mathbb{R}^k$:ssa *yleensä* käytetään euklidista topologiaa, ts. avoimiksi joukoiksi määritellään avointen pallojen (mielivaltaiset) yhdisteet [1.4] (tosin pallotkin voitaisiin määritellä jonkin toisen metriikan suhteen; näin ei yleensä tehdä). Jos tästä poiketaan, se on tapana mainita eksplisiittisesti.[5]

Topologian määritelmä voi näyttää kummalliselta, ellei se ole entuudestaan tuttu, mutta se on vain luonnollinen $\mathbb{R}^k$:n (ja muiden metristen avaruuksien) avointen joukkojen käsitteen yleistys, johon ennen pitkää tottuu. Kaikki metriset avaruudet ovat topologisia avaruuksia [1.4] (muitakin topologisia avaruuksia on olemassa). Voit todistaa (ht), että metrisessä avaruudessa X määritelty funktio on jatkuva joss $\forall x$ minkä tahansa $f(x)$-keskisen pallon sisään kuvautuu jokin x-keskinen pallo eli $\forall x \in X\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.e. $f[B_\delta(x)] \subset B_\epsilon(f(x))$ eli

$$\forall x \in X\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X\ \ (d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon),$$

siis määritelmän [1.2c] mukainen jatkuvuus on sama asia kuin tavallinen jatkuvuus (tosin [R2]:ssa käsitellään yleensä $\mathbb{C}$- tai $\mathbb{R}$-arvoisia funktioita metriikalla $d(f(x), f(y)) := |f(x) - f(y)|$, mikä on siis ekvivalenttia [1.4]).

[5] Käytännössä harva matematiikko törmää muihin ei-metristyviin topologioihin kuin TVS:ien heikot ja heikko-*-topologiat [R3].

[1.3] määrittelee käsitteen σ-algebra [sigma-algebra], eli mitallisten joukkojen perheen $\mathfrak{M} := \{A \subset X \mid A \text{ on mitallinen}\}$, joka ensi näkemältä hämmentää kuten topologian määritelmäkin. Jokaisessa joukossa voidaan määritellä σ-algebroja, äärettömissä joukoissa peräti äärettömän monta erilaista σ-algebraa. $\mathbb{R}^k$:ssa mitallisella joukolla (eli $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^k}$:n alkiolla) tarkoitetaan Lebesgue-mitallista joukkoa, ellei toisin mainita. Kuitenkin Lebesgue-mitta (ja Lebesgue-σ-algebra) tulee ajankohtaiseksi vasta lauseen [2.20] jälkeen. Mainittakoon vielä, että karkeasti ottaen $\mathbb{R}$:n Lebesgue-mitta kertoo joukon pituuden; $\mathbb{R}^2$:n Lebesgue-mitta kertoo joukon pinta-alan jne. Mitan käsite määritellään kohdassa [1.18].

Esimerkiksi X:n kaikkien osajoukkojen joukko $2^X := \mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$ on niin topologia ("X:n diskreetti topologia") kuin σ-algebrakin (htl). Kuitenkaan kaikki topologiat eivät ole σ-algebroja eikä päinvastoin (esim. $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^k}$ ja $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^k}$ (ht)).

Tulevat lauseet ja erityisesti harjoitustehtävät tekevät määritelmät [1.2] ja [1.3] vähitellen paremmin ymmärrettäviksi.

Kun ollaan avaruudessa $\mathbb{R}^k$, Lebesgue-mitallisia funktioita (määrittelyjoukossaan $X \subset \mathbb{R}^k$) ovat suunnilleen kaikki funktiot, joita käytännössä tulee vastaan (esim. 3, x, $5x^2 + 17x^{12/5}$, $\sin(x)$, ..., koska jatkuvat funktiot, mitallisten joukkojen karakteristiset funktiot ja äärellisen (tai numeroituvasti äärettömän) monessa palassa (mitallisista funktioista) määritellyt funktiot ja mitallisista tavanomaisilla operaatioilla saadut funktiot ovat mitallisia [1.9]; poikkeus: jotta funktioiden yhdiste olisi automaattisesti mitallinen, vaaditaan jatkuvuutta (tai ainakin Borel-mitallisuutta [1.12d]) [1.7–1.8]). Vastaava pätee Lebesgue-mitallisille joukoille. Ei-Lebesgue-mitallista joukkoa (esim. [2.22]) tai funktiota (htl: kumpikin yhtä vaikeaa (toisesta saa toisen)) ei kukaan ole tiettävästi onnistunut konstruoimaan käyttämättä (hieman kiisteltyä) valinta-aksioomaa [s.396].

Luvun loppuosassa esitetään mitallisuuden, mittojen ja integraalien teoriaa. Se voi tuntua melko abstraktilta ja ontolta, mutta riittävä harjoitustehtävien laskeminen korjannee asiaa.

[1.4] (htl: $[-\infty, \infty]$:n tavanomainen topologia on sama kuin metriikan $d(x, y) := \min(|x - y|, 1)$ määräämää topologia (huom.: $|x - y|$ voi olla ∞).

Jos $(X, \mathcal{T})$ on topologinen avaruus ja $A \subset X$, niin joukon A relatiivitopologia X:n suhteen eli joukon A X:ltä perimä topologia on $\mathcal{T}_{A,X} := \mathcal{T}_A := \{V \cap A \mid V \in \mathcal{T}\}$. (htl: $\mathcal{T}_A$ on topologia joukossa A.) Kun A varustetaan tällä topologialla, sanotaan että A on X:n aliavaruus (tarkasti ottaen pitäisi sanoa, että A on X:n topologinen aliavaruus; tätä ei pidä sekoittaa vektoriavaruuksiin ja vektorialiavaruuksiin, joissa ei välttämättä edes ole mitään topologiaa).

(ht: Jos $\mathcal{T}$ on metriikan d määräämä, niin $d|_A$ on metriikka ja $\mathcal{T}_A$ on $d|_A$:n määräämä.)

(ht: $\mathbb{R}$ ja $[0, \infty]$ perivät $[-\infty, \infty]$:ltä tavanomaiset topologiansa.)

(htll: Myös joukon $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ topologia on tapana määritellä em. metriikan d avulla. Todista, että $\bar{\mathbb{C}}$ ja $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ ovat kompakteja. (Huom.: aivan kuten $\mathbb{C}$:lle yllä, mille tahansa joukolle voidaan suorittaa yhden pisteen kompaktisointi [T2:16.8] ([T2] = Jussi Väisälä: "Topologia II", Limes 1983).))

[1.11] Borel-joukot ovat pienin σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot. Ts. kyseessä on (tärkeä) tapa määritellä eräs σ-algebra sellaisessa avaruudessa, jossa on jo määritelty jokin topologia.

[1.12] c-kohdassa puhutaan $[-\infty, \infty]$-arvoisista Borel-mitallisista funktioista; $[-\infty, \infty]$:n topologia on määritelty kohdassa [1.4].

(ht: Jos $V \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, niin V on numeroituvan monen erillisen avoimen välin yhdiste (tätä käytetään c-kohdan todistuksessa). Ohje: Jos $x \in V$, niin olkoon $C(x)$ kaikkien x:n sisältävien V:n avointen välien yhdiste eli $C(x) := \cup\{]a, b[\mid x \in]a, b[\subset V\}$. 1° $C(x)$ on avoin väli $\forall x \in V$. 2° Joukot $C(x)$ $(x \in V)$ ovat erillisiä eli $C(x) \neq C(y) \Rightarrow C(x) \cap C(y) = \emptyset$. 3° $V = \cup_{q \in \mathbb{Q} \cap V} C(q)$, joten V (enintään) numeroituvan monen $C(q)$ yhdiste (jotkin $C(q)$ voivat jopa olla samoja tai V voi olla tyhjä).)

(ht: Jos tunnet topologisen käsitteen "yhtenäisyys", voit vastaavasti todistaa, että jokainen $V \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^k}$ on numeroituvan monen avoimen yhtenäisen joukon yhdiste (vihje: Q^k).)

[1.14] Huom.: vaikka $g := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n$ on mitallinen, kun jokainen f_n on mitallinen, niin ylinumeroituvan funktiojoukon supremum ei välttämättä ole mitallinen. Korollaarissa (a) todetaan, että jos f_n on mitallinen $\forall n$, niin $\lim_{n\to\infty} f_n$ on mitallinen (jos olemassa).

Kohdassa [1.16] esitellään porrasfunktiot (simple functions). Niitä tarvitaan lähinnä integraalin määritelmässä [1.23].

[1.18] määrittelee lopulta mitan; käsitettä selkeyttävät kohdan [1.20] esimerkit.

(ht: Jos $A_n \in \mathfrak{M}\ \forall n \in \mathbb{N}$, niin $\mu(\cup_n A_n) \le \sum_n \mu(A_n)$
(vihje: $B_n := A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A_k\ \forall n \Rightarrow \cup_n A_n = \dot\cup_n B_n$).)

[1.22] määrittelee käsitteen ääretön (symbolina ∞), joka ei ole aivan sama asia kuin lukiossa opetettu raja-arvojen laskentaan tarkoitettu ∞, ei myöskään aivan sama asia kuin ääretön mahtavuus [R1:luku 2] (joita on monia). Tämä on pidettävä mielessä, kun ihmettelee määritelmää $0\cdot\infty = 0$. Ko. määritelmä ei ole mikään ongelma, kun muistaa, että kyseessä ei ole sama käsite, kuin lukion ∞, vaan uusi käsite, jolla kuitenkin on monia intuitiivisen äärettömyyden ominaisuuksia, kuten muillakin em. käsitteillä. Tässä määriteltävä käsite on erittäin hyödyllinen [R2]:ssa ja muuallakin analyysissä, kunhan sitä ei sotketa muihin äärettömyyden käsitteisiin.

[1.23] määrittelee viimein positiivisarvoisen funktion Lebesgue-integraalin (kompleksisarvoiset: [1.31]). (2) sanoo, että porrasfunktion integraali on sen kuvaajan pinta-ala (joka voi olla ääretön). (3) määrittelee (Lebesgue-)integraalin mielivaltaiselle mitalliselle $f : X \to [0,\infty]$ (epätyhjällä joukollahan on aina olemassa supremum; nollafunktio tekee tutkittavasta joukosta epätyhjän).

Integraali määritellään siis suunnilleen kuten Riemann-alaintegraalikin: f:n alle piirretään porrasfunktio s, lasketaan sen ala, piirretään suurempi porrasfunktio, lasketaan sen ala, ... ja otetaan näistä kaikista supremum. Ero on siinä, että nyt portaiden ei tarvitse olla peräkkäisiä välejä, kuten Riemann-integraalissa, vaan mikä tahansa mitallinen joukko (esim. $\mathbb{Q}$) kelpaa s:n portaaksi.

Mikäli $X \subset \mathbb{R}$ ja μ on Lebesguen mitta m, tavalliset funktiot integroituvat kuten ennenkin ($\int_{[a,b]} x^2\, dm(x) = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$ jne.) (todistetaan lauseessa [R1:11.33] tai esim. [R2:7.20]).

Huom.: Jos $E \subset X$ on mitallinen ($E \in \mathfrak{M}_X$), niin on tapana määritellä $\mathfrak{M}_E := \{A \subset E \,|\, A \in \mathfrak{M}_X\}$ (voit harjoituksena todistaa, että $\{A \subset E \,|\, A \in \mathfrak{M}_X\} = \{B \cap E \,|\, B \in \mathfrak{M}_X\}$ ja että ko. joukko on σ-algebra (vihje: kahden joukon ($\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$) samuus on yleensä helpointa todistaa s.e. osoitetaan ensin jokaisen $\mathcal{A}$:n alkion olevan $\mathcal{B}$:n alkio ja sitten jokaisen $\mathcal{B}$:n alkion olevan $\mathcal{A}$:n alkio)).

Tällöin $\mu|_E$ (mitan μ rajoittuma joukkoon E, ts. $\mu|_E : \mathfrak{M}_E \to [0,\infty]$) on mitta (nähdään helposti). (Jos X:ssä on määritelty topologia ja μ on Borel-mitta, niin $\mu|_E$ on E:n Borel-mitta (kun E varustetaan X:ltä perityllä topologialla $\mathcal{T}_E := \{V \cap E \,|\, V \in \mathcal{T}_X\}$) (harjoituksena voit todistaa, tämän ja sen, että $\mathcal{T}_E$ on topologia, kun $\mathcal{T}_X$ on).)

Tällöin $\int_E f\, d\mu|_E = \int_X \chi_E f\, d\mu$ (helppo harjoitus), kuten voisi toivoa.

[1.24] osoittaa, että Lebesgue-integraalilla on suurin piirtein ne ominaisuudet, joita integraalilta voisi odottaa.

[1.27] Tässä on hyvä muistaa, että $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ on vain lyhennemerkintä käsitteelle $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n$ (jälleen ∞ eri käsitteen symbolina). Huomaa vaatimus funktioiden f_n $[0,\infty]$-arvoisuudesta; yleensäkään Rudinin lauseiden ehdoista ei voi tinkiä (joitain poikkeuksiakin on).

[1.30] L^1-avaruus ("äl-yks-avaruus") on erittäin tärkeä käsite (tarkemmin luvuissa 3 ja 5).
(htll: $f \in L^1 \Rightarrow \{\Re f, \Im f, f^+, f^-\} \subset L^1$.)

[1.31] Tässä määritellään kompleksisen funktion integraali. Ehto $f \in L^1$ (monissa teoksissa merkitään $f \in \mathcal{L}^1$) takaa sen, että minkään osan (u^+ jne.) integraali ei ole ääretön (muutoinhan saatettaisiin törmätä määrittelemättömään $\infty - \infty$ tms.). (2) ei juuri ole tarpeen tässä kirjassa.
Monet mitallisille $[0, \infty]$-arvoisille funktioille esitetyt lauseet voidaan osoittaa tosiksi myös L^1-funktioiden kohdalla (esim. lauseet [1.29], [7.26] ja [8.8]), harvemmin kaikkien $\mathbb{C}$-arvoisten mitallisten funktioiden kohdalla.

[1.34] eli Lebesguen dominoidun konvergenssin lause on hyvin hyödyllinen työkalu (kuten edellisetkin).

[1.35] Tässä kohtaa ryhdytään puhumaan ekvivalenssiluokista, mikä hämmentää useimmat opiskelijat. Käsite on kuitenkin varsin hyödyllinen ja siihen tottuu ajan mittaan. $\mathcal{L}^1$ on siis funktioiden perhe mutta L^1:llä tarkoitetaan ekvivalenssiluokkien perhettä. Usein kuitenkin puhutaan L^1:n alkioista funktioina ja lukijan oletetaan ymmärtävän eron (joka on toisinaan merkityksetön, koska $f \sim g \Rightarrow 5f \sim 5g \,\&\, \int f = \int g \,\&\, ...$).

[1.36] selittää, miten jokainen mitta (σ-algebroineen) voidaan täydellistää (complete) määrittelemällä kahden samanmittaisen joukon väliin jäävät joukot mitallisiksi. (Esim. $\mathbb{R}^k$:n Lebesgue-σ-algebra on $\mathbb{R}^k$:n Borel-σ-algebran täydellistymä (completion).) (Harjoitustehtävä: todista, että $\mathfrak{M}^*$ on pienin täydellinen σ-algebra, johon $\mathfrak{M}$ kuuluu (vihje: [1.36]:ssa todistetaan $\mathfrak{M}^*$ täydelliseksi σ-algebraksi, joten sinun on vain todistettava, että kun $\mathfrak{M}'$ on täydellinen σ-algebra, johon $\mathfrak{M}$ kuuluu, niin $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}'$).)
(htll: Todista, että jos f on $\mathfrak{M}$-mitallinen funktio, niin f on $\mathfrak{M}^*$-mitallinen funktio.)

[1.38]:sta seuraa (sopii harjoitustehtäväksi, vihje: $f_n := f_{|E_n}$):
Korollaari $1.38\frac{1}{2}$ Olkoon $f : X \to \mathbb{C}$ mitallinen; olkoon $E_n \in \mathfrak{M}_X$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ ja olkoot joukot E_n erillisiä ($n \neq m \Rightarrow E_n \cap E_m = \emptyset$). Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|\, d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} |f|\, d\mu.$$

Jos ko. integraali on $< \infty$, niin lisäksi

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu.$$

[1.40] ja [1.41] eivät ole aivan niin tärkeitä kuin muut luvun 1 lauseet.

2 Chapter Two

Tässä luvussa määritellään lineaarikuvaukset ja puolijatkuvuus, esitellään topologiaa varsin tiiviisti ja tutkitaan jatkuvia funktioita $\mathcal{C}(X)$, erityisesti jatkuvia kompaktikantajaisia funktioita $\mathcal{C}_c(X)$, sekä mittojen säännöllisyyksiä, todistetaan Rieszin lause [2.14] ja määritellään Lebesgue-mitta [2.20].

[2.1] *Linear transformation* = lineaarimuunnos, lineaarikuvaus, lineaarioperaattori; *linear functional* = lineaarinen funktionaali (siis yleensä lineaarikuvaus $X \to \mathbb{C}$, joskus $X \to \mathbb{R}$ ([R2]:ssa vain jos $X = \mathbb{R}^n$)).

[2.3] Joissain teoksissa x:n *ympäristö* tarkoittaa x:n "*yliympäristöä*" eli joukkoa, joka sisältää jonkin x:n ympäristön (ts. jolla on osajoukkona jokin x:n ympäristö). Lokaali kompaktisuus määritellään joissain teoksissa heikommin: jokaisella pisteellä on kompakti yliympäristö (Hausdorff-avaruuksissa nämä määritelmät yhtyvät; toisaalta suunnilleen kaikki hyödylliset avaruudet ovat Hausdorff-avaruuksia).

(htl: Jos $K \subset X$ on äärellinen, niin K on kompakti (merkitään $K \subset_K X$). Jos $K \subset_K X$ & $K' \subset_K X$, niin $K \cup K' \subset_K X$.)

(htl: Jos X on Hausdorff-avaruus ja $x \in X$, niin $\{x\}$ on suljettu.)

(htll: $\mathbb{R}^n$ on lokaalisti kompakti)

(htl: Äärellisen joukon X ainoa Hausdorff-topologia on sen diskreetti topologia $\mathcal{P}(X)$.)

[2.4]–[2.7] & [2.10] Jos tunnet topologiaa ennestään, yritä todistaa nämä lauseet itse; ellet tunne, voit yrittää todistamista käytyäsi todistukset ensin kertaalleen läpi. Näin saat sopivaa tuntumaa topologiaan. Joka tapauksessa kertaa [R1:2.24] ja [R1:2.22].

[R2]:ssa tutkitaan lähinnä vain lokaalisti kompakteja Hausdorff-avaruuksia, joita ovat mm. kaikki $\mathbb{R}^n$:n avoimet ja suljetut osajoukot (htl).

[2.8] *Lower semicontinuous* = alhaalta puolijatkuva, *upper semicontinuous* = ylhäältä puolijatkuva.

(htll: Puolijatkuva f on Borel-mitallinen.)

(htll: Oikealta (tai vas.) jatkuva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei välttämättä ole puolijatkuva eikä ylhäältä (tai alh.) jatkuva $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ole välttämättä oikealta eikä vasemmalta jatkuva.)

(htl: Olkoon f ylhäältä puolijatkuva. Jos $r \geq 0$, niin rf on ylhäältä puolijatkuva; jos $r \leq 0$, niin rf on alhaalta puolijatkuva.)

(htl: Jos f ja g ovat ylhäältä (vast. alhaalta) puolijatkuvia, niin $f+g$ on ylhäältä (vast. alhaalta) puolijatkuva.)

(((htp: Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $\exists f(t+) := \lim_{s \to t+} f(s)$ $\forall t$ (erityisesti kun f on oikealta jatkuva eli $\exists f(t+) = f(t)$ $\forall t$), niin f on alhaalta puolijatkuva (siis $f \in \mathfrak{M}$) (vast. $\exists f(t-)$ $\forall t \implies f$ on ylh. pj.).)))

[2.11]–[2.13] Urysohnin lemma on varsin hyödyllinen, mutta todistusten läpikäyminen ei ole välttämätöntä.

(htl: Osoita, että jos X on lokaalisti kompakti Hausdorff-avaruus, niin $\mathcal{C}_c(X)$ *separoi X:n pisteet* eli $\forall x \in X$ $\forall y \in X$ $(x \neq y \Rightarrow \exists f \in \mathcal{C}_c(X)$ $(f(x) \neq f(y)))$.)

Rieszin lause [2.14] kertoo, että jokaista positiivista [s.41] lineaarista funktionaalia $\mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{C}$ vastaa (tietyin edellytyksin) yksikäsitteinen positiivinen mitta μ [2.14a]. Lauseen todistus [s.41–47] on raskas, joskaan ei kohtuuttoman vaikea; todistuksen läpikäyminen ei ole välttämätöntä.

Tämän lauseen avulla todistetaan myöhemmin Rieszin lauseen yleisemmin käytetty versio [6.19], joskin [2.14]:ssa on se etu, että funktionaalin Λ ei tarvitse olla jatkuva.

[2.15] Outer regular = ulkosäännöllinen, inner regular = sisäsäännöllinen, regular = säännöllinen, σ-compact = σ-kompakti (esim. kaikki $\mathbb{R}^n$:n avoimet (ht) ja suljetut (htl) osajoukot (vihje: avoimet: $V = \cup_{j \in \mathbb{Z}_+} K_j$, missä $K_j := \{x \mid d(x, V^c) \geq \frac{1}{n}\}$), σ-finite = σ-äärellinen (esim. Lebesgue-mitta missä tahansa $\mathbb{R}^n$:n mitallisessa osajoukossa (htl [2.20]:n jälkeen)).

(htll: Todista, että jos X on Hausdorff-avaruus, niin jokainen X:n σ-kompakti osajoukko on Borel-mitallinen.) Joskus Borel-mitalla saatetaan tarkoittaa Borel-mitan täydellistymää.

Luvun loppuosassa lauseet ovat tärkeämpiä kuin todistukset, joskin minkä tahansa todistuksen läpikäyminen on opettavaista.

[2.20] Tässä konstruoidaan viimein Lebesgue-mitta m, ylivoimaisesti käytetyin mitta. Lauseen (d)-kohdan avulla voidaan osoittaa, että kyseessä sama mitta, kuin [R1]:n luvussa 11 määritelty.

(htll: Todista, että $\mathfrak{M}$ on $\mathbb{R}^k$:n Borel-σ-algebran täydellistymä [1.36].)

(htll: Todista, että jokainen $\mathbb{R}^k$:n σ-kompakti osajoukko on Lebesgue-mitallinen.)

(htl: Todista, että jos $\emptyset \neq V \overset{o}{\subset} \mathbb{R}^k$ (ts. $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin ja epätyhjä), niin $m(V) > 0$.)

Kohdassa (e) mainittu $\triangle(T)$ on sama kuin $|\det T|$ [2.23]. Seuraavat kolme vähemmän tärkeää (voit sivuuttaa kaksi ensimmäistä hyvällä omallatunnolla, ensimmäinen on topologisesti aika vaativa) harjoitustehtävää helpottavat mm. lauseen [2.18] soveltamista:

((htp)): todista, että jokainen lokaalisti kompakti $X \subset \mathbb{R}^k$ on σ-kompakti (ja siis Borel-mitallinen).

((htp)): todista, että mikä tahansa lokaalisti kompakti $X \subset \mathbb{R}^k$ toteuttaa [2.18]:n ehdot.

(ht): todista, että jos $X \subset \mathbb{R}^k$ on lokaalisti kompakti ja $f \in L^1_{loc}(X) := \{f \in \mathcal{L} \mid \int_K |f| < \infty \ \forall K \overset{K}{\subset} X\}$ (eli f on *lokaalisti integroituva*, ts. $\|f\|_{L^1(K)} < \infty$ jokaisella kompaktilla $K \subset X$) sekä $f \geq 0$ ja $\mu_f(E) := \int_E f\,dm \ \forall E \in \mathfrak{M}$ [1.29], niin μ_f toteuttaa lauseen lauseen [2.18] ehdot (ja on siis säännöllinen).

Tällaisia mittoja μ_f tarvitaan silloin tällöin.

[2.21] Cantorin joukon C:n mahtavuus on $2^{\mathbb{N}}$, koska C on niiden tri-äärijärjestelmän lukujen $t \in [0,1]$ joukko, joiden mikään numero ei ole 1 [R1:harjoitus 3.19] (mukl. $0,222... = 1$). Toisaalta selvästi $\mathbb{R} \preceq 2^{\mathbb{N}}$, joten $\mathbb{R} \approx 2^N \approx \mathbb{C}$. Esim. desimaalimaalilukujen desimaaleja lomittelemalla nähdään, että $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$; selvästi $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$.

[2.22] *Coset* = sivuluokka. Tiettävästi kukaan ei ole onnistunut konstruoimaan ei-Lebesgue-mitallista $\mathbb{R}$:n osajoukkoa ilman valinta-aksioomaa. Jos tarvitsee (johonkin vastaesimerkkiin) ei-mitallista joukkoa tai funktiota, niin tässä käytetty menetelmä lienee helpoin ($\mathbb{Q}$:n kustakin sivuluokasta $t + \mathbb{Q}$ (missä $t \in \mathbb{R}$) poimitaan yksi alkio; näin saatu joukko E voidaan osoittaa ei-mitalliseksi).

Lauseet [2.24] & [2.25] ovat vähemmän tärkeitä, mutta ne kannattaa lukaista läpi; joskus ne voivat olla avuksi.

3 Chapter Three

Tässä luvussa esitellään L^p-avaruudet [3.6] ja todistetaan tärkeimpiä niihin liittyviä tuloksia.

[3.1] Epäyhtälö (1) voi näyttää selkeämmältä muodossa

$$\phi(x + \lambda(y - x)) \leq \phi(x) + \lambda(\phi(y) - \phi(x)).$$

[3.3] Jos $\mu(\Omega) = r \in]0, \infty[$, niin $\phi\left(\frac{1}{r}\int_\Omega f\,d\mu\right) \leq \frac{1}{r}\int_\Omega (\phi \circ f)\,d\mu$ (htl).

[3.5] Hölderin ja Minkovskin epäyhtälöt ovat äärimmäisen tärkeitä, mutta muodot [3.8] ja [3.9] ovat helpommin muistettavia.

[3.6] Huom.: L^p-funktiot (merkitään myös $L^p(X)$, $L^p(X,\mu)$, $L^p((X,\mu);\mathbb{C})$ tms.), ovat $\mathbb{C}$-arvoisia funktioita (siis ∞ kielletty)! (Toisinaan määritellään reaaliarvoisten funktioiden $L^p(X,\mathbb{R})$ tms., ja silloin saatetaan sallia äärettömätkin arvot, joskaan niitä ei voi esiintyä kuin nollamitallisissa (siis yleensä merkityksettömissä) joukoissa.) Tässä puhutaan myös normista, luvussa 5 todetaan tarkemmin, mitä normi tarkoittaa (mistä käy ilmi, että $\|f\|_p$ ei yleensä ole normi sanan varsinaisessa merkityksessä, jos $0 < p < 1$; tosin L^p-avaruudet arvoilla $0 < p < 1$ ovat harvoin tarpeen).

[3.7] $\|f\|_\infty = \inf\{\beta \in [0, +\infty] \mid \beta \geq |f| \text{ m.k.}\}$ (htl).

(htll: $\mu(X) < \infty \Rightarrow L^\infty \subset L^1$.)

L^∞-normin määritelmässä merkintä $p = \infty$ on siinä mielessä järkevä, että $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p \in [0,\infty]$, jos $f = 0$ jonkin äärellismitallisen joukon ulkopuolella (ht) tai jos $\|f\|_p < \infty$ jollain $p < \infty$ [R2:Exe3.4e] (muutoinhan voi olla $X = \mathbb{R}$ ja $f \equiv 1$, jolloin $\infty = \|f\|_p = \infty \to \infty \neq 1 = \|f\|_\infty$).

[3.8] ja [3.9] pätevät myös $[0,\infty]$-arvoisille mitallisille funktioille (htl) (joista joskus käytetään merkintää $L^p((X,\mu);[0,\infty])$ tms.). $\sum_n |a_n b_n| \le \sqrt{\sum_n |a_n|^2}\sqrt{\sum_n |b_n|^2}$ (htll).

(htl: $q > p \Rightarrow \ell^p \subset \ell^q$.)

[3.10] Tässä on helpointa ajatella, että kohdan [3.6] määritelmä määrittelee vektoriavaruuden $\mathcal{L}^p(\mu)$, ja merkitä $L^p(\mu)$:llä *ekvivalenssiluokkien* metristä vektoriavaruutta (peräti Banach-avaruutta [Luku5]), joka selitetään kohdassa [3.10]. Yleensä (mm. [R2]:ssa) merkinnällä L^p saatetaan tarkoittaa kumpaa tahansa; merkitys selviää yleensä asiayhteydestä.

(htll: $f \notin L^p \,\&\, f - g \in L^p \Rightarrow g \notin L^p$.)

(ht: $\mu(X) < \infty \,\&\, 0 < p < q \le \infty \Rightarrow L^q \subset L^p$ (ohje: Olkoon $h \in L^q$. $h^q = (h^p)^{q/p}$, joten $\int |h^p| < \infty$ nähdään soveltamalla Hölderiä $(f := h^p,\ g := 1)$).)

Seuraavat pienellä kirjoitetut asiat eivät ole tarpeen [R2]:ta lukiessa, mutta niihin saattaa törmätä myöhemmin (siis vain silmäile tämä): Monissa teoksissa käytetään määritelmää $L^p_{loc} := \{f \in \mathcal{L} \mid \|f\|_{L^p(K)} < \infty\ \forall K \subset_K X\}$ (mitalliset funktiot, jotka kuuluvat lokaalisti (paikallisesti) L^p:hen). Ko. avaruus varustetaan $\|\cdot\|_{L^p(K)}$-seminormeilla (tarkemmin [R3:1.37] ([R3] = W. Rudin: "Functional Analysis") tai [M:B.3.1]), se ei siis yleensä ole normiavaruus (sama pätee $\mathcal{C}(X)$:ään ja $\mathcal{C}^l(X)$:ään jne., kun X ei ole kompakti; näistä tarkemmin ks. [M]).

Merkintä $L^p(X,Y)$ tarkoittaa yleensä *vahvasti mitallisia* (määritellään porrasfunktioiden raja-arvoiksi) funktioita $f : X \to Y$, joilla $\|f\|_Y \in L^p(X)$ (tämä vaatii, että Y on Banach-avaruus tms.); kyseessä on siis [R2]:ssa käytettävän $L^p(X,\mathbb{C})$:n yleistys, joka liittyy läheisesti Bochner-integraaliin (joka toimii Y-arvoisilla funktioilla kuten Lebesgue-integraali $\mathbb{C}$-arvoisilla). Mikäli joskus törmäät em. käsitteisiin, löydät niistä lisätietoja [M]:stä.

[3.12] Jos $f_n \underset{L^p}{\rightarrow} f$, $f_n \underset{L^{p'}}{\rightarrow} g$ ja $f_n(x) \to h(x)$ m.k. x, niin $f(x) = g(x) = h(x)$ m.k. x (htl). (Tässä $f_n \underset{L^p}{\rightarrow} f$ tarkoittaa, että $f_n \to f$ avaruudessa L^p eli $f_n, f \in L^p \,\&\, d(f_n, f) := \|f_n - f\|_p \to 0$.)[6]

[3.13] Huom.: $S \subset L^p\ \forall p \in [1,\infty]$. Siis erityisesti $L^1 \cap L^2$ on tiheä avaruudessa L^2, mitä tulosta on tapana käyttää määriteltäessä Fourier-muunnos avaruuteen L^2.

[3.14] Mikäli $X \subset_o \mathbb{R}^n$ ja μ on täydellinen säännöllinen positiivinen Borel-mitta, jolla $\mu(K) < \infty\ \forall K \subset_K Q$ (esim. $\mu = m$), niin $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ on tiheä avaruuksissa L^p ja L^p_{loc} $(1 \le p < \infty)$ [M:B.3.1]. Tätä tulosta sovelletaan usein reaalianalyysiä käsittelevissä teoksissa; tällä kurssilla se ei ole tarpeen.

4 Chapter Four

Tässä luvussa esitellään Hilbert-avaruudet (nimetty David Hilbertin (1862–1943, saks.) mukaan) ja muut sisätuloavaruudet (inner product space). Ne, samoin kuin muutkin normiavaruudet [Ch5] ovat metristen vektoriavaruuksien erittäin tärkeitä erikoistapauksia. Tässä vaiheessa on tärkeää muistuttaa, että metrisen avaruuden A kaikki suljetut ja rajoitetut osajoukot eivät yleensä ole kompakteja (jos ovat, sanotaan että A:lla on *Heine–Borel-ominaisuus*), etenkään tämä ei yleensä päde avaruuksissa $L^p(X,\mu)$ eikä muissakaan ääretönulotteisissa normiavaruuksissa [R3:1.23].

---

[6] Siis voitaisiin määritellä mitallisten funktioiden ekvivalenssiluokkien (topologiaton) vektoriavaruus L, jolloin L^p-avaruudet olisivat sen vektorialiavaruuksia (kukin omalla normillaan varustettuna).

[R2]:ssa määritellään vain kompleksikertoimiset Hilbert- ja Banach-avaruudet, niiden reaalikertoimiset vastineet ovat suurin piirtein samanlaisia, joskaan eivät yhtä tärkeitä. Osa [R2:4]:n tuloksista pätee jopa epätäydellisille (reaalisille tai kompleksisille) sisätuloavaruuksille; näitä tarvitessasi käy ko. lauseen todistus läpi.

[4.5b] (htll: Miksi $f\bar{g} \in L^1$?) Huom.: $L^p(\mathbb{R}^k)$ ei ole Hilbert-avaruus, jos $p \neq 2$ (ja $0 < p \leq \infty$), sama pätee muihinkin vähänkään tavallisiin $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ (tämän todistaminen *parallelogram law*:n avulla ei ole kohtuuttoman vaikeaa).

[4.11] ja [4.12] ovat äärimmäisen tärkeitä. Vastaavia ominaisuuksia ei Banach-avaruuksilla [Ch5] yleensä ole.

[4.13]&[4.14] Luku (x, u_α) [4.13(2)] on x:n skalaariprojektio suuntaan u_α (vrt. $\mathbb{R}^k$ tai $\mathbb{C}^k$); vastaavasti vektori $(x, u_\alpha)u_\alpha$ x:n (vektori)projektio suuntaan u_α. Vektori $s_F(x)$ [4.14(3)] on x:n (vektori)ortogonaaliprojektio aliavaruuteen M_F. Siis vektoreita u_α kannattaa ajatella vektoreina $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}, \ldots$; tosin joissain Hilbert-avaruuksissa niitä voi olla äärettömästi, jopa ylinumeroituvasti. Vastaavasti luvut $\hat{x}(\alpha)$ ovat vektorin x "koordinaatteja".

[4.15] Kiinnostuneille: Jos $\phi(\alpha)$:t olisivat kompleksisia, ko. sarja olisi tapana määritellä absoluuttisesti suppenevaksi ja sen raja-arvoksi a joss $\forall \epsilon > 0$ on olemassa äärellinen $A_0 \subset A$ s.e. jokaisella äärellisellä A' on $A_0 \subset A' \subset A \Rightarrow |a - \sum_{\alpha \in A'} \phi(\alpha)| < \epsilon$.

(ht: Ko. summa suppenee absoluuttisesti joss $\phi \in \ell^1(A)$.)

(ht: Em. summa on sama kuin $\int_A \phi \, d\sigma$, missä σ on lukumäärämitta.)

(htll: Jos $\phi \geq 0$, tämä määritelmä yhtyy määritelmään [R2:4.15].)

(ht: Jos $A = \mathbb{N}$, em. määritelmä yhtyy tavalliseen absoluuttisen suppenemisen määritelmään)

(htll: Tälläkin määritelmällä pätee $\phi \in \ell^1 \Rightarrow \{\alpha \,|\, \phi(\alpha) \neq 0\} \prec \mathbb{N}$.)

Aivan vastaavaa määritelmää voidaan käyttää määriteltäessä (ylinumeroituviakin) summia Hilbert-avaruuksissa (siis kun $\phi : A \to H$); tällöin toki $\mathbb{C}$:n normi $|\cdot|$ korvataan H:n normilla $\|\cdot\|$.

[4.17]&[4.18] Besselin epäyhtälö [4.17(1)] koskee siis mielivaltaista ortonormaalia joukkoa $F \subset H$, yhtälö [4.18iii] maksimaalista ortonormaalia joukkoa. [4.18ii]:stä seuraa (htl), että jos $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on on H:n ortonormaali kanta (ei-separoituvissa H ei tällaista numeroituvaa ortonormaalia kantaa ole), niin

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}(n) u_n \ \forall x \in H$$

aivan kuin $\mathbb{C}^3$:ssa (ja $\mathbb{R}^3$:ssa) $x = x_1\bar{\imath} + x_2\bar{\jmath} + x_3\bar{k}$ (Hilbert-avaruuksissa etc. määritellään luonnollisesti $\sum_{n=1}^{\infty} y_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} y_n$; kohdan [R2:4.15] kaltainen määritelmä on ekvivalentti tämän kanssa (htl)).
<u>Tod.:</u> $\hat{x} \in \ell^2(\mathbb{N})$ [4.18iii], joten jollain N on $\sum_{n=N+1}^{\infty} |\hat{x}(n)|^2 < \epsilon^2$ ja siis

$$\|x - x_N\|^2 \overset{4.18iii}{=} \sum_n |\widehat{(x - x_N)}(n)|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\hat{x}(n)|^2 < \epsilon^2,$$

kun merkitään $x_N := \sum_{n=1}^{N} \hat{x}(n) u_n$, sillä selvästihän $\bar{x}_N(k) := (\sum_{n=1}^{N} \hat{x}(n) u_n, u_k) = x(n)\chi_{n \leq N}$. ////

(Itse asiassa vastaava pätee kaikissa H: jos $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ on H:n ortonormaali kanta ja $x \in H$, niin $x = \sum_{\alpha\in A} \hat{x}(\alpha) u_\alpha$, (ht, vihje: $\hat{x} \in \ell^2(A)$ [4.18iii], joten $\hat{x} = 0$ jonkin numeroituvan joukon ulkopuolella [4.15]), missä summa määritellään kuten yllä kohdan [4.15] tarkennuksessa.)

Termin ortonormaali kanta (orthonormal base) oikeuttaa [4.18ii], joskaan tällainen ei ääretönulotteisessa tapauksessa ole vektorikanta (eli Hamel-kanta). (Vektoriavaruuden kannaksi määritellään vektoriavaruuden maksimaalinen lineaarisesti riippumaton osajoukko (lineaarinen riippumattomuus tarkoittaa sitä, että ko. joukon mikään *äärellinen* lineaarikombinaatio ei ole nolla (paitsi nollakombinaatio)). Tietyn vektoriavaruuden kaikki vektorikannat ovat yhtä mahtavia (htp), ko. mahtavuus määritellään vektoriavaruuden ulottuvuudeksi. Jokainen vektoriavaruuden lineaarisesti riippumaton osajoukko (erityisesti jokainen Hilbert-avaruuden ortonormaali kanta) voidaan täydentää ko. avaruuden vektorikannaksi (htp, vihje: Hausdorffin maksimiperiaate [4.21]).)

Rieszin–Fischerin lause [4.18] on erittäin keskeinen Hilbert-avaruuksien teoriassa.

(htp: Olkoon $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$ H:n ortonormaali kanta. H on separoituva joss $A \preceq \mathbb{N}$.)

[4.22] Siis jokaisessa H on maksimaalinen ortonormaali joukko eli *Hilbert-kanta*. Kohdan [4.19] kommenttien perusteella $H \cong \ell^2(A)$, missä A yhtä mahtava kuin H:n Hilbert-kanta. Tämä mahtavuus, dim H, on yksikäsitteinen, koska $H \cong \ell^2(B)$, niin $B \approx A$ kohdan [4.19] kommentin perusteella.[7]

Voidaan todistaa, että jos $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ on surjektiivinen, niin $\dim H_1 \geq \dim H_2$. Siis jos T on kääntyvä, $\dim H_1 = \dim H_2$ (htpp). Toisaalta, jos $\dim H_1 = \dim H_2$, niin kannan kannalle kuvaava (yksikäsitteinen) lineaarikuvaus on (aina olemassa ja) isometrinen lineaarinen bijektio (eli Hilbert-isomorfismi). (ht)

[4.23]–[4.26] Tässä annetaan (harmonisessa analyysissä erittäin tärkeä) käytännön esimerkki lauseista [4.18] ja [4.14]. Kyseessä on oikeastaan matematiikan peruskursseilta tutun "sarjan Fourier-muunnoksen" (Fourier-kerrointen laskennan) kehittyneempi versio.
Ensin määritellään avaruudet $L^p(T)$, sitten todetaan joukko $\{e^{int} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ maksimaaliseksi ortonormaaliksi joukoksi $L^2(T)$:ssä [4.24] ja lopulta selitetään, mitä [4.18] nyt kertoo $L^2(T)$:n rakenteesta ja alkioista. Tekijä $1/2\pi$ [4.23(2)] voi hämmentää, samaan tulokseen pääsisi korvaamalla T:ssä Lebesgue-mitan m mitalla $m/2\pi$ (kuten useissa teoksissa tehdäänkin).

[7] Ko. Hilbert-dimensio on enintään yhtä suuri kuin H:n (algebrallinen) vektoridimensio, joka mainittiin yllä. Yleensä kannasta ja dimensiosta puhuttaessa tarkoitetaan tällaista Hilbert-kantaa ja Hilbert-dimensiota – huomaa, että äärettömänulotteisissa avaruuksissa Hilbert-kannan virittämä aliavaruus on aito aliavaruus, vaikka se onkin tiheä; esim. $\ell^2(\mathbb{N})$:n eräs kanta on $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ja sen virittämä (tiheä) aliavaruus c_c sisältää vain jonot, joissa on vain äärellinen määrä nollasta poikkeavia alkioita.

5 Chapter Five

Tässä luvussa esitellään normiavaruudet, erityisesti Banach-avaruudet (ensimmäinen normiavaruuksien (yms.) abstrakti tutkielma oli puolalaisen Stefan Banachin (1892–1945, puol.) väitöskirja v. 1920). Normiavaruus on vektoriavaruus, jossa on määritelty normi [5.2]. Kaikki sisätuloavaruudet ovat normiavaruuksia ja kaikki normiavaruudet metrisiä avaruuksia ($d(x, y) := \|x - y\|$) [5.2]. Täydellisiä normiavaruuksia sanotaan Banach-avaruuksiksi aivan kuten täydellisiä sisätuloavaruuksia sanotaan Hilbert-avaruuksiksi.
([5.2] ht: Normiavaruuksissa pätee myös käänteinen kolmioepäyhtälö $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$ (vihje: 1^o $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$ (htl) 2^o ...).)

Huom.: tässä, samoin kuin luvussa 4, puhutaan vain kompleksisista vektoriavaruuksista. Suurin osa vastaavista asioista pätee myös reaalisille vektoriavaruuksille, mutta ne eivät ole aivan yhtä tärkeitä.

Seuraavassa on paljon pienellä kirjoitettua tekstiä (joka siis ei kuulu tähän kurssiin).

Kenties tärkein esimerkki Banach-avaruuksista on $L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$), muita ovat esim. avaruudet $\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{C})$ (ht), $\mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{C})$ (htl) ja $\mathcal{C}_{bu}(\Omega, \mathbb{C})$ (ht) supremum-normilla (b=bounded, bu=bounded and uniformly continuous), kun $\Omega \subset_{\circ} \mathbb{R}^k$ tms.[8]

[8] Edellä $\mathbb{C}$ voidaan korvata millä tahansa Banach-avaruudella X (ht). $\mathcal{C}_0(\Omega, X) \subset \mathcal{C}_{bu}(\Omega, X) \subset \mathcal{C}_b(\Omega, X)$ (ht, vihje: idea on helpompi keksiä tapauksessa $X = \mathbb{C}$). Sen sijaan avaruudessa $\mathcal{C}(\mathbb{R}^k)$ (tms.) ei voida käyttää supremumnormia (koska se ei ole äärellinen, siis ei normi), joten siellä käytetään seminormeja $f \mapsto \sup_K |f|$ ($K \subset_{K} \mathbb{R}^k$). Voidaan osoittaa [R3:1.37], että em. seminor-

On tärkeää huomata, että Banach-avaruuksista puuttuu yleensä käsite ortogonaalisuus (Hilbert-avaruuksissa $x \perp y \iff (x,y)=0$) ja siitä (ja avaruuden täydellisyydestä) seuraavat asiat (erityisesti [4.11] ja [4.18]).

[5.3] $\mathcal{L}(X,Y)$ tarkoittaa jatkuvien lineaarikuvausten $\Lambda : X \to Y$ normiavaruutta (kun X ja Y ovat normiavaruuksia) (normilla [5.3(1)]). Jos Y on täydellinen (siis Banach-avaruus), $\mathcal{L}(X,Y)$ on täydellinen (siis Banach-avaruus) (ht). Merkinnällä $\mathcal{B}(X,Y)$ tarkoitetaan rajoitettuja lineaarikuvauksia $\Lambda : X \to Y$. Lauseen [5.4] perusteella $\mathcal{B}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$, kun X ja Y ovat normiavaruuksia. $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$.[9]

mit määräävät avaruuteen $\mathcal{C}(\mathbb{R}^k)$ erään Hausdorff-topologian ("kompakti–avoin-topologian"[T2:26.3]), jossa $f_n \to f$ joss $f_n \to f$ tasaisesti jokaisessa $K \subset_K \mathbb{R}^k$. Tästä lisää: [R3].

TVS eli topologinen vektoriavaruus tarkoittaa sellaista vektoriavaruutta, jossa on määritelty (Hausdorffin) topologia, jonka suhteen vektoreiden yhteenlasku ja skalaareilla kertominen ovat jatkuvia. Normiavaruudet ovat TVS:iä (ht), mutta on myös olemassa tärkeitä ei normeerautuvia TVS:iä (esim. $L^p_{loc}(\mathbb{R}^k)$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^k)$ tai $\mathcal{C}^l(\mathbb{R}^k)$ [R3] (missä $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$); on olemassa myös ei-metristyviä TVS:iä kuten testifunktioiden avaruus $\mathcal{D}(\Omega)$ ja distribuutioiden avaruus $\mathcal{D}'(\Omega)$ [R3]). Kaikissa em. funktioavaruuksissa arvojoukko $\mathbb{C}$ voidaan korvata jollain Banach-avaruudella X ilman ko. funktioavaruuden ominaisuudet muuttuvat paljonkaan; jos X:ksi valitaan jokin oudompi TVS, saattaa muutoksia tullakin [R3][M]. Monet Banach-avaruuksien tärkeimmistä tuloksista pätevät täydellisissä TVS:issä [R3].

(Huom. jokaiseen vektoriavaruuteen voidaan määritellä normi ((ht)). $\mathbb{C}^k$:n (tai $\mathbb{R}^k$:n) kaikki normit ovat keskenään ekvivalentteja (htp) (normit $\|\cdot\|$ ja $|||\cdot|||$ ovat ekvivalentteja joss ne määräävät saman topologian, mikä voidaan todistaa ekvivalentiksi sen kanssa, että $\exists a,b \in]0,\infty[\ \forall x\ (a\|x\| \le |||x||| \le b\|x\|)$ (htp) (sen sijaan ehto $ad'(x,y) \le d(x,y) \le bd'(x,y)\ \forall x,y \in X$ on metriikoiden ekvivalenssille on riittävä, muttei välttämätön (ht)). Ääretönulotteisiin kompleksisiin (tai reaalisiin) vektoriavaruuksiin voidaan määritellä myös ei-ekvivalentteja normeja. Normiavaruus on siis pari $(X, \|\cdot\|)$, ei pelkästään X, aivan kuin metrinen avaruus on pari (X,d) jne.; käytännössähän usein merkintä X ei kuitenkaan aiheuta väärinkäsityksiä.)

[9]Jonkin struktuurin homomorfismi tarkoittaa kuvausta, joka säilyttää ko. struktuurin ominaisuudet. Niinpä vektoriavaruushomomorfismi tarkoittaa lineaarikuvausta (säilyttää vektorioperaatiot: $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \&\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$), joten, jos X ja Y ovat vektoriavaruuksia, merkinnällä $\mathrm{Hom}(X,Y)$ tarkoitetaan lineaarikuvauksia $X \to Y$. Siis $\mathcal{L}(X,Y) = \mathrm{Hom}(X,Y) \cap \mathcal{C}(X,Y)$, kun X ja Y ovat normiavaruuksia tms.

Lauseet [5.4], [5.8], [5.9] ja [5.16] ovat luvun tärkeimmät tulokset; myös huomiot [5.17] ja [5.21] ovat merkittäviä.

(ht: $\int : L^1 \to \mathbb{C}$ (siis $L^1 \ni f \mapsto \int f \in \mathbb{C}$) on jatkuva lineaarinen funktionaali ($\int \in \mathcal{L}(L^1, \mathbb{C}) =: L^{1*}$), jonka normi on yksi.)[10]

[5.8] Tässä siis joko $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on tasaisesti rajoitettu tai $\exists x \in X$ s.e. $\sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha x\| = \infty$ (itse asiassa tällaisia x on tiheän G_δ:n verran).

[5.21] Tämä kannattaa lukea tarkkaan läpi. Siis X:n duaali $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ on Banach-avaruus, kuten yllä [5.3]:n kohdalla todettiin. Hilbert-avaruuden duaali voidaan samaistaa ko. Hilbert-avaruuteen itseensä [4.12], joskaan tämä samaistus ei ole lineaarinen vaan kon-

[10]Banach-arvoisille (yleisemmin: TVS-arvoisille) funktioille voidaan määritellä derivaatta tavalliseen tapaan; tällaisen derivaatan ominaisuudet ovat melkein samat kuin $\mathbb{C}$-arvoisen (lähes kaikki [R1]:n todistukset kelpaavat pienin muutoksin). Funktioille $f : Q \to X$ (missä Q on mitta-avaruus ja X Banach-avaruus) voidaan myös määritellä käsite mitallisuus [M:B.2.1], minkä jälkeen $\|f\|_{L^p(Q,X)} := \|\|f\|_X\|_{L^p(Q)}$ (esim. $\|f\|_{L^1(Q,X)} := \int_Q \|f\|_X$) määrää Banach-avaruuden $L^p(Q,X)$, joka on suurin piirtein $L^p(Q)$:n kaltainen. Määriteltäessä porrasfunktioiden integraalit luonnolliseen tapaan ja käytettäessä porrasfunktioiden tiheyttä (tod. kuten [3.13]) voidaan määritellä $\int f := \lim_n \int s_n$, jolloin saadaan yksikäsitteinen määritelmä $\int f$:lle ja tällöin $\int \in \mathcal{L}(L^1(Q,X);X)$ ja $\|\int\| = 1$ ((htp)). Tätä integraalia kutsutaan **Bochner-integraaliksi**. Jos $X = \mathbb{C}$, niin Bochner-integraali yhtyy Lebesgue-integraaliin (htl).

TVS-arvoisia funktioita voidaan integroida helpomminkin, ns. **Pettis-integraalilla** [R3:3.26]. Kaikki Bochner-integroituvat funktiot ovat Pettis-integroituvia ja Pettis-integraali voidaan määritellä moniin eksoottisiinkin TVS:iin, mutta Bochner-integraalilla on melkein kaikki Lebesgue-integraalin ominaisuudet, minkä vuoksi se on käytetympi. Bochner- ja Pettis-integraaleihin liittyviä asioita ei kannattane tutkia, ennen kuin tarvitsee niitä jossakin; sama pätee em. $L^p(Q,X)$-avaruuksiin ja muihinkin eksoottisimpiin työkaluihin.

jugaattilineaarinen ($f \cong z \Rightarrow \alpha f \cong \bar{\alpha} z$).[11]

6 Chapter Six

Tähän mennessä on puhuttu positiivisista mitoista. Tässä luvussa esitellään kompleksiset mitat (jollaisia ovat mm. äärelliset positiiviset mitat), esitellään niihin liittyvää teoriaa ja todistetaan, että (tavallisimmilla X ja μ) $L^p(\mu)$:n duaali on $L^q(\mu)$, kun $1 \le p < \infty$, [6.16] ja $\mathcal{C}_0(X)$:n duaali on säännöllisten kompleksisten Borel-mittojen avaruus [6.19].

[6.1] Tässä vaatimus absoluuttisesta suppenemisesta on tarpeen samasta syystä kuin L^1:n määritelmässä: halutaan välttää tilanne $\infty - \infty$. Jos μ on kompleksinen mitta, niin $|\mu|$ on äärellinen positiivinen mitta [6.4,6.2]. $|\mu|$ = mitan μ kokonaisvariaatio/kokonaisvariaatiomitta; "total variation" $|\mu|(X)$ = kokonaisvariaatio, kokonaisheilahtelu; "μ is of bounded variation" = μ on rajoitettua variaatiota, μ on rajoitetusti heilahteleva.

[6.6] Jos μ on kompleksinen, se voidaan ensin jakaa paloihin $\Re\mu$ ja $\Im\mu$ (jotka ovat mittoja (htl)). Niinpä jokainen kompleksinen mitta μ on muotoa $\mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$, missä μ_i on positiivinen mitta ($i = 1, 2, 3, 4$).

[11] Normiavaruuden duaalissa käytetään yleensä operaattorinormin [5.3] määräämää topologiaa. Joskus kuitenkin TVS:ien duaaleissa saatetaan käyttää ns. heikko*-topologiaa ("heikko-tähti-topologiaa") eli kuvausten $f \mapsto f(x)$ indusoimaa [R3] (tai [T2]) topologiaa, jossa $f_n \to f$ joss $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in X$; vastaavasti avaruudessa X joskus käytettävässä heikossa topologiassa (duaalin indusoimassa topologiassa) $x_n \to x$ joss $f(x_n) \to f(x)\ \forall f \in X^*$.
Sitä, että X^* separoi pisteet, korostetaan siksi, että ei-normeerautuvissa TVS:issä ei näin välttämättä ole, esim. $L^p([0,1])^* = \{0\}$, kun $0 < p < 1$ [R3:1.47] (vrt. [R2:Exe3.24]).

[6.7] Olkoon $A \in \mathfrak{M}$. λ on keskittynyt A:lle joss $|\lambda|$ on keskittynyt A:lle joss $|\lambda|(A^c) = 0$ (htl).
ht: Olkoon $(Y, \mathfrak{M}', \mu')$ mitta-avaruus ja $X \in \mathfrak{M}'$. Tällöin $(Y, \mathfrak{M}', \mu')$:lta perityllä σ-algebralla $\mathfrak{M} := \{E \in \mathfrak{M}' \mid E \subset X\} = \{E \cap X \mid E \in \mathfrak{M}'\}$ ja mitalla $\mu := \mu'|_{\mathfrak{M}}$ varustettuna X on mitta-avaruus. (esim. $Y = \mathbb{R}$, $X = [0,1]$).
ht: Jos em. tilanteessa λ on $(X, \mathfrak{M})$:n mitta, niin λ' on joukkoon X keskittynyt $(Y, \mathfrak{M}')$:n mitta, kun $\lambda'(E) := \lambda(E \cap X)$. (Näissä ht:issa ei ole väliä sillä, ovatko em. mitat pos. vai kompl.))
ht: Olkoot μ ja ν kompleksisia $\mathfrak{M}$-mittoja. Jos $\mu \perp \nu$, niin $|\mu + \nu| = |\mu| + |\nu|$ (ts. $|\mu + \nu|(E) = |\mu|(E) + |\nu|(E)\ \forall E \in \mathfrak{M}$).

[6.8] Tämä lause kannattaa todistaa itse harjoitustehtävänä.
Olkoon λ pos. tai kompl. ja μ pos. $\mathfrak{M}$-mitta. Merkitään $\lambda \ll A$ joss $A \in \mathfrak{M}$ ja λ on keskittynyt A:lle (tätä ei käytetä kirjassa).
htll: $\lambda \ll \mu \iff \forall A \in \mathfrak{M}\ (\mu \ll A \Rightarrow \lambda \ll A)$.
htl: $\lambda \ll A_n\ \forall n \Rightarrow \lambda \ll \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
ht: $\exists A \subset \mathfrak{M}$ s.e. $\lambda \ll A \,\&\, \forall B \in \mathfrak{M}(\lambda \ll B \Rightarrow \mu(B) \ge \mu(A)$ (ts. on olemassa μ-minimaalinen A, jolle λ on keskittynyt, erityisesti $\lambda \perp \mu \iff \inf\{\mu(B) \mid \lambda \ll B\} = 0$ (htll)).
htll: Olkoon λ mitta $m|_{[0,1]}$. Osoita, että $\forall A\ (\lambda \ll A \Rightarrow \exists B \subsetneq A\ (\lambda \ll B))$. Siis tässä tapauksessa ei ole inkluusiominimaalista joukkoa, jolle λ olisi keskittynyt; sen sijaan on olemassa m-minimaalinen tällainen (esim. $A = [0,1]$).

[6.10] Kun λ on kompleksinen mitta, merkinnällä $L^p(\lambda)$ tarkoitetaan avaruutta $L^p(|\lambda|)$ ja λ:n täydellisyys (vast. säännöllisyys) tarkoittaa $|\lambda|$:n täydellisyyttä (vast. säännöllisyyttä); λ-nollajoukko tarkoittaa $|\lambda|$-nollajoukkoa, m.k.[λ] tarkoittaa m.k.[$|\lambda|$] jne. (käytännössä näin määritellyt ominaisuudet ovat hyödyllisempiä kuin λ:n mukaan määritellyt, sitä paitsi jälkimmäisissä olisi eräitä ongelmia).
Merkintöjä $d\lambda_a = h\, d\mu$ ja $h = d\lambda_a / d\mu$ kannattaa ajatella vain

lyhenteiksi kaavalle [6.10(2)].[12]

Lauseiden [6.16] ja [6.19] (erittäin tärkeitä) todistukset ovat hyödyllisiä, mutta niiden läpikäyminen ei ole välttämätöntä; muun tekstin [6.15–6.19] lukeminen kannattaa ehdottomasti.

[6.16]&[6.15] Tavallisimmilla X ja μ avaruuden $L^p(\mu)$:n duaali voidaan samaistaa (samaistaa Banach-avaruutena, sillä se on isometrisesti isomorfinen, siis Banach-isomorfinen) avaruuteen $L^q(\mu)$, kun $1 \le p < \infty$.

(htll: Jos $X \subset \mathbb{R}^k$ on Lebesgue-mitallinen, niin (X, m) on σ-äärellinen.) (Huom.: [Exe6.7]:ssä todetaan, että mitan σ-äärellisyys ei ole tarpeen, jos $1 < p < \infty$.)

Erityisesti $L^p(\mu)^{**} = L^q(\mu)^* = L^p(\mu)$, kun $1 < p < \infty$, eli $L^p(\mu)$ on *refleksiivinen* (oman duaalinsa duaali) (tarkemmin: ks. [R3]).

[6.19] Tässä todetaan vastaavasti, että $\mathcal{C}_0(X)$:n duaali voidaan samaistaa avaruuteen $M(X)$, kun X on lokaalisti kompakti Hausdorff-avaruus.

(ht: Jos $X \subset_o \mathbb{R}^k$ tai $X \subset_c \mathbb{R}^k$, niin X on lokaalisti kompakti Hausdorff-avaruus ($\mathbb{R}^k$:lta perityllä topologialla).)

7 Chapter Seven

Tärkeintä luvussa 7 ovat Lebesgue-pisteet, absoluuttinen jatkuvuus ja derivaatan integrointi.

Alussa esitetään muutamia teknisiä määritelmiä ja lemmoja. Heikko L^1 ja maksimaalifunktio Mf on hyvä painaa mieleen [7.5].

(htll) $\|Mf\|_\infty \le \|f\|_\infty$.

[7.6&7.7] $L^p_{loc}(\mathbb{R})$-funktion melkein kaikki pisteet ovat Lebesgue-pisteitä (ht) (vihje: $f\chi_{[n,n+1]} \in L^1(\mathbb{R})$)). Niissä siis $f(x)$ on raja-arvo keskiarvoistaan x-keskisillä palloilla [7.6]. Em. x-keskiset pallot voidaan korvata kuutioilla tai muillakin *nicely shrinking sets* [7.10].

(htll) Konstruoi $f \in L^1$ s.e. $0 \notin \mathrm{Leb}(f)$.

(htll) Funktion $f \in L^1$ (jopa L^1_{loc}) jatkuvuuspisteet ovat sen Lebesgue-pisteitä.

[7.11] Integraalin derivointi käy siis kivutta (tässä F' on todellinen derivaatta, ei pelkkä symmetrinen derivaatta (vm. on $|x|$:lläkin nollassa nolla, todellista derivaattaa $|x|$:llä ei ole)).

[7.12] Olkoon x origo ja E kolmio, jonka α:n kokoinen kulma on origossa ($X = \mathbb{R}^2$). Tällöin E:n metrinen tiheys x:ssä on selvästi $\alpha/2\pi$. Yllättävää on, että metrinen tiheys on olemassa (määritelty) m.k. (ja arvoltaan 0 tai 1 m.k.).

[7.14] Mitta $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^k)$ voidaan jakaa osiin $\mu_{\rm ac}$ ja $\mu_{\rm s}$ [6.10] kuten tässä. Joskus on tarpeen tietää, että $\mu_{\rm s}$ voidaan vielä jakaa diskreettiin osaan μ_3 (numeroituvalle joukolle keskittynyt mitta) ja "jatkuvaan singulaariseen osaan" μ_2 (jolla $\mu_2(\{x\}) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^k$) (esim. Cantorin funktio f [7.16b] (Georg Cantor, 1845–1918, äärettömien mahtavuuksien luoja)[13] määrää erään "jatkuvan singulaarisen mitan" yksikäsitteisesti relaation $\mu(]-\infty, x[) := f(x)$ kautta) [R2, 1. painos: 8.14b&8.20etc.].

[12] Tosin voidaan todistaa, että jos μ on positiivinen tai kompleksinen mitta, $g \in L^1(\mu)$ ja $d\lambda = g\,d\mu$ (ts. $\lambda(E) = \int_E g\,d\mu$ $\forall E \in \mathfrak{M}$) niin $\int_X |f|\,d|\lambda| = \int_X |fg|\,d|\mu|$ $\forall f \in \mathcal{L}(\mathfrak{M})$ ja $\int_X f\,d\lambda = \int_X fg\,d\mu$ $\forall f \in L^1(\lambda)$ (missä $\int_X f\,d\lambda$ voidaan määritellä integraaliksi $\int_X fh\,d|\lambda|$ (vrt. [6.12]) tai ekvalentisti ((htp)) $\int_X f\,d\lambda_1 - \int_X f\,d\lambda_2 + i\int_X f\,d\lambda_3 - i\int_X f\,d\lambda_4$). Lisäksi tällöin $\Re\lambda(E) = \int_E (\Re h)\,d|\lambda|$ $\forall E \in \mathfrak{M}$, $(\Re\lambda)^+(E) = \int_E (\Re h)^+\,d|\lambda|$ $\forall E \in \mathfrak{M}$ (ht) jne.

[13] Cantor havaitsi, että äärettömiä joukkoja on monia eri mahtavuuksia (numeroituvat, $2^{\mathbb{N}}$:n mahtavuuksiset (mm. $\mathbb{R}$), $2^{2^{\mathbb{N}}}$:n mahtavuuksiset, ...). Aikalaiset (mm. kirkko) eivät kuitenkaan olleet vielä valmiit ottamaan vastaan tällaista ääretöntä Jumalaa uhmaavaa tulosta, ja Cantor lopulta menetti järkensä.

[7.17] **Absoluuttinen jatkuvuus**: nyt päästiin asiaan. Tasaisessa jatkuvuudessa vaaditaan, että funktio ei millään δ:taa pienemmällä välillä hyppää ϵ:n verran. Absoluuttisessa jatkuvuudessa ollaan vielä tiukempia: ko. δ:aa pienemmän välin saa koostaa palasistakin ($[\alpha_i,\beta_i]$). $\mathrm{AC}(I)$:= absoluuttisesti jatkuvat $f : I \to \mathbb{R}$, $I := [a,b]$.

(htl) $\mathrm{AC}(I)$ on vektoriavaruus.

(ht) $f,g \in \mathrm{AC}(I) \implies fg \in \mathrm{AC}(I)$.

[7.19] Tässä määritellään funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (tai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tms.) kokonaisvariaatiofunktio $T_f(\cdot)$. f on *rajoitetusti heilahteleva* ($f \in \mathrm{BV}([a,b])$) joss $T_f(b) < \infty$. $\mathrm{AC}(I) \subset \mathrm{BV}(I)$ [7.19].

(htll) $\mathrm{AC}(I) \neq \mathrm{BV}(I)$. (Huom.: $\mathrm{AC}_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R})$, mutta $x \in \mathrm{AC}(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{BV}(\mathbb{R})$. [R2]:ssa tutkitaan lähinnä vain $\mathrm{AC}(I)$:tä.)

(htl) BV on vektoriavaruus.

[7.20] $f \in \mathrm{AC}(I)$ joss f on derivaattansa integraali ((ht), vrt. [7.13]). Huom.: $f \in \mathrm{AC} \implies \exists f'(x)$ m.k. [7.20] ja $\exists f'(x)\ \forall x \implies f \in \mathrm{AC}$ [7.21] (mutta $\exists f'(x)$ m.k. $\not\Longrightarrow f \in \mathrm{AC}$ [7.16b]).
(Tämä siis rajoitettujen välien yli (jos $f \in \mathrm{AC}(]a,b[)$, niin f:llä on toispuoliset raja-arvot reunapisteissä (myös kun $a = -\infty$ tai $b = \infty$) ja näin laajennettuna $f \in \mathrm{AC}([a,b])$); rajoittamattomilla I on tehtävä korvaus $\mathrm{AC} \mapsto \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}$, jotta yo. väitteet olisivat tosia (htl).)[14]

(htl) $f \in \mathrm{AC} \Rightarrow |f| \in \mathrm{AC} \not\Rightarrow f \in \mathrm{AC}$.

(htl) $f \in \mathrm{BV} \Rightarrow |f| \in \mathrm{BV} \not\Rightarrow f \in \mathrm{BV}$.

(htll) Jos $f : I \to \mathbb{R}$ on monotoninen, niin $f \in \mathcal{L}$.

(htll) Jos $f : I \to \mathbb{R}$ on monotoninen, niin $f \in \mathrm{BV}$.

(ht) Jos $f \in \mathrm{BV}$ on reaalinen, niin $\exists$ rajoitetut monotoniset funktiot g, h s.e. $f = g - h$. (Vihje: ks. [R2:7.19]:n tod.)

(htll) $\mathrm{BV} \subset \mathcal{L}$ (erityisesti BV ja AC ovat $\mathcal{L}$:n aliavaruuksia).

(htll) [R2:Exe7.10] (siis $f \in \mathrm{Lip}_1 \Rightarrow f \in \mathrm{AC}$ & $f' \in L^\infty$).

(htl) $\mathcal{C}^1(I) \subsetneq \mathrm{Lip}_1(I) \subsetneq \mathrm{AC}(I) \subsetneq \mathrm{BV}(I) \cap \mathcal{C}(I)$ (inkluusioiden aitous ei ole aivan helppoa todistaa (esim. [7.16b] todistaa viimeisen)).

Lue tehtävä [R2:Exe7.13] (laskeminen ei olisi helppoa) ja paina mieleesi tulevia opintoja varten, että tällainen tulos löytyy [R2]:sta.
Huom.: Jos I korvataan avoimella tai äärettömällä välillä, osa tuloksista säilyy, osa muuttuu. Samoin käy, jos em. funktioavaruuksiin liitetään alaliite $_{loc}$.

[7.22] Tässä määritellään $\mathbb{R}^k$-funktion derivaatta (eli gradientti eli Jakobin matriisi) kuten [R1]:ssä ja peruskursseilla (ja tämä Fréchet-derivaatta toimii yleisemminkin Banach$\to$Banach-funktioilla T [R3:10.34]). Kun vielä määritellään Jakobin matriisin determinantti $J_T(x)$, voidaan todistaa lause [7.26] eli integrointimuutujan vaihto. Muotoilu on aika sekava, joten paras tyytyä muistamaan, että se löytyy täältä, jos joskus tulee tarvetta. Todettakoon, että jos $T \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^k)$ on injektio, $V \subset\!\!\circ\, \mathbb{R}^k$ ja f on mitallinen, niin [7.26(1)]:ssä molemmat integrandit ovat mitallisia, ja jos lisäksi toinen niistä on $[0,\infty]$-arvoinen tai integroituva, niin toinenkin on ja molemmat puolet ovat samat (ts. kaava [7.26(1)] pätee). Sivulla 156 on helpompi erikoistapaus.

8 Chapter Eight

Huom.: [R2:Ch8]:ssa mitat ovat positiivisia samoin kuin muissakin luvuissa lukua 6 lukuunottamatta, ellei toisin sanota. Tässä luvussa lisäksi oletetaan mitat σ-äärellisiksi [2.16] (esim. m missä tahansa $\mathbb{R}^k$:n osajoukossa (htll)).

Kirjassa [R1] määriteltiin suoraan $\mathbb{R}^n$:n Lebesguen mitta. Tämä voidaan määritellä myös $\mathbb{R}^1$:n mitan avulla seuraavasti: Jos $(X, \mathfrak{M}_X, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{M}_Y, \lambda)$ ovat positiivisia σ-äärellisiä mitta-avaruuksia, niin joukon $A \times B \subset X \times Y$ mitaksi määritellään luonnollisesti $(\mu \times \lambda)(A \times B) :=$

[14] Huom.: Banach-arvoinen AC-funktio ei välttämättä ole missään derivoituva [Yosida] — tämä on eräs muutamasta harvasta asiasta, joissa [R2]:n teoria ei päde vektoriarvoisille funktioille (tosin refleksiivisissä avaruuksissa (esim. Hilbert-avaruudet) tätäkään ongelmaa ei ole).

$\mu(A) \times \lambda(B)$ ($A \in \mathfrak{M}_X,\ B \in \mathfrak{M}_Y$ eli $A \times B \in \mathfrak{M}_X \times \mathfrak{M}_Y$), ja pienimmästä tällaiset joukot (ts. $\mathfrak{M}_X \times \mathfrak{M}_Y$:n) sisältävästä σ-algebrasta [1.10&8.1] käytetään hämäävästi merkintää $\mathfrak{M}_X \times \mathfrak{M}_Y$ (parempi olisi esim. $\mathfrak{M}_{X\times Y}$). Lopulta mitta $\mu \times \lambda$ saadaan laajennettua (mittana) koko vm. σ-algebraan [8.7]. Esim. $\mathbb{R}^2$:n mitta $m_n = \overline{m_1 \times m_1}$ [8.11], missä yläviiva tarkoittaa täydellistämistä [1.36].

(htll) Jos $f(x,y) = g(y)\ \forall x,y$ ja $g \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_Y)$, niin $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_{X\times Y})$.

(htll) $(\mu \times \lambda)(A \times B) = \mu(A)\lambda(B)$ [8.7].

Näiden teknisten yksityiskohtien jälkeen esitetään tärkeä **Fubinin lause**: jos $f \in \mathcal{L}(\mu \times \lambda)$ on positiivinen (tai edes $[0,\infty]$-arvoinen) tai integroituva (ts. $|f| \in L^1(\mu \times \lambda)$, minkä tutkimisessa voidaan hyödyntää $|f|$:n positiivisuutta ja mitallisuutta [1.7b]), $\int_X \int_Y f\, d\lambda\, d\mu = \int_{X\times Y} f\, d(\lambda \times \mu) = \int_Y \int_X f\, d\mu\, d\lambda$.

Jos f ei ole $\mu \times \nu$-mitallinen ("tulomitallinen") mutta on $\overline{\mu \times \nu}$-mitallinen, sama pätee yhä [8.12] (esim. $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dA = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx\, dy$ (jos ehdot toteutuvat), kuten peruskurssilla opetettiin Riemannin integraalista).

(htll) Jos μ, λ ovat täydellisiä ja $(\mu \times \lambda)^*(N) = 0$, niin $\lambda(N_x) = 0$ m.k. x (joillain x ehkä $N_x \notin \mathfrak{M}_Y$). (Vihje: merkitse $h := \chi_N$ [R2:8.12Lemma2].)

(htll) Keksi $N \subset X \times Y$ (ja $(X, \mathfrak{M}_X, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{M}_Y, \lambda)$) s.e. $(\mu \times \lambda)^*(N) = 0$ ja jollain x on $N_x \notin \mathfrak{M}_Y$). (Erityisesti $N \in \mathfrak{M}^*_{X\times Y} \setminus \mathfrak{M}_{X\times Y}$ [R2:8.6].)

(htl) Jos μ, λ ovat täydellisiä ja $E \in (\mathfrak{M}_{X\times Y})^*$, niin $E_x \in \mathfrak{M}_X$ m.k. x & $\lambda(E_x) \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_X)$ & $(\mu \times \lambda)^*(E) = \int_X \lambda(E_x)\, d\mu(x)$. ($Y$ vast.). (Vihje: $E = Q \uplus N$, missä $Q \uplus \mathfrak{M}_{X\times Y}$..., ks. myös ed. teht. ja [R2:8.12Lemma2])

(htll) Jos $f(x,y) = g(y)\ \forall x,y$ ja $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$, niin $f \in \mathcal{C}(X \times Y, Z)$. ($X \times Y$ varustetaan tulotopologialla eli heikoimmalla topologialla, joka sisältää joukot $U \times V$, missä $U \subset_{\circ} X$ & $V \subset_{\circ} Y$. Tämä on sama kuin kaikkien em. joukot omistavien topologioiden leikkaus (htll). Esim. $\mathbb{R}^2$:n topologia saadaan näin $\mathbb{R}$:n topologiasta (htl).)

Konvoluutiot [8.14]: tulevan matematiikan opiskelun varalta on hyvä tietää, että $T \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^k))$ ja $\|Tg\|_p = \|f\|_1 \|g\|_p$, kun $T : g \mapsto f * g$ ja $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ (tai edes $f \in M(\mathbb{R}^k)$, vrt. [teht. 10.6 / syksy 1994]), erityisesti $(f * g)(x)$:n määräävä integraali suppenee (absoluuttisesti) m.k. $x \in \mathbb{R}^k$ [Exe8.4] tai [M:D.1.7]. Sama pätee myös kun $L^p(\mathbb{R}^k)$ korvataan $L^p(\mathbb{R}^k, B)$:llä (missä B on Banach- tai edes Fréchet-avaruus tms. (esim. $B = \mathbb{C}$)) $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^k, B)$:llä, $W^{k,p}(\mathbb{R}^k, B)$:llä, $\mathcal{C}^n_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^k, B)$:llä, $\mathcal{C}^n_0(\mathbb{R}^k, B)$:llä, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k, B)$:llä tms.; myös $f \in L^1(\mathbb{R}^k, \mathcal{L}(B, B_2))$ voidaan sallia etc. Tarkemmin: ks. [M:D.1.7] etc.

Konvoluutioiden eräs etu on se, että Laplace- ja Fourier-muunnokset muuntavat ne tuloiksi [9.2c]. Lisäksi funktiolla $f * g$ on yleensä yhtä paljon jatkuvuutta ja derivoituvuutta kuin f:llä ja g:llä yhteensä (ks. myös: [R3:6.30]).

[8.15&8.16] Jakaumafunktio (*distribution function*) on tärkeä työkalu mm. harmonisessa analyysissä ja eräissä interpolaatiolauseissa. Riittänee, että muistat, että tällainenkin on olemassa ja löytyy [R2]:sta.

Seuraavaa et tarvitse tässä kurssissa, mutta paina mieleesi, että se löytyy täältä:

Minkovskin integraaliepäyhtälö [Exe8.16] tai [M:B.4.16]: Olkoon $1 \le p \le \infty$ ja $f \in \mathcal{L}(X \times Y; [0,\infty])$. Tällöin $\| \int_X f \|_{L^p(Y)} \le \int_X \|f\|_{L^p(Y)} \le \infty$ (ts. $\| \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \|_{L^p(Y)} \le \int_X \|f(x,y)\|_{L^p(Y)}\, d\mu(x) \le \infty$).
Olkoon $1 \le p \le \infty$ ja $f \in \mathcal{L}(X \times Y)$. Jos $\int_X \|f\|_{L^p(Y)} < \infty$, niin $\exists \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ m.k. x ja $\| \int_X f \|_{L^p(Y)} \le \int_X \|f\|_{L^p(Y)}$ [M:B.4.16].

9 Chapters 9–20

Kirjan loppuosa vastaa suunnilleen kurssia Mat-1.151 Kompleksianalyysi. Vuonna 1998 kurssin oppikirjaksi kuitenkin vaihdettiin Robert E. Greene – Steven G. Krantz: "Function theory of one complex variable", Wiley, 1997. Joitain pääasioita on esitetty tiiviisti [M]:n liite D:ssä.

Kirjan luku 9 esittelee Fourier-muunnoksen (hieman epästandardin, joskin samat tulokset standardimmalle saa skaalaamalla näitä tuloksia, ominaisuudet ovat siis samat). Loppuosassa (luvut 10-20) käsitellään lähinnä holomorfisia (eli analyyttisiä) funktioita. Loppuosa on vaikeaselkoinen oppikirjaksi, parempi käsikirjaksi. (Siis kannattaa ensin kerrata funktioteoria peruskurssien oppikirjoista ja sitten silmäillä 9–20 läpi ja tarvittaessa opiskella joitain yksityiskohtia tarkemmin, ellei aio suorittaa em. kurssia.) Alla on silti muutama poiminta loppuosasta (ei siis kuulu kurssiin Mat-1.150 Reaalianalyysi).

[10.17] Moreran lauseen avulla todistetaan mm. funktion Laplace-muunnos holomorfiseksi. Lause voidaan myös todistaa muodossa "kaikki koordinaattiakselien suuntaiset suorakulmiot".

[Ch11] Harmoniset funktiot & H^p-funktiot, ks. mieluummin esim. [Garnett: Bounded Analytic Functions].

[13.7] Holomorfisia funktioita voidaan yleensä approksimoida polynomeilla [13.7] ja vieläkin useammin rationaalifunktioilla [13.9]. Ks. myös [20.5].

[13.11] Yhdesti yhtenäisillä alueilla holomorfisella funktiolla on holomorfinen logaritmi ja juuret, lisäksi sen suljetut integraalit ovat nollia.

[14.7] Olkoon $\Omega_1 \subset\!\!\circ\, \mathbb{C}$ yhtenäinen. $\phi : \Omega_1 \to \phi[\Omega_1]$ on konformikuvaus joss $\phi \in H(\Omega_1)$ ja ϕ on injektio [10.33] joss ϕ säilyttää käyrien leikkauskulmien suuruuden [Bruce Palka:IX]. Konformikuvaus on aina homeomorfismi, peräti $\phi, \phi^{-1} \in H$ [10.33].

Riemannin kuvauslause [14.8] sanoo, että jos $\Omega_1, \Omega_2 \subset\!\!\circ\, \mathbb{C}$ ovat yhdesti yhtenäisiä ja $\Omega_1 \neq \mathbb{C} \neq \Omega_2$, niin on olemassa konformikuvaus $\phi \in H(\Omega_1)$ s.e. $\phi[\Omega_1] = \Omega_2$. Niinpä Ω_1-ongelmat voidaan usein redusoida yksikköympyrään (ja vaikkapa soveltaa Schwartzin lemmaa). $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$

[15.21] On hyvä muistaa, että Blaschken tulot löytyvät täältä, mutta tämä on kyllä aika sekava esitys. Lue, jos on pakko.

[Ch16] Analytic continuation: tässä yritetään kasvattaa analyyttistä funktiota $f \in H(\Omega)$ määrittelyjoukkoaan laajempaan joukkoon.

[Ch17] Aliharmoniset funktiot ja H^p-avaruudet: H^p-avaruudet määritellään yksikköympyrässä, mutta ne voidaan yhtä hyvin määritellä joukossa $\mathbb{C}_+ := \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ tai joukossa $i\mathbb{C}_+$ (ylempi puolitaso). $H^p(U)$ on hyödyllinen tutkittaessa Z-muunnosta, jälkimmäiset avaruudet tutkittaessa Laplace-muunnosta [Garnett] [Hille–Phillips]. Huom.: H^p-funktiot ovat reunafunktioidensa integraaleja [H–P].

[17.14] Sisäfunktiot ja ulkofunktiot löytyvät täältä. Esitys on aika sekava.

[Ch18] Algebroilla $\mathcal{L}(B)$, $\mathcal{C}_b(X)$, $M(\mathbb{R}^k)$ [Exe8.5g] jne. on paljon yhteisiä piirteitä. Kaikkia tämäntapaisia sanotaan Banach-algebroiksi ja niille on luvussa [R2:Ch18] (laajemmin: [R3:Ch10]) johdettu spektraaliteoriaa ja muuta yhteistä teoriaa (esim. geometrinen sarja $\|x\| < 1 \implies \exists (I-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$). Huom.: $\mathcal{C}_b(X)$ ja $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^k)$ ovat kommutatiivisia, $\mathcal{L}(B)$ ei (ellei $\dim B \leq 1$) ((htl)).

[Ch19] Tässä tutkitaan mm. L^2-funktioiden Laplace-muunnoksia ja esitetään tärkeä Paleyn–Wienerin lause.

Kalle Mikkola
kalle.mikkola@hut.fi