MS-C2111

STOKASTISET PROSESSIT

syksy 2016

Luennot: ti 10-12, sali U4
pe 10-12, sali U4

Luennoitsija: Kalle Kytölä

Vastaanotto: pe 14-15, toimisto Y241

Pääassistentti: Alex Karrila
(alex.karrila@aalto.fi)

Harjoitukset: 2×2 h /vko, 3 ryhmää, assistentteina Armando Gutierrez, Alex Karrila, Antti Pöllänen

Kurssin suorittaminen: Kirjallinen tentti

Lukuvuoden 2016-2017 tenttipäivät:

ma 24.10.2016 klo 13:00 - 16:00
to 19.1.2017 klo 16:30 - 19:30

Tentissä 4 tehtävää à 6 pistettä.

Harjoitustehtäviä ratkaisemalla ja harjoituksiin osallistumalla voi ansaita enintään 6 hyvityspistettä, joilla voi korvata tentissä huonoimmin sujuneen tehtävän. Syksyn 2016 harjoituspisteet ovat voimassa yllä mainituissa kahdessa tentissä.

mycourses.aalto.fi/course/view.php?id=14453

STOKASTISISTA PROSESSEISTA YLEISESTI

Stokastisella prosessilla tarkoitetaan periaatteessa mitä tahansa ajassa etenevää satunnaisilmiötä. Näin yleiselle asialle ei ole mielekästä antaa tarkkaa määritelmää tai pyrkiä kehittämään matemaattista teoriaa, vaan rajoitumme aina kerrallaan yhteen luokkaan satunnaisprosesseja, joka on samalla sekä riittävän yleinen että sillä tavoin rajattu, että voimme johtaa hyödyllisiä tuloksia matemaattisesti.

Joka tapauksessa, ajassa etenevää satunnaisprosessia voidaan ajatella seuraavin tavoin:

- Prosessi $X = (X_t)_{t \in T}$ on aikaparametrilla t indeksoitu kokoelma satunnaismuuttujia.

X_t = prosessin (satunnainen) tila ajanhetkellä t

T = prosessin mahdollisten ajanhetkien joukko

esim. $T = \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ "diskreetti aika"

tai $T = \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ "jatkuva aika"

Tarkemmin, jos S on prosessin mahdollisten tilojen joukko, on kukin X_t S-arvoinen satunnaismuuttuja

$$X_t : \Omega \to S.$$

Perusjoukolla Ω on todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$, joka siis määrää hetkittäisten arvojen X_t yhteisjakauman.

- Toinen, usein matemaattisesti hyödyllinen tapa ajatella prosessia on tarkastella prosessin polkuja

$$t \longmapsto X_t \quad ,$$

jotka siis ovat satunnaisia ajan funktioita $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{S}$. Prosessi voidaan näin "kollektiivisesti" ymmärtää yhtenä satunnaisena funktiona

$$X : \Omega \longrightarrow \{\text{funktiot } \mathbb{T} \to \mathbb{S}\} ,$$

jonka jakauman todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ määrää.

Joitakin esimerkkejä

- Veden pinnalla poukkoilevan siitepölyhiukkasen paikka ajanhetkellä t on satunnainen tason vektori

$$X_t \in \mathbb{R}^2 , \qquad t \in \mathbb{R} .$$

- Tietyn yksilön jälkeläisten lukumäärä sukupolvessa t on satunnainen kokonaisluku

$$X_t \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\} , \qquad t \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\} .$$

- Pankissa jonottavien asiakkaiden lukumäärä ajanhetkellä t pankin aukioloaikaan klo 9:00 - 17:00 on satunnainen kokonaisluku

$$X_t \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\} , \qquad t \in [9, 17] .$$

- Vuorokauden t säätilan tyyppi Otaniemessä

$$X_t \in \{\text{"aurinkoista"}, \text{"pilvistä"}, \text{"sateista"}, \text{"vappu"}\}$$

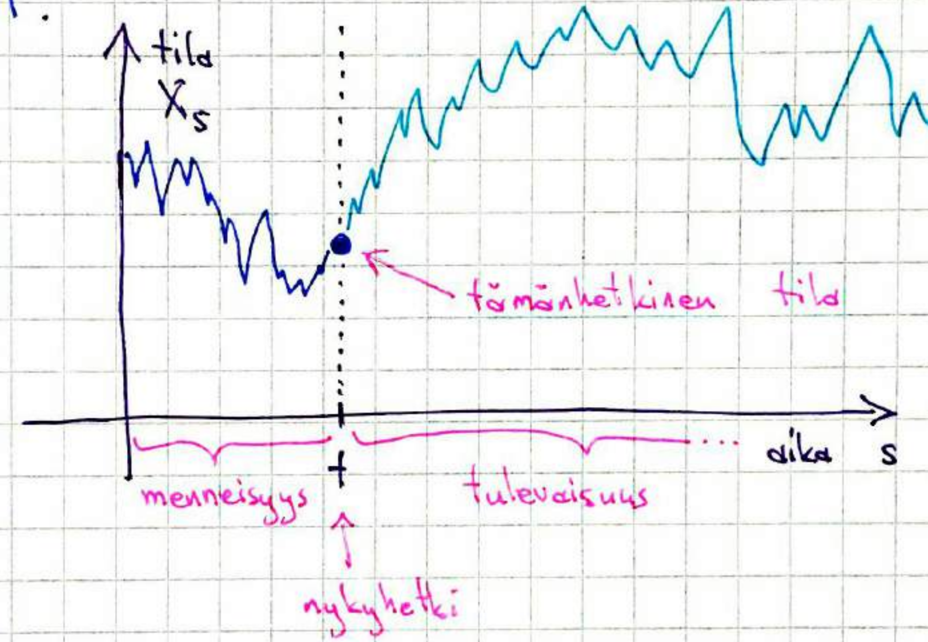
$$t \in \mathbb{Z}$$

- Nokian osakkeen kurssi euroissa ajanhetkellä t

$$X_t \in [0, \infty) , \qquad t \in \mathbb{R} .$$

Menneisyys, nykyhetki ja tulevaisuus

Ajassa eteneminen on kaikille stokastisille prosesseille yhteinen piirre. Usein sovelluksia varten on mielekästä tarkastella tiettyä ajanhetkeä t, joka tulkitaan "nykyhetkeksi", ja ajatella prosessin "menneisyys" eli arvot X_s, $s \le t$, tunnetuiksi. Kiinnostavat kysymykset koskevat silloin tyypillisesti "tulevaisuutta" eli arvoja X_s, $s > t$.



Kun menneisyyttä pidetään tunnettuna, tarkastellaan ehdollisia todennäköisyyksiä

$$\mathbb{P}\left[\begin{array}{l}\text{tulevaisuutta}\\ \text{koskeva}\\ \text{tapahtuma}\end{array} \;\middle|\; \underbrace{X_s,\ s \le t}_{\text{tietomme menneisyydestä ja nykytilasta}}\right]$$

kiinnostuksemme kohde.

Erityisesti usein kiinnostavaa on ymmärtää prosessin tulevaisuutta pitkällä tähtäimellä eli kun $s \to \infty$.

ÄÄRELLISTILAISET MARKOV-KETJUT

Ensimmäinen tällä kurssilla käsiteltävä stokastisten prosessien luokka on äärellistilaiset Markov-ketjut. Näiden määrittelevät ominaisuudet ovat

- äärellinen tilajoukko S
- diskreetti aika $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$

  (Toisinaan myös vaikkapa $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ tai $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T-1, T\}$, jolloin alla olevaan tehtäisiin ilmeisiä muutoksia.)
- Markov-ominaisuus:

  Kun $t \in \mathbb{Z}_+$, ja $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{t-1} \in S$ merkitään menneisyyttä koskevaa tapahtumaa

  $$H_{t-} := \{ X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1} \}.$$

  Kun $x, y \in S$ oletamme ehdollisesta tn:stä

  $$\mathbb{P}\left[X_{t+1} = y \mid H_{t-}, X_t = x \right] = p_{x,y}$$

  Huom.! Oletuksen mukaan tämä todennäköisyys ei riipu ajanhetkestä t (homogeenisuus) eikä historiasta H_{t-}, vaan ainoastaan nykytilasta x ja mahdollisesta seuraavasta tilasta y.

(Trivialiteettien välttämiseksi ylläoleva vaaditaan vain silloin kun $\mathbb{P}[H_{t-}, X_t = x] > 0$, jolloin ehdollinen todennäköisyys on määritelty.)

Tulkinta: Markov-ketjun (satunnainen) tulevaisuus riippuu (tunnetusta) menneisyydestä vain nykytilan välityksellä!

Siirtymätodennäköisyydet ja siirtymäkaavio

Lukuja $p_{x,y}$ sanotaan Markov-ketjun siirtymätodennäköisyyksiksi. Näille todennäköisyyksille täytyy selvästi olla voimassa

$$\begin{cases} p_{x,y} \geq 0 & \forall x,y \in S \\ \sum_{y \in S} p_{x,y} = 1 & \forall x \in S, \end{cases}$$

eli kiinnitetyllä $x \in S$, funktio $y \mapsto p_{x,y}$ on pistetodennäköisyysfunktio (=pistemassafunktio).

Markov-ketjun rakennetta voidaan havainnollistaa merkitsemällä $x \to y$ kun $p_{x,y} > 0$.

Vastaava siirtymäkaavio on suunnattu verkko, jonka solmut ovat ketjun tilat ($x \in S$) ja linkit ovat suunnatut solmuparit $x \to y$.

Siirtymämatriisi

Siirtymätn:t $p_{x,y}$ on indeksoitu tilapareilla $(x,y) \in S \times S$. Niiden kokoelma $P = (p_{x,y})_{x,y \in S}$ voidaan siis ymmärtää neliömatriisina, jonka rivit ja sarakkeet on indeksoitu (äärellisellä) tilajoukolla S. Tämä ei ole vain turhaa käsitejumppaa, vaan pian myös näemme miten matriisien laskutoimituksilla ja ominaisuuksilla voimme selvittää prosessin käyttäytymistä.

Kutsumme P:tä Markov-ketjun siirtymämatriisiksi tai siirtymätodennäköisyysmatriisiksi.

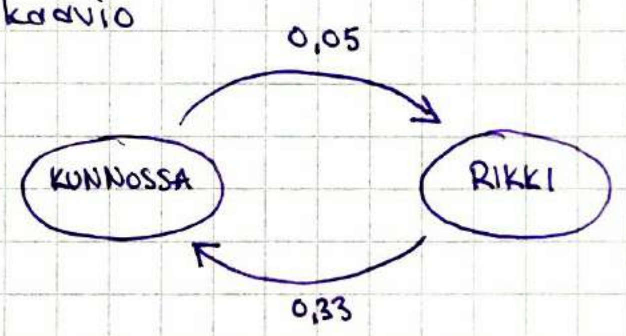
Esimerkkejä

1. Työmatkapyöräilijä:

Kunakin työpäivänä pyörä voi olla kunnossa tai rikki. Oletetaan, että kunnossa oleva pyörä menee rikki todennäköisyydellä 5 % ja rikkinäinen pyörä saadaan korjattua todennäköisyydellä 33 % päivän aikana. Tätä mallintaa Markov-ketju, jonka tilajoukko on

$$S = \{\text{"KUNNOSSA"}, \text{"RIKKI"}\},$$

siirtymäkaavio



ja siirtymämatriisi

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{bmatrix}.$$

2. Varastonhallinta (Esim. 2.2 Lasse Leskelän monisteessa)

Yritys myy tietokoneita. Viikon t alussa varastossa on X_t kappaletta tietokoneita ja tietokoneiden kysyntä D_t viikon t aikana noudattaa Poisson-jakaumaa odotusarvolla 3, riippumattomasti eri viikoilla. Viikon lopuksi henkilökunta tarkastaa jäljellä olevien koneiden lukumäärän, ja jos jäljellä on alle kaksi konetta, tilataan uusia koneita niin, että seuraavan viikon alussa varastossa on viisi konetta.

Muistutus: $D \sim \text{Poisson}(\lambda)$ tarkoittaa

$$\mathbb{P}[D=k] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall k = 0,1,2,\dots$$

jolloin helposti lasketaan $\mathbb{E}[D] = \lambda$.

Apulaskuja: Koska $D_t \sim \text{Poisson}(3)$, saadaan

$$\mathbb{P}[D_t = 0] = e^{-3} \approx 0{,}0498$$

$$\mathbb{P}[D_t = 1] = 3 \cdot e^{-3} \approx 0{,}1494$$

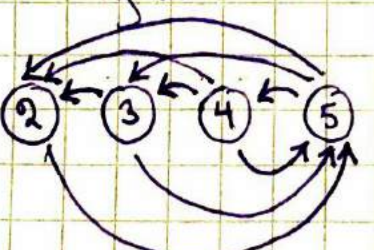
$$\mathbb{P}[D_t = 2] = \frac{9}{2} e^{-3} \approx 0{,}2240$$

$$\mathbb{P}[D_t = 3] = \frac{27}{6} e^{-3} \approx 0{,}2240$$

$$\mathbb{P}[D_t \geq 4] = 1 - e^{-3} - 3e^{-3} - \frac{9}{2}e^{-3} - \frac{27}{6}e^{-3} \approx 0{,}3528$$

Tilajoukko $S = \{2,3,4,5\}$ (mahdolliset varastossa olevien koneiden määrät)

Siirtymäkaavio



Siirtymämatriisi

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}0498 & 0 & 0 & 0{,}9502 \\ 0{,}1494 & 0{,}0498 & 0 & 0{,}8008 \\ 0{,}2240 & 0{,}1494 & 0{,}0498 & 0{,}5768 \\ 0{,}2240 & 0{,}2240 & 0{,}1494 & 0{,}4026 \end{bmatrix}$$

3. www-sivujen PageRank pisteytys

Miten Google järjestää hakutulokset "relevanssijärjestykseen"?

Taustalla on Markov-ketjuun perustuva PageRank-algoritmi.

Tarkastellaan suunnattua verkkoa, jonka äärellinen solmujoukko on kaikkien maailman www-sivujen joukko S, ja linkkeinä sivujen väliset hyperlinkit. Merkitään

$$G = (g_{x,y})_{x,y \in S} \quad \text{missä}$$

(nk. verkon naapuruusmatriisi)

$$g_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \to y \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Määritellään $P = (p_{x,y})_{x,y \in S}$ kaavalla

$$p_{x,y} = c \cdot \frac{1}{n} + (1-c) \cdot \frac{g_{x,y}}{\sum_{y' \in S} g_{x,y'}}$$

missä $c \in [0,1]$ on parametri ja

$n = \# S$ on www-sivujen lukumäärä.

(Tarkkaan ottaen määritelmä $p_{x,y}$:lle olettaa, että $\sum_{y' \in S} g_{x,y'} > 0$ eli että sivulta x lähtee ainakin yksi linkki. Rajoitutaan tälläiseen osajoukkoon S kaikista www-sivuista.)

Sivun x PageRank $\pi(x)$ on todennäköisyys, että siirtymämatriisin $P = (p_{x,y})_{x,y \in S}$ mukaisesti umpimähkään linkkejä klikkaileva satunnais-surffailija pitkän ajan $(t \to \infty)$ kuluttua löytyy juuri sivulta x.

Harjoitustehtävä: Tarkista, että yllä määritelty P tosiaan on siirtymämatriisi: $p_{x,y} \geq 0$ ja $\sum_y p_{x,y} = 1$.

Hetkittäiset tilajakaumat

Markov-ketjun tila ajanhetkellä t on S-arvoinen satunnaismuuttaja, jonka jakaumaa μ_t sanotaan tilajakaumaksi ajanhetkellä t:

$$\mu_t(x) := \mathbb{P}[X_t = x] \,, \qquad x \in S.$$

Ajanhetken $t=0$ tilajakaumaa μ_0 kutsutaan Markov-ketjun alkujakaumaksi tai lähtöjakaumaksi.

Kokonaistodennäköisyyden kaavasta voidaan ajanhetken $t+1$ tilajakauma laskea seuraavasti:

$$\mathbb{P}[X_{t+1} = y] = \sum_{x \in S} \mathbb{P}[X_t = x] \cdot \mathbb{P}[X_{t+1} = y \,|\, X_t = x]$$

eli

$$\boxed{\mu_{t+1}(y) = \sum_{x \in S} \mu_t(x) \cdot P_{x,y}} \,.$$

Tulkitsemalla tilajakaumat μ_t ja μ_{t+1} tilajoukon S indeksoimina vaakavektoreina, voidaan ylläoleva kirjoittaa lyhyesti matriisimuodossa

$$\boxed{\mu_{t+1} = \mu_t P} \,.$$

← vaakavektorin μ_t kertominen oikealta matriisilla P

Tästä havainnosta päätellään tärkeä perustulos.

Lause 2.4: Markov-ketjun tilajakauma μ_t ajanhetkellä $t \in \mathbb{Z}_+$ saadaan laskettua alkujakaumasta μ_0 kaavalla

$$\mu_t = \mu_0 P^t \,,$$

missä P^t on siirtymämatriisin P t:s potenssi.

Todistus: Väite on selvästi tosi kun $t=0$, koska $P^0 = I$ on yksikkömatriisi. Mikäli $\mu_t = \mu_0 P^t$ jollakin $t \in \mathbb{Z}_+$, niin edellä havaitun perusteella

$$\mu_{t+1} = \mu_t P = (\mu_0 P^t) P = \mu_0 P^{t+1},$$

missä käytimme matriisikertolaskun liitännäisyyttä. Väite seuraa nyt induktiolla t:n suhteen. $\square$

Esim. 1. Oletetaan, että Esimerkin 1 työmatkapyöräilijän pyörä on kunnossa ajanhetkellä $t=0$: $\mathbb{P}[X_0 = \text{"KUNNOSSA"}] = 1$ ja $\mathbb{P}[X_0 = \text{"RIKKI"}] = 0$.

Alkujakauma on siis vaakavektori

$$\mu_0 = [1 \quad 0].$$

Seuraavana päivänä pyörän satunnaista tilaa kuvaa jakauma

$$\mu_1 = \mu_0 P = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{bmatrix} = [0{,}95 \quad 0{,}05]$$

eli $\mathbb{P}[X_1 = \text{"KUNNOSSA"}] = 0{,}95$.

Kahden päivän kuluttua pyörän tilan jakauma on

$$\mu_2 = \mu_0 P^2 = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{bmatrix}^2$$

$$= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0{,}95^2 + 0{,}05 \cdot 0{,}33 & 0{,}95 \cdot 0{,}05 + 0{,}05 \cdot 0{,}67 \\ 0{,}33 \cdot 0{,}95 + 0{,}67 \cdot 0{,}33 & 0{,}33 \cdot 0{,}05 + 0{,}67^2 \end{bmatrix}$$

$$\approx [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0{,}9190 & 0{,}0810 \\ 0{,}5346 & 0{,}4654 \end{bmatrix} \approx [0{,}9190 \quad 0{,}0810]$$

eli $\mathbb{P}[X_2 = \text{"KUNNOSSA"}] \approx 0{,}92$.

Huom. Pieniä matriiseja ja vektoreita voi muutamia kertoja kertoa käsin, mutta pian avuksi kannattaa ottaa esim. R, MatLab, Mathematica tai muu ohjelmisto.

Jatkamme äärellistilaisten Markov-ketjujen käsittelyä.
Palautetaan mieliin seuraavat merkinnät ja käsitteet:

- Markov-ketju $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$
- $X_t \in S$ prosessin satunnainen tila ajanhetkellä $t \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- S äärellinen joukko mahdollisia tiloja
- $p_{x,y} = \mathbb{P}[X_{t+1} = y \mid X_t = x]$ siirtymätodennäköisyys
- $P = (p_{x,y})_{x,y \in S}$ siirtymämatriisi
- μ_t tilajakauma hetkellä t: $\mu_t(x) = \mathbb{P}[X_t = x]$
- $\mu_{t+1} = \mu_t P$ ja alkujakauman μ_0 avulla voidaan kirjoittaa $\mu_t = \mu_0 P^t$.

Lämmitellään vielä todistamalla yksi helppo mutta tärkeä perustulos.

Lause 2.6: Todennäköisyys sille, että Markov-ketju siirtyy t:ssä aika-askeleessa tilasta x tilaan y saadan siirtymämatriisin P avulla kaavasta

$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_0 = x] = (P^t)_{x,y},$$

missä $(P^t)_{x,y}$ on matriisin P t:nnen potenssin rivillä x ja sarakkeessa y oleva alkio.

<u>Todistus:</u> Kun $t=0$, on $\mathbb{P}^0 = I$ yksikkömatriisi, ja tosiaan $\mathbb{P}[X_0=y \mid X_0=x] = I_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{jos } x=y \\ 0 & \text{jos } x \neq y \end{cases}$.

Jos $t \in \mathbb{Z}_+$ on sellainen, että väite

$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_0 = x] = (P^t)_{x,y}$$

pätee, niin ajanhetkeä $t+1$ varten voidaan laskea

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_{t+1} = z \mid X_0 = x] \\
&= \sum_{y \in S} \mathbb{P}[X_t = y \mid X_0 = x] \cdot \mathbb{P}[X_{t+1} = z \mid X_t = y, X_0 = x] \\
&= \sum_{y \in S} (P^t)_{x,y} \cdot P_{y,z} = (P^{t+1})_{x,z} .
\end{aligned}$$

Väite seuraa näin induktiolla t:n suhteen. $\square$

<u>Huom:</u> Ylläolevassa väitteessä tarkasteltiin siirtymiä ajanhetkestä 0 ajanhetkeen t.
Perustele, miksi siirtymät mielivaltaisesta ajanhetkestä $s \in \mathbb{Z}_+$ ajanhetkeen $s+t$ tapahtuvat samoilla todennäköisyyksillä eli

$$\mathbb{P}[X_{s+t} = y \mid X_s = x] = (P^t)_{x,y} .$$

<u>Tilojen esiintyvyys</u>

Yllä johdetuilla työkaluilla pystymme nyt helposti vastaamaan esimerkiksi seuraavaa muotoa oleviin kysymykseen:

Kuinka monesti annettu tila $y \in S$ odotusarvoisesti esiintyy ajanhetkeen t mennessä ?

Tilan y esiintyvyys ajanhetkeen t mennessä on satunnaismuuttuja

$$N_t(y) = \sum_{s=0}^{t} \mathbb{1}_{\{X_s = y\}},$$

missä käytimme notaatiota $\mathbb{1}_A$ tapahtuman A indikaattorisatunnaismuuttujalle

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & , \text{ jos tapahtuma } A \text{ sattuu} \\ 0 & , \text{ muuten} \end{cases}.$$

Tilan y odotusarvoinen esiintyvyys tilasta x lähtien ajanhetkeen t mennessä on vastaava (ehdollinen) odotusarvo

$$M_t(x,y) := \mathbb{E}\left[N_t(y) \mid X_0 = x\right].$$

Koska indikaattorisatunnaismuuttujan odotusarvo on vain vastaavan tapahtuman todennäköisyys

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}[A]$$

ja odotusarvo on lineaarinen, voimme laskea

$$\begin{aligned} M_t(x,y) &= \mathbb{E}\Big[\sum_{s=0}^{t} \mathbb{1}_{\{X_s = y\}} \;\Big|\; X_0 = x\Big] \\ &= \sum_{s=0}^{t} \mathbb{P}\left[X_s = y \mid X_0 = x\right] = \sum_{s=0}^{t} (P^s)_{x,y}. \end{aligned}$$

Jos odotusarvoiset esiintymiset ajanhetkeen t mennessä kootaan tilajoukolla S indeksöidyksi neliömatriisiksi M_t, n.k. esiintyvyysmatriisiksi, niin ylläolevasta saamme:

Lause 2.8: Markov-ketjun esiintyvyysmatriisi M_t saadaan laskettua siirtymämatriisista P kaavalla $M_t = \mathbb{1} + P + P^2 + \dots + P^t = \sum_{s=0}^{t} P^s$.

Esimerkki (Työmatkapyöräilijä) $\quad P = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{bmatrix}$

Tarkastellaan työmatkapyöräilijämme pyörän odotettua kuntoa viisipäiväisen työviikon aikana (ajanhetkillä $t = 0, 1, 2, 3, 4$). Lasketaan

$$M_4 = \underset{\text{ma}}{1} + \underset{\text{ti}}{P} + \underset{\text{ke}}{P^2} + \underset{\text{to}}{P^3} + \underset{\text{pe}}{P^4} \approx \begin{bmatrix} 4{,}657 & 0{,}343 \\ 2{,}266 & 2{,}733 \end{bmatrix}.$$

X_0 = KUNNOSSA

Esimerkiksi, jos pyörä oli viikon alussa KUNNOSSA, on se viikolla odotusarvoisesti RIKKI $0{,}343$ työpäivänä. Jos taas pyörä oli viikon alussa RIKKI, se on yhteensä odotusarvoisesti rikki $2{,}733$ työpäivänä.

M_4(KUN, RIK)

X_0 = RIKKI $\qquad M_4$(RIKKI, RIKKI)

MARKOV-KETJUT PITKÄLLÄ AIKAVÄLILLÄ

Usein olemme kiinnostuneita Markov-ketjun käyttäytymisestä "pitkässä juoksussa". Silloin on luontevaa kysyä:

1. Onko ketjun hetkittäisillä tilajakaumilla μ_t rajajakaumaa kun $t \to \infty$?

2. Jos rajajakauma on olemassa, riippuuko se alkutilasta X_0?

3. Jos rajajakauma on olemassa, miten se voidaan laskea?

Aloitamme kolmannesta kysymyksestä, koska se on helpoin.

Tasapainojakauma

Tilajoukon S todennäköisyysjakauma $\pi = (\pi(x))_{x \in S}$ on Markov-ketjun tasapainojakauma, jos

$$\forall y \in S : \quad \boxed{\pi(y) = \sum_{x \in S} \pi(x)\, p_{x,y}}$$

eli matriisimuodossa

$$\boxed{\pi = \pi P}\ .$$

Tulkinta: Jos Markov-ketju käynnistyy satunnaisesta, jakaumaa π noudattavasta tilasta, eli $\mu_0 = \pi$, niin tilajakauma on edelleen π millä tahansa ajanhetkellä t:

$$\mu_t = \mu_0 P^t = \pi P^t = \pi P P^{t-1} = \pi P^{t-1}$$
$$= \dots = \pi P = \pi .$$

Huom:

- Yhtälö $\pi P = \pi$ sanoo, että tasapainojakauma π on siirtymämatriisin P vasemmanpuoleinen ominaisvektori ominaisarvolla 1.
- Tasapainojakauma saadaan laskettua ratkaisemalla lineaarinen yhtälöryhmä $\pi P = \pi$ (ratkaisujen olemassaoloon ja yksikäsitteisyyteen palataan pian, ja huomautetaan lisäksi, että tasapainojakaumaksi kelpaavalta ratkaisulta π tulee lisäksi vaatia $\pi(x) \geq 0 \ \forall x \in S$ ja $\sum_{x \in S} \pi(x) = 1$).

Seuraava tulos sanoo, että rajajakauma on välttämättä tasapainojakauma, joten erityisesti se voidaan laskea ratkaisemalla yo. lineaarinen yhtälöryhmä.

<u>Lause 3.1.</u> Jos äärellistilaisen Markov-ketjun hetkittäisillä tilajakaumilla μ_t on raja

$$\pi = \lim_{t\to\infty} \mu_t ,$$

niin π on myös tasapainojakauma.

Todistus: Oletetaan $\pi = \lim_{t\to\infty} \mu_t = \lim_{t\to\infty} \mu_0 P^t$, ja näytetään, että tällöin π toteuttaa tasapainoyhtälöt $\pi = \pi P$ ja on lisäksi joukon S todennäköisyysjakauma. Lausumalla hetken $t+1$ tilajakauma hetken t avulla

$$\mu_{t+1}(y) = \sum_{x\in S} \mu_t(x)\, p_{x,y}$$

ja ottamalla molemmilla puolilla raja $t\to\infty$ saadaan

$$\pi(y) = \sum_{x\in S} \pi(x)\, p_{x,y} ,$$

eli tasapainoyhtälöt $\pi = \pi P$ ovat voimassa.

Koska $\mu_t(x) \geq 0$ kaikilla $t\in \mathbb{Z}_+$, on myös rajalla $\pi(x) = \lim_{t\to\infty} \mu_t(x) \geq 0$ ja koska $\sum_{x\in S} \mu_t(x) = 1$ kaikilla t, on

$$1 = \lim_{t\to\infty}\Big(\sum_{x\in S} \mu_t(x)\Big) = \sum_{x\in S}\Big(\lim_{t\to\infty} \mu_t(x)\Big) = \sum_{x\in S} \pi(x)$$

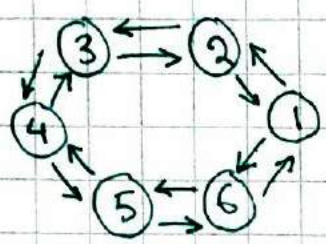
eli π on tosiaan myös todennäköisyysjakauma.

$\square$

Huomioita rajajakauman olemassaolosta ja yksikäsitteisyydestä

Tarkastellaan kahta esimerkkiä Markov-ketjuista:

Esim. 1



$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$p_{x,y} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{jos } |x-y| \equiv 1 \pmod 6 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

"Satunnaiskävely renkaalla"

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jos X_0 on parillinen, $X_0 \in \{2,4,6\}$, niin parillisilla $t \in \mathbb{Z}_+$ tila X_t on myös parillinen (todennäköisyydellä 1) ja parittomilla $t \in \mathbb{Z}_+$ tila X_t on pariton.

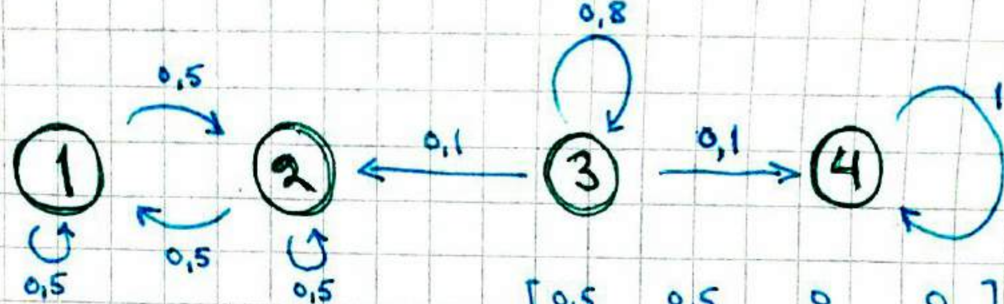
Siis erityisesti:

parittomilla t $\qquad \mu_t(y) = 0 \quad \forall y \in \{2,4,6\}$

parillisilla t $\qquad \sum_{y \in \{2,4,6\}} \mu_t(y) = 1$.

Tilajakaumilla μ_t ei voi olla raja-arvoa kun $t \to \infty$.

Esim. 2



$$S = \{1,2,3,4\} \qquad P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suoralla laskulla voidaan tarkistaa, että sekä $\pi^{(4)} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]$ että

$$\pi^{(1,2)} = [0,5 \;\; 0,5 \;\; 0 \;\; 0]$$

ovat tasapainojakaumia ja myös rajajakaumia:

- jos $X_0 \in \{1,2\}$ niin $\lim_{t\to\infty} \mu_t = \pi^{(1,2)}$
- jos $X_0 = 4$ niin $\lim_{t\to\infty} \mu_t = \pi^{(4)}$.

Myös mikä tahansa näiden konveksi kombinaatio eli muotoa

$$p \cdot \pi^{(1,2)} + (1-p) \cdot \pi^{(4)} \qquad (p \in [0,1])$$

oleva jakauma on tasapainojakauma.

Erityisesti, tämän Markov-ketjun tasapainojakauma ei ole yksikäsitteinen, ja rajajakauma riippuu alkutilasta X_0.

Ylläolevien esimerkkien valossa on selvää, että Markov-ketjun rakenteesta täytyy olettaa jotakin, jotta rajajakaumat olisivat olemassa ja yksikäsitteisiä. Tähän riittävät oletukset ovat kuitenkin kohtalaisen vaatimattomat.

Yhtenäisyys

Merkitään $x \rightsquigarrow y$, jos siirtymäkaaviossa on polku tilasta x tilaan y.

(eli $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ siten, että

$x_0 = x$, $x_n = y$ ja $x_0 \to x_1$, $x_1 \to x_2$, ..., $x_{n-1} \to x_n$)

$p_{x_0,x_1} > 0$, $p_{x_1,x_2} > 0$ ... $p_{x_{n-1},x_n} > 0$

(Huom: Nollan askeleen ($n=0$) polku sallitaan, joten $x \rightsquigarrow x$ kaikilla $x \in S$.)

Markov-ketju on yhtenäinen, jos kaikilla $x, y \in S$ pätee $x \rightsquigarrow y$.

"Mistä tahansa tilasta on mahdollista päästä toiseen."

Esim: Esimerkkien "työmatkapyöräilijä", "varastonhallinta", ja "renkaan satunnaiskävely" Markov-ketjut ovat yhtenäisiä. Esimerkin 2 (yllä) Markov-ketju ei ole yhtenäinen, koska vaikkapa tilasta 4 ei voi päästä tilaan 1.

Lause 3.7 Markov-ketju on yhtenäinen jos ja vain jos kaikilla $x, y \in S$ on olemassa $t \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $(P^t)_{x,y} > 0$.

Todistus: Kiinnitetään $x, y \in S$. Tapaus $x = y$ on selvä, joten voidaan olettaa $x \neq y$.
Kirjoittamalla auki matriisin P potenssi saadaan

$$(P^t)_{x,y} = \sum_{z_1, \ldots, z_{t-1} \in S} p_{x,z_1} \cdot p_{z_1,z_2} \cdot \cdots \cdot p_{z_{t-2},z_{t-1}} \cdot p_{z_{t-1},y}$$

Kaikki summan termit ovat epänegatiivisia, joten $(P^t)_{x,y}$ on positiivinen jos ja vain jos jokin summan termeistä on positiivinen.
Jos ketju on yhtenäinen, on määritelmän mukaan olemassa n ja $x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_{n-1} \to x_n = y$, joten kun $t = n$ on ainakin yksi termi positiivinen.

Kääntäen, jos $(P^t)_{x,y} > 0$, on joillakin $z_1, z_2, \ldots, z_{t-1} \in S$ jokainen termin tulon tekijä p_{x,z_1}, $p_{z_1,z_2}, \ldots, p_{z_{t-1},y}$ positiivinen, jolloin $x \rightsquigarrow y$. Jos näin käy kaikilla x, y, on ketju yhtenäinen. $\square$

Lause 3.8 Yhtenäisellä äärellistilaisella Markov-ketjulla on yksikäsitteinen tasapainojakauma.

Sivuutamme tarkan todistuksen tässä. Esitämme todistuksen luonnoksen hieman myöhemmin.
Todistus löytyy selkeästi esitettynä kirjasta

Levin & Peres & Willmer:
"Markov Chains and Mixing Times".

Jaksollisuus ja jaksottomuus

Esimerkin 1 "renkaan satunnaiskävely" oli yhtenäinen Markov-ketju, jolla ei ollut rajajakaumaa. Selvästi rajajakauman olemassaolon este oli parillisuus: joka toisella askeleella ketjun tila oli parillinen ja joka toisella pariton, joten suppeneminen kohti rajajakaumaa oli mahdotonta. Yleisemminkin vastaava jaksollinen käyttäytyminen olisi este rajajakaumaa kohti suppenemiselle.

Markov-ketjun tilan $x \in S$ jakso on suurin yhteinen tekijä sellaisille ajanhetkille, jolloin tilasta x lähtevä ketju voi palata tilaan x. Mahdollisten paluuhetkien joukko on formaalimmin

$$\mathcal{T}_x = \left\{ t \geq 1 \;\middle|\; (\mathbb{P}^t)_{x,x} > 0 \right\}.$$

(Muistutus: $(\mathbb{P}^t)_{x,x} = \mathbb{P}[X_t = x \mid X_0 = x]$ aiemman tuloksen perusteella.)

Tilan x jakso on siis suurin positiivinen kokonaisluku, jolla kaikki joukon $\mathcal{T}_x$ alkiot ovat jaollisia.

(Jos tilasta x lähtien ei ole mahdollista palata tilaan x, on paluuhetkien joukko tyhjä, $\mathcal{T}_x = \emptyset$, emmekä määrittele tilalle x jaksoa.)

Esim: Renkaan satunnaiskävelylle (Esimerkki 1) jokaisen tilan $x \in S = \{1,2,3,4,5,6\}$ mahdollisten paluuhetkien joukko on parilliset luvut $\mathcal{T}_x = \{2,4,6,8,\ldots\}$ ja jokaisen tilan jakso on siten 2.

Sanomme Markov-ketjua jaksottomaksi, jos sen jokaisen tilan jakso on 1.

Harjoituksissa osoitetaan seuraava tulos:

Lemma Jos $x, y \in S$ ja $x \rightsquigarrow y$ ja $y \rightsquigarrow x$, niin tilojen x ja y jaksot ovat samat.

Koska yhtenäiselle Markov-ketjulle yo. Lemman ehto pätee kaikille tilapareille x, y, saadaan erityisesti seuraavat johtopäätökset.

Korollaari Yhtenäisen Markov-ketjun kaikkien tilojen jaksot ovat samat.

Korollaari Yhtenäinen Markov-ketju on jaksoton jos ja vain jos jonkin tilan jakso on 1.

Korollaari Yhtenäinen Markov-ketju on jaksoton, jos jollekin tilalle $x \in S$ pätee $p_{x,x} > 0$.

Yhtenäisen jaksottoman ketjun rajajakauma

Seuraava lause on keskeisin äärellistilaisten Markov-ketjujen (ehkä jopa ylipäänsä stokastisten prosessien) teorian tulos. Se selittää miksi useat Markov-ketjut asettuvat pitkällä aikavälillä tilastolliseen tasapainoon.

Lause 3.11: Olkoon $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ yhtenäinen jaksoton äärellistilainen Markov ketju. Ketjun hetkittäiset tilajakaumat μ_t suppenevat kun $t \to \infty$ kohti ketjun yksikäsitteistä tasapainojakaumaa π, alkujakaumasta μ_0 riippumatta

$$\lim_{t \to \infty} \mu_t = \pi .$$

Lyhyt yhteenveto edellisen luennon aiheista:

- Yhtenäisyys: Markov-ketju on yhtenäinen, jos kaikilla $x, y \in S$ on olemassa $t \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $(P^t)_{x,y} > 0$.

- Jaksottomuus: Markov-ketju on jaksoton, jos jokaisen tilan mahdollisten paluuhetkien joukon $$\mathcal{T}_x = \{ t \geq 1 \mid (P^t)_{x,x} > 0 \}$$ suurin yhteinen tekijä on 1.

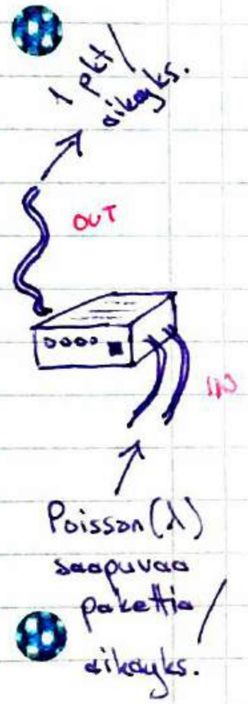
- Yhtenäisen ketjun tasapainojakauma (Lause 3.8.)
  Yhtenäisellä Markov-ketjulla on yksikäsitteinen tasapainojakauma π, eli vaakavektori $\pi = (\pi(x))_{x \in S}$, jolle
  $$\pi = \pi P \quad \text{ja} \quad \pi(x) \geq 0 \quad \forall x \in S$$
  $$\text{ja} \quad \sum_{x \in S} \pi(x) = 1.$$

- Yhtenäisen jaksottoman ketjun rajajakauma (Lause 3.11)
  Mistä tahansa alkujakaumasta μ_0 lähtien, yhtenäisen jaksottoman Markov-ketjun hetkittäiset tilajakaumat μ_t suppenevat kun $t \to \infty$ kohti ketjun yksikäsitteistä tasapainojakaumaa π.

Esimerkki "Tietoliikennekytkin"

Tarkastellaan tietoliikenneverkon kytkintä, johon saapuvia datapaketteja talletetaan väliaikaisesti kytkimen puskuriin, josta ne sitten yksi kerrallaan lähetetään eteenpäin.

Oletetaan, että yhdessä aikayksikössä (esim. mikrosekunnissa, 10^{-6}s) kytkin lähettää eteenpäin yhden puskurissaan olevista datapaketeista, tai puskurin ollessa tyhjä, ei lähetä kyseisellä ajanhetkellä mitään. Oletetaan myös, että kunkin aikayksikön aikana kytkimeen saapuu riippumattomasti Poisson(λ)-jakautunut määrä datapaketteja, jotka tallennetaan puskuriin, kuitenkin niin, että puskurissa voi kerrallaan olla enintään M pakettia ja enemmät saapuvat paketit hylätään.



Jos X_t on t:nnen aikayksikön alussa puskurissa olevien datapakettien lukumäärä, niin y.o. oletuksilla $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ on Markov-ketju tilajoukolla

$$S = \{0, 1, 2, \ldots, M-1, M\}.$$

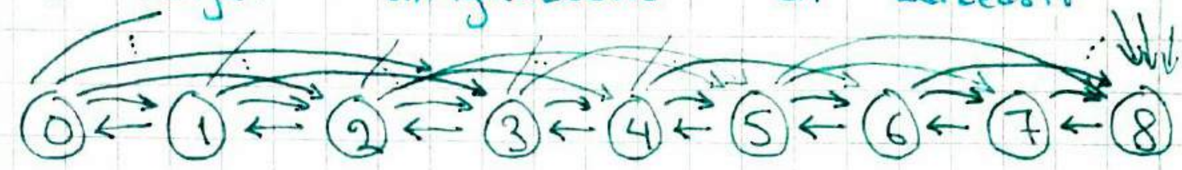
Siirtymätodennäköisyysmatriisi on:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda} & \frac{1}{6}\lambda^3 e^{-\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^{M-1}}{(M-1)!}e^{-\lambda} & \# \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda} & \frac{1}{6}\lambda^3 e^{-\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^{M-1}}{(M-1)!}e^{-\lambda} & \# \\ 0 & e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^{M-2}}{(M-2)!}e^{-\lambda} & \# \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \lambda e^{-\lambda} & \# \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

Oletetaan konkreettisuuden vuoksi

$$M = 8 \quad \text{ja} \quad \lambda = 0{,}95.$$

Markov-ketjun siirtymäkaavio on karkeasti



ja siirtymämatriisi likimäärin (laske tarkemmin tietokoneella!)

$$P \approx \begin{bmatrix} 0{,}39 & 0{,}37 & 0{,}17 & 0{,}055 & 0{,}013 & 2\cdot10^{-3} & 4\cdot10^{-4} & 5\cdot10^{-5} & 7\cdot10^{-6} \\ 0{,}39 & 0{,}37 & 0{,}17 & 0{,}055 & 0{,}013 & 2\cdot10^{-3} & 4\cdot10^{-4} & 5\cdot10^{-5} & 7\cdot10^{-6} \\ 0 & 0{,}39 & 0{,}37 & 0{,}17 & 0{,}055 & 0{,}013 & 2\cdot10^{-3} & 4\cdot10^{-4} & 6\cdot10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}39 & 0{,}37 & 0{,}17 & 0{,}055 & 0{,}013 & 2\cdot10^{-3} & 5\cdot10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}39 & 0{,}37 & 0{,}17 & 0{,}055 & 0{,}013 & 3\cdot10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}39 & 0{,}37 & 0{,}17 & 0{,}055 & 0{,}016 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}39 & 0{,}37 & 0{,}17 & 0{,}07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}39 & 0{,}37 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}39 & 0{,}61 \end{bmatrix}$$

Tietoliikennesovellusten kannalta olisi mielekästä ymmärtää esimerkiksi:

- Kuinka suuren osuuden ajasta puskuri on tyhjänä (pitkällä tähtäimellä)?
- Kuinka suuri osuus puskurista on keskimäärin käytössä?
- Kuinka suuri osuus saapuvista paketeista joudutaan hylkäämään?
- jne. jne.

Tällä luennolla tarkastelemme menetelmiä, joilla ylläolevan kaltaisiin kysymyksiin Markov-ketjuista voidaan vastata.

Ensimmäiseen ylläolevista kysymyksistä voimmekin suoraan soveltaa Lausetta 3.11.

<u>Esim.</u> "Tietoliikennekytkimen tasapainojakauma"

Tarkastellaan edellisen esimerkin Markov-ketjua parametreilla $M = 8$, $\lambda = 0{,}95$.

Ketju on yhtenäinen, koska vaikkapa siirtymillä

$$0 \to 8 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$$

on positiiviset todennäköisyydet. Jokaisen tilan x jakso on 1, koska siirtymä $x \to x$ on mahdollinen, joten ketju on jaksoton. Lauseesta 3.11 seuraa nyt, että mistä tahansa alkutilasta μ_0 lähtien konvergoidaan tasapainojakaumaan π

$$\lim_{t \to \infty} \mu_t = \pi ,$$

ja π on yhtälön $\pi P = \pi$ positiivinen, normalisoitu ratkaisu.

Tietokoneella lasketaan:

$$\pi \approx \begin{bmatrix} 0{,}087 & 0{,}139 & 0{,}144 & 0{,}133 & 0{,}121 & 0{,}109 & 0{,}098 & 0{,}089 & 0{,}080 \end{bmatrix}$$

Siis puskuri on pitkässä juoksussa tyhjillään noin $8{,}7\,\%$ ajasta, täynnä noin $8{,}0\,\%$ ajasta ja tyypillisimmin puskurissa on kaksi pakettia ($14{,}4\,\%$ ajasta).

MARKOV KUSTANNUSMALLIT JA KULKUAJAT

Rajoitetun aikavälin kustannuskertymä

Tarkastellaan systeemiä, jonka tilaa mallinnetaan äärellisen tilajoukon S Markov-ketjulla $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$.

Oletetaan, että kullakin ajanhetkellä t aiheutuu kustannus C_t, joka riippuu systeemin senhetkisestä tilasta. Tarkemmin, sallimme joko deterministisesti systeemin tilasta määräytyvän kustannuksen

$$C_t = c(X_t), \qquad \text{missä } c : S \to \mathbb{R} \text{ on jokin annettu funktio}$$

tai satunnaisen kustannuksen, jonka jakauma riippuu nykytilasta, mutta ei menneisyydestä ja joka tilassa $x \in S$ on odotusarvoisesti $c(x)$:

$$\mathbb{E}\left[C_t \mid X_t = x,\ H_{t-} \right] = c(x)$$

kun $H_{t-} = \{ X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1} \}$ on menneisyyttä koskeva tapahtuma. Deterministinen systeemin tilasta määräytyvä kustannus on selvästi erikoistapaus tällaisesta satunnaisesta kustannuksesta, joten riittää tarkastella jälkimmäistä tapausta.

Kustannuskertymä ajanhetkeen t mennessä on satunnaismuuttuja

$$\sum_{s=0}^{t} C_s ,$$

ja tilasta $x \in S$ käynnistyvän Markov-ketjun odotettu kustannuskertymä hetkeen t mennessä on luku

$$g_t(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{s=0}^{t} C_s \,\middle|\, X_0 = x \right].$$

<u>Huom</u>: Käytämme termiä "kustannus", vaikka matemaattinen teoria soveltuu toki yhtä hyvin mihin tahansa reaaliarvoiseen suureeseen, josta olemme kiinnostuneita.

Seuraava tulos kertoo, miten odotettu kustannuskertymä saadaan laskettua esiintyvyysmatriisista

$$M_t = I + P + P^2 + \dots + P^{t-1} + P^t = \sum_{s=0}^{t} P^s .$$

<u>Lause 4.1.</u> Odotettu kustannuskertymä saadaan kaavasta

$$\boxed{g_t(x) = \sum_{y \in S} (M_t)_{x,y} \, c(y) ,}$$

eli jos funktio $c: S \to \mathbb{R}$ tulkitaan pystyvektorina $c = (c(x))_{x \in S}$ niin

$$\boxed{g_t = M_t \, c} .$$

<u>Todistus</u>: Lasketaan ensin hetken s kustannuksen C_s odotusarvo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_s \mid X_0 = x] &= \sum_{y \in S} \mathbb{E}[C_s \mid X_0 = x, X_s = y] \\
&= \sum_{y \in S} \mathbb{P}[X_0 = x, X_s = y] \cdot c(y) \\
&= \sum_{y \in S} (P^s)_{x,y} \, c(y) .
\end{aligned}$$

Sitten summaamalla s:n yli ja vaihtamalla summausjärjestys

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sum_{s=0}^{t} C_s\Big] &= \sum_{s=0}^{t} \sum_{y \in S} (P^s)_{x,y} \cdot c(y) \\
&= \sum_{y \in S} (M_t)_{x,y} \cdot c(y) .
\end{aligned}$$

$\square$

Esimerkki Jos aiempien esimerkkiemme työmatkapyöräilijä ostaa jokaisena pyöräilypäivänään 1,50 € hintaisen energiapatukan ja toisaalta pyörän ollessa rikki ostaa kaksi 3,20 € hintaista bussilippua, niin viisipäiväisen työviikon odotetut kustannuskertymät ovat vektorimuodossa

$$g_4 = M_4 c = \left(\sum_{s=0}^{4} \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{bmatrix}^s \right) \begin{bmatrix} 1{,}50 \\ 2 \cdot 3{,}20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4{,}657 & 0{,}343 \\ 2{,}266 & 2{,}734 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}50 \\ 6{,}40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}18 \\ 20{,}90 \end{bmatrix}$$

Siis jos pyörä on viikon alussa kunnossa, päätyy pyöräilijä odotusarvoisesti tuhlaamaan 9,18 €. Vastaavasti, jos pyörä on viikon alussa rikki, kuluu odotusarvoisesti 20,90 €.

Pitkän aikavälin odotettu kustannusvauhti

Kuten aiemminkin, olemme useimmiten kiinnostuneita systeemin pitkän tähtäimen käyttäytymisestä.

Kustannusten kertymisvauhti on aikakeskiarvojen raja

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^{t} C_s \, .$$

Olettamalla kustannuksen C_s olevan riippumaton menneistä tiloista $X_0, X_1, \ldots, X_{s-1}$ ehdollistettuna nykytilalle X_s, voitaisiin osoittaa ylläolevan raja-arvon olevan olemassa (todennäköisyydellä 1).

Yhtenäiselle ketjulle pätee lisäksi ergodisuus: kustannusvauhti on alkutilasta riippumatta tasapainojakauman π avulla

$$\sum_{y \in S} \pi(y) \cdot c(y) \, .$$

Tyydymme tässä kuitenkin odotusarvoiseen versioon: odotettu kustannusvauhti tilasta $x \in S$ lähtien on

$$g(x) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^{t} C_s \;\middle|\; X_0 = x \right].$$

Johdamme tälle kaavan yhtenäisen jaksottoman ketjun tapauksessa, jolloin voimme nojautua rajajakauman olemassaolo- ja yksikäsitteisyystulokseen.

Lause Jos $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ on yhtenäinen jaksoton Markov-ketju äärellisellä tilajoukolla S, ja hetkittäiset kustannukset C_s toteuttavat $\mathbb{E}[C_s \mid X_s = y, H_{s-}] = c(y)$ kaikille menneisyyttä koskeville tapahtumille $H_{s-} = \{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{s-1} = x_{s-1}\}$, niin odotettu kustannusvauhti saadaan rajajakauman π avulla kaavasta

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^{t} C_s \right] = \sum_{y\in S} \pi(y)\, c(y)$$

alkutilan jakaumasta μ_0 riippumatta.

Todistus: Kirjoitetaan ensin, kuten Lauseessa 4.1,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^{t} C_s \right] = \frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^{t} \sum_{y\in S} \mu_s(y)\cdot c(y).$$

Tavoitteenamme on näyttää, että tämän lausekkeen erotus väitettyyn raja-arvoon

$$\frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^{t} \sum_{y\in S} \mu_s(y)\, c(y) - \sum_{y\in S} \pi(y)\, c(y) \qquad (\star)$$

menee nollaan kun $t \to \infty$.

Erotus $(\star)$ voidaan järjestellä muotoon

$$\frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^{t} \sum_{y\in S} \left(\mu_s(y) - \pi(y)\right)\cdot c(y).$$

Ottamalla itseisarvot ja käyttämällä kolmioepäyhtälöä

$$\left| \frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^{t} \sum_{y \in S} (\mu_s(y) - \pi(y)) \cdot c(y) \right| \leq \frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^{t} \sum_{y \in S} |\mu_s(y) - \pi(y)| \cdot |c(y)|.$$

Näytämme, että oikea puoli menee nollaan, jolloin lauseen väite seuraa.

Kiinnitetään mielivaltaisen pieni $\varepsilon > 0$.
Lauseen 3.11. perusteella $\mu_s \longrightarrow \pi$, joten on olemassa jokin t_ε siten, että

$$|\mu_s(y) - \pi(y)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla} \quad s \geq t_\varepsilon, \; y \in S.$$

Merkitään vielä $K := \max_{y \in S} |c(y)|$.

Hajoitetaan summa s:n yli pieniin $(s < t_\varepsilon)$ ja suuriin $(t_\varepsilon \leq s \leq t)$ arvoihin erikseen.
Suurten s kontribuutio on

$$\frac{1}{t+1} \cdot \sum_{t_\varepsilon \leq s \leq t} \sum_{y \in S} \underbrace{|\mu_s(y) - \pi(y)|}_{< \varepsilon} \cdot \underbrace{|c(y)|}_{\leq K}$$

$$\leq \frac{t+1-t_\varepsilon}{t+1} (\# S) \cdot \varepsilon \cdot K \leq (\# S) \cdot K \cdot \varepsilon.$$

Pienten s kontribuutio taas on

$$\frac{1}{t+1} \sum_{s < t_\varepsilon} \sum_{y \in S} \underbrace{|\mu_s(y) - \pi(y)|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|c(y)|}_{\leq K}$$

$$\leq \frac{t_\varepsilon}{t+1} \cdot (\# S) \cdot 1 \cdot K \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$$

Koska tämä lauseke menee nollaan, on olemassa $t'_\varepsilon \geq t_\varepsilon$ siten että kaikilla $t \geq t'_\varepsilon$ lauseke on pienempi kuin ε. Näin suurilla t:n arvoilla kontribuutiot yhdistämällä saadaan lopulta $\circledast$:n itseisarvolle

$$|\circledast| \leq ((\# S) \cdot K + 1) \cdot \varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, päättelemme

$$|\circledast| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0. \qquad \square$$

Kulkuajat (= osumishetket)

Pitkän aikavälin käyttäytymisen lisäksi tyypillisiä kiinnostavia kysymyksiä Markov-ketjuista ovat esim.:

Päätyykö prosessi koskaan tiettyyn annettuun tilaan / johonkin annetuista tiloista?
Millä todennäköisyydellä näin käy?
Kuinka kauan siinä odotusarvoisesti kestää?

Kulkuaikoja analysoimalla vastaamme tällaisiin kysymyksiin, lopulta jälleen pääosin lineaarialgebran menetelmin.

Tarkastelemme siirtymämatriisin $P = (p_{x,y})_{x,y \in S}$ määrittelemiä eri alkutiloista X_0 lähetettyjä Markov-ketjuja äärellisellä tilajoukolla S.
Kun prosessin lähtötilaksi halutaan $X_0 = x \in S$, merkitään prosessin todennäköisyysmittaa $\mathbb{P}_x$ ja vastaavia odotusarvoja $\mathbb{E}_x$.

(Aiemmin olemme usein käyttäneet ehdollisen todennäköisyyden ja odotusarvon notaatioita $\mathbb{P}[\,\cdot \mid X_0 = x\,]$ ja $\mathbb{E}[\,\cdot \mid X_0 = x\,]$, mutta selvästi $\mathbb{P}_x$ ja $\mathbb{E}_x$ ovat pidemmän päälle ytimekkäämmät.)

Kun $A \subset S$ on jokin osajoukko kaikista tiloista, Markov-ketjun kulkuaika (osumishetki) joukkoon A on satunnaismuuttuja

$$T_A = \min \{ t \geq 0 \mid X_t \in A \}.$$

Jos prosessi ei koskaan päädy mihinkään joukon A tiloista, tulkitaan yllä tyhjän ajanhetkijoukon minimin olevan $+\infty$. Siis satunnaismuuttuja T_A saa arvoja joukossa $\mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$.

Olemme kiinnostuneita sekä osumistodennäköisyyksistä

$$h_A(x) := \mathbb{P}_x[T_A < +\infty]$$

että odotetuista kulkuajoista

$$k_A(x) := \mathbb{E}_x[T_A].$$

Huom. Jos prosessilla on positiivinen todennäköisyys $\mathbb{P}_x[T_A = \infty] > 0$ olla koskaan osumatta joukkoon A, on odotettu kulkuaika $\mathbb{E}_x[T_A]$ joka tapauksessa ääretön. Jälkimmäinen kysymys on siis kiinnostava vain silloin, kun vastaus ensimmäiseen on tässä mielessä triviaali.

Voidaan myös vaikkapa valita kaksi (erillistä) osajoukkoa $A, B \subset S$ $(A \cap B = \emptyset)$ ja kysyä kumpaan näistä prosessi ensin päätyy:

$$\mathbb{P}_x[T_A < T_B].$$

Tässä luvussa osoitamme niinkutsutulla "ensiaskelanalyysillä", että vastaukset ylläoleviin kysymyksiin saadaan ratkaisemalla lineaarisia yhtälöryhmiä.

Tarkastellaan ensin odotettuja kulkuaikoja.

Jaetaan tarkastelu kahteen tapaukseen sen mukaan, kuuluuko prosessin lähtötila $X_0 = x$ osajoukkoon $A \subset S$ vai ei.

Jos $x \in A$, niin $T_A = \min\{t \geq 0 \mid X_t \in A\} = 0$ varmasti. Siispä odotettu kulkuaika on nolla

$$k_A(x) = \mathbb{E}_x[T_A] = 0 \qquad \forall x \in A.$$

Jos $x \notin A$ on tilanne kiinnostavampi. Jaetaan tarkastelu tällöin edelleen tapauksiin prosessin ensimmäisen askeleen mukaan, eli ehdollistetaan arvolle $X_1 = y$. Ehdollistettuna, prosessi $\tilde{X}_s = X_{1+s}$ on jälleen Markov-ketju siirtymämatriisilla P, käynnistettynä tilasta y !

(Tosiaan, vaikkapa

$$\tilde{\mathbb{P}}[\tilde{X}_1 = z] = \mathbb{P}_x[X_2 = z \mid X_1 = y] = p_{y,z}$$

ja samaan tapaan tarkistetaan yleinenkin tapaus.)

Siispä hetken 1 jälkeen vielä jäljellä oleva kulkuaika noudattaa samaa jakaumaa kuin tilasta $X_1 = y$ kulkuaika joukkoon A, ja erityisesti odotetuille kulkuajoille saadaan

$$k_A(x) = \mathbb{E}_x[T_A] = \sum_{y \in S} \mathbb{P}_x[X_1 = y] \cdot \mathbb{E}_x[T_A \mid X_1 = y]$$

$$= \sum_{y \in S} p_{x,y} \cdot \mathbb{E}_y[T_A + 1]$$

$$= 1 + \sum_{y \in S} p_{x,y} \cdot k_A(y) \qquad \forall x \notin A.$$

Odotetut kulkuajat $k_A(x)$, $x \in S$, toteuttavat siis lineaarisen epähomogeenisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} k_A(x) = 0 & \forall x \in A \\ k_A(x) - \sum_{y \in S} p_{x,y} \cdot k_A(y) = 1 & \forall x \in S \setminus A. \end{cases}$$

Käytännössä tämä tieto riittää, kun halutaan ratkaista odotetut kulkuajat, mutta myöhemmin osoitamme, että k_A on ylläolevan yhtälöryhmän pienin epänegatiivinen ratkaisu.

<u>Esimerkki</u> Jos tietoliikennekytkimen puskurissa on aluksi $X_0 = x$ datapakettia, kauanko odotusarvoisesti kestää ennen kuin puskuri on ensimmäistä kertaa täynnä?

Joukoksi A valitaan $A = \{8\}$, koska ainoa haluttu tila on täysi puskuri, jossa on 8 datapakettia.

Yhtälöryhmä
$$\begin{cases} k_{\{8\}}(8) = 0 \\ k_{\{8\}}(x) - \sum_{y} p_{x,y} \cdot k_{\{8\}}(y) = 1 \end{cases}$$
$$\forall x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

voidaan ratkaista tietokoneella, ja saadaan:

x	$k_{\{8\}}(x)$
0	82,9
1	82,9
2	80,8
3	76,3
4	69,1
5	59,1
6	45,9
7	29,6
8	0

Ainakin havaitaan, että mitä tyhjemmästä puskurista lähdetään liikkeelle, sitä pidempään odotusarvoisesti puskurin täyttyminen kestää. Tyhjästä puskurista lähtien se kestää noin 83 aikayksikköä.

Palautetaan mieleen edellisellä luennolla esitetyt kysymykset kulkuajoista

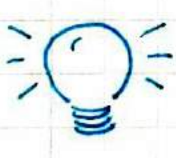
$X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ Markov-ketju äärellisellä tilajoukolla S

- $A \subset S$ osajoukko tiloista ("kohdetilat")
- $T_A := \min\{t \geq 0 \mid X_t \in A\}$ ("kulkuaika" tai "osumishetki")

  satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko on $\{0,1,2,\ldots\} \cup \{+\infty\}$

- osumatodennäköisyys $h_A(x) = \mathbb{P}_x[T_A < +\infty]$
- odotettu kulkuaika $k_A(x) = \mathbb{E}_x[T_A]$

(<u>NOTAATIO</u>: Kun Markov-ketju lähetetään tilasta $x \in S$, merkitään todennäköisyysmittaa $\mathbb{P}_x$ ja odotusarvoa $\mathbb{E}_x$.
Siis $\mathbb{P}_x[X_0 = y] = \begin{cases} 1 & \text{jos } y = x \\ 0 & \text{jos } y \neq x \end{cases}$.)



- <u>Keskeinen idea</u>: "Ensiaskelanalyysillä" eli ehdollistamalla mahdollisille tilan X_1 arvoille saadaan lineaariset yhtälöryhmät osumatodennäköisyyksille $(h_A(x))_{x \in S}$ ja odotetuille kulkuajoille $(k_A(x))_{x \in S}$.
  Osumatodennäköisyydet ja odotetut kulkuajat voidaan ratkaista näistä lineaarialgebran menetelmin. Esimerkiksi odotetut kulkuajat toteuttavat yhtälöryhmän:

$$\begin{cases} k_A(x) = 0 & \forall x \in A \\ k_A(x) - \sum_{y \in S} p_{x,y} \cdot k_A(y) = 1 & \forall x \in S \setminus A. \end{cases}$$

Johdetaan seuraavaksi yhtälöryhmä osumatodennäköisyyksille
$$h_A(x) = \mathbb{P}_x[T_A < +\infty].$$

Jaetaan jälleen tarkastelu alkutilan x mukaan tapauksiin $x \in A$ ja $x \notin A$.

Jos $x \in A$, niin $T_A = 0$, joten joukkoon A osutaan varmasti ja osumatodennäköisyys on
$$h_A(x) = \mathbb{P}_x[T_A < +\infty] = 1 \qquad (\text{kun } x \in A).$$

Jos $x \notin A$, niin jaetaan tarkastelu edelleen tapauksiin tilan $X_1 = y$ mukaan. Ajanhetkestä 1 eteenpäin seurattu prosessi $\tilde{X}$,
$$\tilde{X}_t = X_{1+t}$$
on Markov-ketju samalla siirtymätodennäköisyysmatriisilla P ja alkutilalla
$$\tilde{X}_0 = X_1.$$
Prosessi X osuu joukkoon A ajanhetkellä $T_A = j \geq 1$ jos ja vain jos prosessin $\tilde{X}$ osumahetki joukkoon A,
$$\tilde{T}_A = \min\{t \geq 0 \mid \tilde{X}_t \in A\}$$
$$= \min\{t \geq 0 \mid X_{1+t} \in A\}$$
on yhtä vähemmän, $\tilde{T}_A = j-1$. Osumahetki $\tilde{T}_A$ on äärellinen tilasta $X_1 = y$ lähetetyn prosessin osumatodennäköisyydellä $h_A(y)$.

Saamme: $$h_A(x) = \mathbb{P}_x[T_A < +\infty] = \sum_{y \in S} \mathbb{P}_x[T_A < \infty \mid X_1 = y]$$
$$= \sum_{y \in S} \underbrace{\mathbb{P}_x[X_1 = y]}_{= p_{x,y}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}_x[\tilde{T}_A < \infty \mid X_1 = y]}_{= h_A(y)}$$

eli $$h_A(x) = \sum_{y \in S} p_{x,y} \cdot h_A(y) \qquad (\text{kun } x \notin A).$$

Terminologiaa: Funktiota $f : S \to \mathbb{R}$ sanotaan harmoniseksi siirtymämatriisin $P = (p_{x,y})_{x,y \in S}$ suhteen pisteessä $x \in S$ jos
$$f(x) = \sum_{y \in S} p_{x,y} \cdot f(y) .$$
Osumatodennäköisyys joukkoon $A \subset S$ on siis harmoninen joukon A komplementissa ja vakio 1 joukossa A.

Olemme näin ensiaskelanalyysillä johtaneet osumatodennäköisyyksille yhtälöryhmän
$$\begin{cases} h_A(x) = 1 & \forall x \in A \\ h_A(x) - \sum_{y \in S} p_{x,y} \cdot h_A(y) = 0 & \forall x \in S \setminus A \end{cases}.$$

Käytännössä ylläolevat yhtälöryhmät ja helppo järkeily riittävät sekä osumatodennäköisyyksien että odotettujen kulkuaikojen ratkaisemiseen. Matemaattisesti tämän takaa vaikkapa seuraavat lauseet, joiden todistukset on esitetty Lasse Leskelän luentomonisteessa.

Lause 4.7: Odotettujen kulkuaikojen kokoelma $(k_A(x))_{x \in S}$ on yhtälöryhmän
$$\begin{cases} f(x) - \sum_{y \in S} p_{x,y} f(y) = 1 & \forall x \in S \setminus A \\ f(x) = 0 & \forall x \in A \end{cases}$$
pienin epänegatiivinen ratkaisu.

Lause 4.10: Osumatodennäköisyyksien kokoelma $(h_A(x))_{x \in S}$ on yhtälöryhmän
$$\begin{cases} f(x) - \sum_{y \in S} p_{x,y} \cdot f(y) = 0 & \forall x \in S \setminus A \\ f(x) = 1 & \forall x \in A \end{cases}$$
pienin epänegatiivinen ratkaisu.

Sovelluksena yllä esitellylle yleiselle menetelmälle osumatodennäköisyyksien ratkaisemiseksi johdamme usein hyödyllisen satunnaiskävelyjä koskevan kaavan, joka tunnetaan nimellä "uhkapelurin vararikko" (engl. "gambler's ruin"). Näytämme sitten tällä kaavalla valaisevia esimerkkejä ruletin pelaamisstrategioista. Laskuharjoituksissa käsitellään pieni sovellus tilastolliseen päätöksentekoon. Ylipäänsä "uhkapelurin vararikko" on sen tapainen perustavanlaatuinen tulos, että sen lukuisia sovelluksia olisi mahdotonta käsitellä kattavasti.

Uhkapelurin vararikko

Kiinnitetään positiivinen kokonaisluku M ja parametri $q \in (0,1)$. Tarkastellaan Markov-ketjua $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ tilajoukolla

$$S = \{0, 1, 2, \ldots, M-1, M\}$$

siirtymätodennäköisyyksin

$$\begin{cases} p_{x,x+1} = q & \text{kun} \quad 0 < x < M \\ p_{x,x-1} = 1-q & \text{kun} \quad 0 < x < M \\ p_{x,y} = 0 & \text{kun} \quad |x-y| \neq 1 \\ \text{sekä} \quad p_{0,0} = 1 \ , \quad p_{M,M} = 1 \end{cases}$$

Prosessin tila X_t voidaan vaikkapa tulkita uhkapelurin varallisuutena t:n pelikierroksen jälkeen, olettaen että pelurі:

- pelaa ("yksikköpanoksella") kunnes varallisuus saavuttaa arvon 0 tai M
- kullakin pelikierroksella riippumattomasti voittaa yhden yksikön todennäköisyydellä q ja häviää yhden yksikön todennäköisyydellä $1-q$.

Tilat 0 ja M ovat absorboivia siinä mielessä, että niistä siirrytään aina (todennäköisyydellä 1) itseensä. Tila 0 erityisesti voidaan tulkita pelurin vararikoksi ja tila M taas tavoitevarallisuudeksi.
Näitä kahta tilaa lukuunottamatta prosessi seuraa "satunnaiskävelyä", joka kullakin ajanhetkellä ottaa askeleen oikealle todennäköisyydellä $p_{x,x+1} = q$ ja vasemmalle todennäköisyydellä $p_{x,x-1} = 1-q$. Satunnaiskävelyä sanotaan "symmetriseksi", jos $q = \frac{1}{2}$, eli jos peluri pelaa "reilua" uhkapeliä.

Peruskysymys uhkapelurin vararikosta on:

Millä todennäköisyydellä peluri ennen pitkää päätyy tavoitevarallisuuteensa ja millä todennäköisyydellä vararikkoon? Erityisesti, miten nämä todennäköisyydet riippuvat pelurin alkuvarallisuudesta $X_0 = x$?

Osumahetkien terminologialla tavoitteenamme on siis selvittää joukkojen

$A = \{0\}$ "vararikko"

$A = \{M\}$ "tavoitevarallisuus"

osumatodennäköisyydet $h_A(x)$, $x \in \{0, 1, \ldots, M-1, M\}$.

Helpoksi harjoitukseksi lukijalle jätetään varmistaa, että jompaan kumpaan näistä tiloista päädytään ennen pitkää todennäköisyydellä 1, eli $h_{\{0,M\}}(x) = 1 \quad \forall x$. Siispä y.o. osumatodennäköisyydet ovat toisilleen komplementaariset

$$h_{\{0\}}(x) = 1 - h_{\{M\}}(x)$$

ja riittää selvittää näistä toinen.

Merkitään notaation keventämiseksi

$$h(x) := h_{\{M\}}(x) = \mathbb{P}_x\left[T_{\{M\}} < +\infty\right]$$

todennäköisyyttä sille, että alkuvarallisuudella x, peluri ennen pitkää saavuttaa tavoitevarallisuutensa.

Voimme suoraan päätellä $h(x)$:n arvot absorboivissa tiloissa $x=0$ ja $x=M$:

$$h(0) = 0$$ (vararikosta ei ole mahdollista päästä tavoitevarallisuuteen)

$$h(M) = 1 .$$ (tavoitevarallisuudesta ei enää voi joutua vararikkoon)

Kaikissa muissa tiloissa $x \in \{1, 2, \ldots, M-1\}$ Lauseen 4.10 yhtälöryhmästä saadaan

$$(\star) \qquad h(x) - q \cdot h(x+1) - (1-q) \cdot h(x-1) = 0 .$$

Yhtälö $(\star)$ on toisen kertaluvun lineaarinen rekursio, jonka ratkaisuavaruus on kaksiulotteinen. Reunaehdot $h(0)=0$, $h(M)=1$ riittävät määräämään ratkaisun tässä avaruudessa yksikäsitteisesti. Konkreettisen kaavan antamiseksi ratkaisulle käsittelemme symmetrisen tapauksen $q = 1/2$ ja epäsymmetrisen geneerisen tapauksen $q \neq 1/2$ erikseen.

$\boxed{q \neq 1/2}$: Tehdään rekursioyhtälössä $(\star)$ yrite, joka on muotoa $h(x) = \alpha^x$ vielä määräämättömällä luvulla α.

(Tätä muotoa oleva yrite toimii geneerisesti vakiokertoimisiin lineaarisiin rekursioyhtälöihin kuten $(\star)$.)

Yritefunktiolle lasketaan

$$h(x) - q \cdot h(x+1) - (1-q) \cdot h(x-1)$$
$$= \alpha^x - q \cdot \alpha^{x+1} - (1-q)\,\alpha^{x-1}$$
$$= \alpha^{x-1} \cdot \left(\alpha - q \cdot \alpha^2 - 1 + q \right).$$

Yrite siis toimii jos ja vain jos luku α on toisen kertaluvun polynomiyhtälön

$$\alpha^2 - \frac{1}{q} \cdot \alpha + \frac{1-q}{q} = 0$$

ratkaisu, eli

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4q + 4q^2}}{2q} = \frac{1 \pm (2q-1)}{2q}$$

eli $\alpha \in \left\{ 1, \frac{1-q}{q} \right\}$.

Yleinen ratkaisu rekursiolle ⊛ on siis

$$h(x) = A + B \cdot \left(\frac{1-q}{q} \right)^x.$$

Reunaehto $h(0) = 0$ vaatii $A = -B$ ja reunaehto $h(M) = 1$ sitten $B = \left(\left(\frac{1-q}{q} \right)^M - 1 \right)^{-1}$.

Etsitty ratkaisu on siis

$$\boxed{h(x) = \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^x - 1}{\left(\frac{1-q}{q}\right)^M - 1}}$$

$\boxed{q = \frac{1}{2}}$: Ylläolevasta geneerisestä kaavasta ottamalla raja $q \to \frac{1}{2}$ saadaan oikea ratkaisu

$$\boxed{h(x) = \frac{x}{M}} \qquad \text{kun } q = \frac{1}{2}.$$

Tämä voitaisiin myös selvittää suoraan kuten yllä toteamalla ensin rekursion ⊛ yleisen ratkaisun olevan

$$h(x) = A + Bx$$

ja sitten ratkaisemalla reunaehdoista $A = 0$ ja $B = \frac{1}{M}$.

Yllä johdetut uhkapelurin vararikkotodennäköisyydet yhteenvedetään seuraavassa lauseessa:

Lause Olkoon $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ tilajoukon $S = \{0,1,2,\dots,M\}$ Markov-ketju siirtymämatriisilla

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1-q & 0 & q & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1-q & 0 & q & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1-q & 0 & q & & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1-q & 0 & & q \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Jos $q \neq \frac{1}{2}$, niin

$$\mathbb{P}_x\left[T_{\{M\}} < \infty\right] = \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^x - 1}{\left(\frac{1-q}{q}\right)^M - 1} \quad \forall x \in S$$

ja jos $q = \frac{1}{2}$, niin

$$\mathbb{P}_x\left[T_{\{M\}} < \infty\right] = \frac{x}{M}.$$

Sovellus: Pelataan rulettia panostamalla joka kierroksella 1 € punaiselle, jolloin voittotodennäköisyys on $q = \frac{18}{37} \approx 0{,}4865$

(Ruletissa on 18 punaista, 18 mustaa ja yksi "väritön" numero, joista jokainen on yhtä todennäköinen.)

Oletetaan alkupääomaksi euroina x, ja tavoitellaan alkupääoman kaksinkertaistamista $M = 2x$. Eri alkupääomien arvoille tämän onnistumistodennäköisyydet ovat

x	1 €	5 €	10 €	20 €	50 €
$\mathbb{P}$[onnistua]	0,4865	0,4328	0,3680	0,2533	0,0628

Kannattaa siis miettiä millaisen setelin vaihtaa pelimerkeiksi kasinolla.

Tasapainojakauman olemassaolon perustelu

Kulkuajat, tai ainakin niiden lähisukulaiset, ovat keskeisiä myös kun halutaan näyttää tasapainojakauman olemassaolo ja yksikäsitteisyys yhtenäiselle Markov-ketjulle (eli todistaa Lause 3.8.). Luonnostelemme siksi todistuksen tässä.

Kiinnitetään jokin $z \in S$. Kulkuajan $T_{\{z\}}$ sijasta tarkastellaan ajanhetkeä

$$T_z^+ = \min\{t \geq 1 \mid X_t = z\}.$$

Ainoa ero on, että T_z^+ ei voi saada arvoa nolla silloinkaan kun ketju lähtee tilasta $X_0 = z$, vaan vasta ensimmäinen paluuhetki lasketaan tässä tapauksessa.

Joidenkin odotusarvojen laskemiseksi käytämme seuraavaa yleistä aputulosta.

<u>Lemma</u> Jos Y on ei-negatiivisia kokonaislukuarvoja saava satunnaismuuttuja, niin sen odotusarvo saadaan kaavasta

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[Y \geq k].$$

<u>Todistus</u>: Määritelmän mukaan $\mathbb{E}[Y] = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \mathbb{P}[Y=j]$.

Kirjoitetaan $j \cdot \mathbb{P}[Y=j] = \sum_{k=1}^{j} \mathbb{P}[Y=j]$ ja vaihdetaan summausjärjestystä positiivitermisessä summassa

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \mathbb{P}[Y=j] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} \mathbb{P}[Y=j]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}[Y=j] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[Y \geq k]. \qquad \square$$

Näytämme ensin, että yhtenäisen ketjun tapauksessa ajat T_z^+ ovat välttämättä odotusarvoltaan äärellisiä.

<u>Propositio</u> Yhtenäiselle äärellisen tilajoukon S Markov-ketjulle pätee
$$\mathbb{E}_w\left[T_z^+\right] < \infty \quad \text{kaikilla } z, w \in S.$$

Todistus: Yhtenäisyyden perusteella on olemassa positiivinen kokonaisluku r ja $\varepsilon > 0$ siten, että kaikilla $x, y \in S$ on olemassa $j \leq r$ jolle j:n askeleen siirtymätn
$$(P^j)_{x,y} \geq \varepsilon.$$
Siksi millä tahansa $t \in \mathbb{Z}_+$ todennäköisyys osua tilaan z aikavälillä t:stä $(t+r)$:ään on vähintään ε:
$$\mathbb{P}\left[X_t = z \text{ tai } X_{t+1} = z \text{ tai } \ldots\ldots \text{ tai } X_{t+r} = z\right] \geq \varepsilon.$$
Soveltamalla tätä ajanhetkellä $t = (n-1)r$, missä n on positiivinen kokonaisluku, päättelemme
$$\mathbb{P}\left[T_z^+ > nr\right] \leq \mathbb{P}\left[T_z^+ > (n-1)r\right] \cdot (1-\varepsilon)$$
ja tätä iteroimalla n kertaa
$$\mathbb{P}\left[T_z^+ > nr\right] \leq (1-\varepsilon)^n.$$
Lasketaan sitten odotusarvo edellisen lemman kaavalla
$$\mathbb{E}\left[T_z^+\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[T_z^+ \geq k\right] = \sum_{k'=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[T_z^+ > k'\right]$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} r \cdot \mathbb{P}\left[T_z^+ > nr\right]$$
$$\leq r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^n = r \cdot \frac{1}{\varepsilon} < \infty.$$
$\square$

Olemme nyt valmiit konstruoimaan tasapainoyhtälöiden

$$\pi P = \pi$$

ratkaisun yhtenäiselle Markov-ketjulle. Emme aluksi vielä yritä normalisoida ratkaisua todennäköisyysjakaumaksi vaan tyydymme ensin vain ratkaisemaan lineaarisen yhtälöryhmän.

<u>Lemma</u> Olkoon $w \in S$ mikä tahansa yhtenäisen Markov-ketjun tila. Määritellään kun $x \in S$

$$\tilde{\pi}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}_w \left[X_t = x \text{ ja } T_w^+ > t \right].$$

Silloin vaakavektori $\tilde{\pi}$ toteuttaa $\tilde{\pi} P = \tilde{\pi}$.

<u>Todistus</u>: Tarkistetaan ensin, että komponentit $\tilde{\pi}(x)$ ovat hyvin määriteltyjä, aiempia aputuloksia käyttäen:

$$\tilde{\pi}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}_w \left[X_t = x \text{ ja } T_w^+ > t \right] \leq \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}_w \left[T_w^+ > t \right] = \mathbb{E}_w \left[T_w^+ \right] < \infty .$$

Huomataan sitten, että tapahtuma $\{T_w^+ > t\}$ määräytyy arvoista $X_1, X_2, \ldots, X_{t-1}, X_t$, joten Markov-ominaisuuden perusteella

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[X_{t+1} = y \text{ ja } X_t = x \text{ ja } T_w^+ > t \right] \\
&= \mathbb{P}\left[X_t = x \text{ ja } T_w^+ > t \right] \cdot \mathbb{P}\left[X_{t+1} = y \mid X_t = x \text{ ja } T_w^+ > t \right] \\
&= \mathbb{P}\left[X_t = x \text{ ja } T_w^+ > t \right] \cdot p_{x,y} .
\end{aligned}$$

Käyttämällä tätä kaavaa laskemme

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in S} \tilde{\pi}(x) \cdot p_{x,y} &= \sum_{x \in S} \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}_w \left[X_t = x \text{ ja } T_w^+ > t \right] \cdot p_{x,y} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{x \in S} \mathbb{P}_w \left[X_{t+1} = y \text{ ja } X_t = x \text{ ja } T_w^+ > t \right] \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}_w \left[X_{t+1} = y \text{ ja } T_w^+ > t \right] \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \mathbb{P}_w \left[X_s = y \text{ ja } T_w^+ \geq s \right] .
\end{aligned}$$

Tarkistamme vielä tapauksissa $y \neq w$ ja $y = w$ erikseen, että tämä viimeinen lauseke on sama kuin $\tilde{\pi}(y)$.

Tapaus $y \neq w$: Kun $y \neq w$ ja $X_s = y$, on välttämättä $T_w^+ \neq s$, ja koska $X_0 = w \neq y$ summan aloittaminen arvosta $s=0$ ei muuta sitä. Siten:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mathbb{P}_w[X_s = y \text{ ja } T_w^+ \geq s]$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{P}_w[X_s = y \text{ ja } T_w^+ > s] = \tilde{\pi}(y).$$

Tapaus $y = w$: Kun $T_w^+ = s$ on $X_s = w = y$, joten saamme

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mathbb{P}_w[X_s = w \text{ ja } T_w^+ \geq s]$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty} \Big(\mathbb{P}_w[X_s = w \text{ ja } T_w^+ > s] + \underbrace{\mathbb{P}_w[X_s = w \text{ ja } T_w^+ = s]}_{= \mathbb{P}_w[T_w^+ = s]} \Big)$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty} \mathbb{P}_w[X_s = w \text{ ja } T_w^+ > s] + 1$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{P}_w[X_s = w \text{ ja } T_w^+ > s].$$

Olemme siis näyttäneet, että

$$\sum_{x \in S} \tilde{\pi}(x)\, p_{x,y} = \tilde{\pi}(y) \qquad \text{kaikilla } y \in S.$$

Tämä onkin yhtälö $\tilde{\pi} P = \tilde{\pi}$ komponenttimuodossa.

□

Korollaari Yhtenäiselle Markov-ketjulle äärellisellä tilajoukolla S ja mille tahansa $w \in S$ vektori $\pi = (\pi(x))_{x \in S}$ komponentein

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_w[T_w^+]} \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}_w[X_t = x \text{ ja } T_w^+ > t]$$

on tasapainojakauma.

Todistus: Vektorin $\tilde{\pi}$ oikea normalisaatio löydetään laskemalla $\sum_{x \in S} \tilde{\pi}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}_w[T_w^+ > t] = \mathbb{E}_w[T_w^+]$. □

ÄÄRETTÖMÄN TILAJOUKON MARKOV-KETJUT

Lievennämme seuraavaksi oletusta siitä, että prosessin mahdollisten tilojen joukon S tulisi olla äärellinen. Pidämme muut oletukset ennallaan, eli prosessia koskevat oletuksemme ovat nyt:

- numeroituvasti ääretön tilajoukko S

  (eli tilajoukon äärettömän monta alkiota voidaan kuitenkin "luetella", esim. $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$)
- diskreetti aika $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- Markov-ominaisuus:

$$\mathbb{P}\left[X_{t+1} = y \mid X_t = x,\ X_0 = z_0, X_1 = z_1, \ldots, X_{t-1} = z_{t-1}\right]$$

$$= p_{x,y}$$

"siirtymätodennäköisyys"

(ei riipu "historiasta" X_s, $s<t$, muuten kuin nykytilan $X_t = x$ kautta)

Tällaista prosessia $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ kutsutaan (äärettömän) tilajoukon S Markov-ketjuksi.

Edelleen siirtymätodennäköisyyksien kokoelmalla

$$P = (p_{x,y})_{x,y \in S} \quad \text{on ominaisuudet}$$

$$p_{x,y} \geq 0 \quad \forall x,y \qquad \text{ja} \qquad \sum_{y \in S} p_{x,y} = 1 \quad \forall x.$$

P voidaan ajatella äärettömänä matriisina, jonka rivisummat ovat ykkösiä.

Hetkittäiset tilajakaumat

$$\mu_t(x) = \mathbb{P}[X_t = x]$$

on jälleen parasta ajatella vaakavektoreina, koska vaikkapa yhtälö

$$\mu_{t+1}(y) = \sum_{x \in S} \mu_t(x)\, p_{x,y}$$

on edelleen voimassa ja on formaalisti (äärettömän) vaakavektorin μ_t kertominen (äärettömällä) matriisilla $\mathbb{P}$ oikealta.

Yhtenäisyys, jaksottomuus, tasapainojakauma, jne. määritellään samaan tapaan kuin aiemmin äärellisen tilajoukon tapauksessa.

Tietyt teorian johtopäätökset kuitenkin muuttuvat. Näistä tärkeimpänä:

Äärettömän tilajoukon yhtenäisellä jaksottomalla Markov-ketjulla ei välttämättä ole tasapainojakaumaa.

Havainnollistamme ylläolevaa seuraavalla esimerkillä.

Ennen sitä toteamme vielä hieman yksityiskohtaisemmin mikä ongelman alkuperä voi olla: yhtenäisessä jaksottomassa äärettömän tilajoukon Markov-ketjussa joko

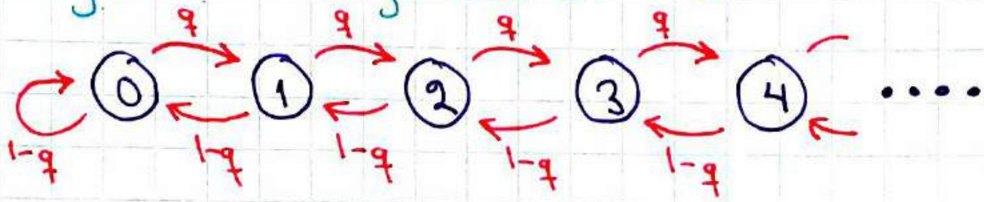
- kaikki tilat $x \in S$ ovat väistyviä, $\mathbb{P}_x[T_x^+ = +\infty] > 0$, eli ketjun on mahdollista olla koskaan palaamatta tilaan x.
- kaikki tilat $x \in S$ ovat palautuvia, $\mathbb{P}_x[T_x^+ < +\infty] = 1$, mutta paluuaika on odotusarvoltaan ääretön $\mathbb{E}_x[T_x^+] = +\infty$.
- kaikille tiloille $x \in S$ odotettu paluuaika $\mathbb{E}_x[T_x^+]$ on äärellinen, jolloin on olemassa tasapainojakauma π johon hetkittäiset tilajakaumat suppenevat

Esimerkki Tarkastellaan satunnaiskävelyä epänegatiivisilla kokonaisluvuilla $S = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ siirtymätodennäköisyyksin

$$p_{x,x+1} = q \qquad \forall x \in S$$
$$p_{x,x-1} = 1-q \qquad \forall x \in S \setminus \{0\}$$
$$p_{0,0} = 1-q$$

(muut siirtymätn:t ovat nollia)

missä $q \in (0,1)$ on parametri.
Ketjun siirtymäkaavio on



.

Ketju on yhtenäinen: tilasta x on pääsy tilaan $y > x$ yhden askeleen hypyin oikealle

$$x \to x+1 \to x+2 \to \dots \to y-1 \to y$$

ja tilaan $y < x$ hypyin vasemmalle

$$x \to x-1 \to x-2 \to \dots \to y+1 \to y$$

ja itseensä esim. $x \to x+1 \to x$.

Ketju on myös jaksoton, koska $p_{0,0} > 0$ joten tilan 0 jakso on 1 ja ketju on yhtenäinen.

Selvitämme seuraavaksi onko ketjulla tasapainojakauma $\pi = (\pi(x))_{x \in S}$.

Oletetaan aluksi $q \neq \frac{1}{2}$ ja käsitellään symmetrinen tapaus $q = \frac{1}{2}$ erikseen.

Tasapainoyhtälöt $\pi P = \pi$ ovat seuraava ääretön lineaarinen yhtälöryhmä

kun $x \geq 1$:

$$\pi(x-1) \cdot q + \pi(x+1) \cdot (1-q) = \pi(x)$$

kun $x = 0$:

$$\pi(0) \cdot (1-q) + \pi(1) \cdot (1-q) = \pi(0) .$$

Jälkimmäisestä saadaan $\pi(1) = \frac{q}{1-q} \cdot \pi(0)$.
Ensimmäinen taas on lineaarinen vakiokertoiminen differenssiyhtälö (joka ratkeaa yritteellä $x \mapsto \alpha^x$ ja lopulta $\alpha \in \{1, \frac{q}{1-q}\}$), jonka yleinen ratkaisu on

$$\pi(x) = A + B \cdot \left(\frac{q}{1-q}\right)^x \quad \text{kun} \quad x \geq 0.$$

Jälkimmäinen yhtälö vaatii $A = 0$, joten tasapainojakauma on välttämättä muotoa

$$\pi(x) = B \cdot \left(\frac{q}{1-q}\right)^x ,$$

jos sellainen ylipäänsä on olemassa.
Tasapainoyhtälön $\pi P = \pi$ lisäksi tulee vaatia todennäköisyysjakaumaehdot

$$\pi(x) \geq 0 \quad \forall x \qquad (\text{ok, jos } B \geq 0)$$

sekä

$$\sum_{x=0}^{\infty} \pi(x) = 1 .$$

Jälkimmäistä varten huomataan, että sarja $B \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{q}{1-q}\right)^x$ suppenee jos ja vain jos suhdeluku $\frac{q}{1-q} < 1$ eli $q < 1/2$, ja tällöin oikea normalisaatio on $B = \frac{1-2q}{1-q}$.

Siis:

kun $q < \frac{1}{2}$: tasapainojakauma on
$$\pi(x) = \frac{1-2q}{1-q} \left(\frac{q}{1-q}\right)^x$$
kun $q > \frac{1}{2}$: tasapainojakaumaa ei ole olemassa.

Tarkastellaan sitten vielä palautuvuuskysymystä. Olkoon $T_0 = \min\{t \geq 0 \mid X_t = 0\}$ kulkuaika origoon, ja $T_M = \min\{t \geq 0 \mid X_t = M\}$ kulkuaika tasolle M, josta oletamme $M > x$.

Uhkapelurin vararikkokaavasta saamme

$$\mathbb{P}_x[T_M < T_0] = \frac{(\frac{1-q}{q})^x - 1}{(\frac{1-q}{q})^M - 1}.$$

Kysymys origoon kulkuajan äärellisyydestä saadaan ratkaistua huomaamalla että

$$\mathbb{P}_x[T_0 = +\infty] = \mathbb{P}_x[T_0 > T_M \text{ kaikilla } M]$$

$$= \lim_{M \to \infty} \mathbb{P}_x[T_0 > T_M]$$

$$= \lim_{M \to \infty} \frac{(\frac{1-q}{q})^x - 1}{(\frac{1-q}{q})^M - 1} = \begin{cases} 0 & \text{jos } q < 1/2 \\ 1 - (\frac{1-q}{q})^x & \text{jos } q > 1/2. \end{cases}$$

Tapauksessa $q = \frac{1}{2}$ pätee vararikkokaava

$$\mathbb{P}_x[T_M < T_0] = \frac{x}{M}$$

ja voidaan samaan tapaan laskea

$$\mathbb{P}_x[T_0 = +\infty] = \lim_{M \to \infty} \frac{x}{M} = 0.$$

Palautuvuudesta voidaan siis todeta:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{kun } q \leq \frac{1}{2}: & \mathbb{P}_x[T_0 < +\infty] = 1 \\ \text{kun } q > \frac{1}{2}: & \mathbb{P}_x[T_0 = +\infty] > 0 \end{array}}.$$

Palautuvat tapaukset jakautuvat edelleen niin, että

kun $q < \frac{1}{2}$: $\mathbb{E}_x[T_0] < \infty$

kun $q = \frac{1}{2}$ ja $x > 0$: $\mathbb{E}_x[T_0] = +\infty$.

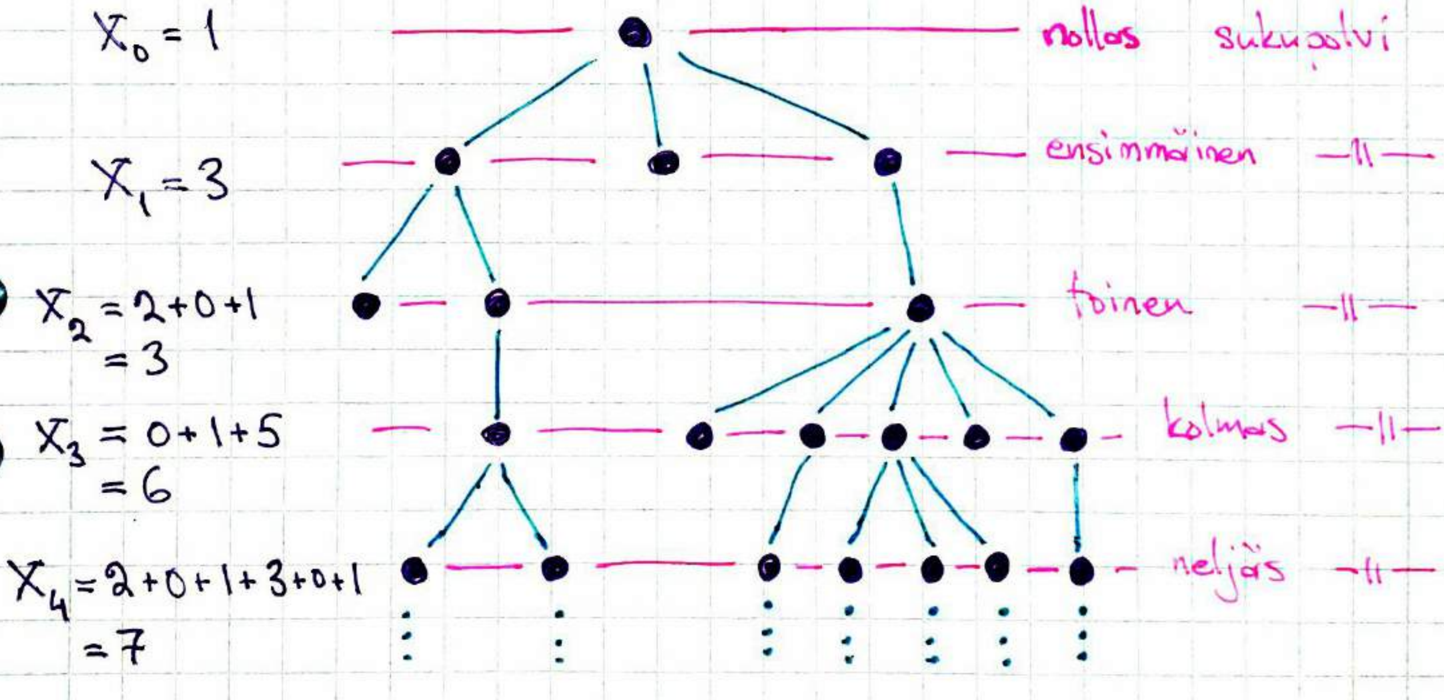
Tämän päätteleminen jätetään lukijalle harjoitukseksi.

HAARAUTOMISPROSESSIT

Kiinnostavana esimerkkinä äärettömän tilajoukon Markov-ketjuista tarkastellaan seuraavaa yksinkertaista mallia populaation koolle sukupolvittain. Sukupolvessa $t \in \mathbb{Z}_+$ on $X_t \in \mathbb{Z}_+$ yksilöä. Seuraava sukupolvi muodostuu näiden yksilöiden jälkeläisistä. Oletamme, että eri yksilöiden jälkeläisten lukumäärät noudattavat samaa jakaumaa q ja ovat keskenään riippumattomat. Siis jos $X_t = n$, on seuraavassa sukupolvessa

$$X_{t+1} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

yksilöä, missä $\mathbb{P}[Y_j = k] = q(k)$ kaikilla $j = 1,2,\dots,n$ ja $Y_1, \dots, Y_n$ ovat riippumattomat. Prosessia $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ havainnollistaa seuraava "sukupuu"



Tämän haarautumisprosessin $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ tilajoukko on

$$S = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}_+$$

ja siirtymätodennäköisyydet ovat riippumattomien jakaumaa q noudattavien termien summan jakauman pistetodennäköisyydet

$$\begin{aligned} p_{n,m} &= \mathbb{P}\left[X_{t+1} = m \mid X_t = n \right] \\ &= \mathbb{P}\left[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = m \right] \\ &= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \mathbb{P}\left[Y_1 = k_1 , Y_2 = k_2, \dots, Y_n = k_n \right] \\ &= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \\ k_1 + \dots + k_n = m}} q(k_1)\, q(k_2) \cdots q(k_n) . \end{aligned}$$

Huom.: Yo. kaavan käyttö suoraan olisi vaikeaa tai ainakin kömpelöä. Elegantti ja kätevä tapa on käyttää generoivia funktioita tämän sijasta.

Haarautumisprosessin tutkimus tuli tunnetuksi Francis Galtonin 1873 esittämästä sukunimien säilymistä koskevasta kysymyksestä, johon hän yhdessä Thomas Watsonin kanssa pari vuotta myöhemmin esitti ratkaisun. Tästä syystä haarautumisprosessia kutsutaan usein nimellä "Galton-Watson prosessi".

Huomataan, että jos sukupolvessa t ei ole yhtään yksilöä, ei seuraavaankaan sukupolveen voi tulla jälkeläisiä eli tila $0 \in S$ on absorboiva,

$$\begin{cases} p_{0,0} = 1 \\ p_{0,m} = 0 \quad \forall m \neq 0 . \end{cases}$$

Tämä tila tulkitaan population sukupuutoksi.

Populaatiotulkinnalla haarautumisprosessista on luontevaa esittää vaikkapa seuraavia kysymyksiä:

Mikä on populaation odotettu koko sukupolvessa t ?

Millä todennäköisyydellä populaatio ennen pitkää kuolee sukupuuttoon ?

Matemaattisesti ensimmäinen kysymys on odotusarvo

$$\mathbb{E}[X_t] = ?$$

ja jälkimmäinen on osumatodennäköisyys absorboivaan tilaan $0 \in S$,

$$\mathbb{P}[T_{\{0\}} < +\infty] = ?,$$

missä

$$T_{\{0\}} = \min\{t \geq 0 \mid X_t = 0\}$$
$$= \max\{t \geq 1 \mid X_{t-1} > 0\} \qquad (\text{olettaen } X_0 > 0)$$

on populaation elinaika.

GENEROIVISTA FUNKTIOISTA

Erityisesti haarautumisprosessin analyysiä varten esittelemme tässä todennäköisyysgeneroivat funktiot sekä joitakin niitä koskevia perustuloksia.

Jos Y on ei-negatiivisia kokonaislukuarvoja saava satunnaisluku $(Y : \Omega \to \mathbb{Z}_+)$ niin sen todennäköisyysgeneroiva funktio ϕ_Y määritellään potenssisarjana

$$\phi_Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \mathbb{P}[Y=k] .$$

Selvästi $\phi_Y(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[Y=k] = 1$, ja tämä sarja majoroi sarjaa $\phi_Y(z)$ kun $|z| \leq 1$, joten potenssisarja $\phi_Y(z)$ suppenee ainakin kun $|z| \leq 1$.

Suppenevaa potenssisarjaa voi derivoida termeittäin suppenemissäteen sisällä, joten voimme laskea derivaattoja pisteessä $z=0$

$$\phi_Y'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot z^{k-1} \cdot \mathbb{P}[Y=k] \quad \Rightarrow \quad \phi_Y'(0) = \mathbb{P}[Y=1]$$

$$\phi_Y''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) z^{k-2} \cdot \mathbb{P}[Y=k] \quad \Rightarrow \quad \phi_Y''(0) = 2 \cdot \mathbb{P}[Y=2]$$

jne

$$\phi_Y^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} z^{k-n} \, \mathbb{P}[Y=k] \quad \Rightarrow \quad \phi_Y^{(n)}(0) = n! \cdot \mathbb{P}[Y=n] .$$

Päättelemme tästä, että generoiva funktio ϕ_Y yksikäsitteisesti määrää satunnaisluvun Y jakauman.

Lause Satunnaisluvun Y pistetodennäköisyydet ovat

$$\mathbb{P}[Y=k] = \frac{1}{k!} \phi_Y^{(k)}(0)$$

Todistus: Saadaan suoraan ylläolevasta laskusta. □

Ylläolevaa derivaattalaskua voidaan soveltaa myös odotusarvon laskemiseen kun $z=1$,

$$\phi_Y'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}[Y=k] = \mathbb{E}[Y]$$

(täsmällinen perustelu vaatii monotonisen konvergenssin lauseen, joka esitetään kurssilla MS-E1600 Probability Theory).

Samoin varianssi ja korkeammat momentit voidaan ilmaista generoivan funktion derivaattojen avulla.

Generoivat funktiot ovat erityisen käyttökelpoisia mm. riippumattomien satunnaislukujen summan jakauman selvittämiseen.

Lause Jos X ja Y ovat epänegatiivisia kokonaislukuarvoja saavia satunnaislukuja, ja keskenään riippumattomia, niin satunnaisluvun $X+Y$ todennäköisyysgeneroiva funktio ϕ_{X+Y} saadaan tulona

$$\phi_{X+Y}(z) = \phi_X(z) \cdot \phi_Y(z).$$

Todistus: Lasketaan

$$\phi_{X+Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \mathbb{P}[X+Y=k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{l=0}^{k} \underbrace{\mathbb{P}[X=l, Y=k-l]}_{= \mathbb{P}[X=l] \cdot \mathbb{P}[Y=k-l]}$$

riippumattomuus!

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} z^l \cdot z^{k-l} \cdot \mathbb{P}[X=l] \, \mathbb{P}[Y=k-l]$$

$(j=k-l)$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} z^l z^j \, \mathbb{P}[X=l] \, \mathbb{P}[Y=j]$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{\infty} z^l \, \mathbb{P}[X=l] \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} z^j \, \mathbb{P}[Y=j] \right) = \phi_X(z) \, \phi_Y(z).$$

$\square$

Täysin samaan tapaan todetaan useamman riippumattoman satunnaismuuttujan $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ tapauksessa

$$\phi_{Y_1+Y_2+\dots+Y_n}(z) = \phi_{Y_1}(z) \cdot \phi_{Y_2}(z) \cdot \dots \cdot \phi_{Y_n}(z).$$

Erityisesti, jos riippumattomat satunnaismuuttujat $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ noudattavat kaikki samaa jakaumaa kuin Y, on

$$\phi_{Y_1+\dots+Y_n}(z) = \left(\phi_Y(z)\right)^n.$$

Seuraava lause yleistää tämän vielä tapaukseen, jossa summattavien lukumäärä on satunnainen.

<u>Lause 5.8</u> Olkoot $Y_1, Y_2, \dots$ riippumattomia samoin jakautuneita epänegatiivisia kokonaislukuarvoja saavia satunnaislukuja, joiden generoiva funktio on ϕ_Y. Jos N on näistä riippumaton epänegatiivisia kokonaislukuarvoja saava satunnaisluku, niin summan

$$Z = \sum_{j=1}^{N} Y_j$$

generoiva funktio on

$$\phi_Z(z) = \phi_N(\phi_Y(z)).$$

<u>Todistus</u>: Lasketaan, summan termien lukumäärälle ehdollistaen

$$\begin{aligned}
\phi_Z(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \mathbb{P}\left[\sum_{j=1}^{N} Y_j = k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N=n] \cdot \mathbb{P}\left[Y_1+Y_2+\dots+Y_n = k \,\middle|\, N=n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N=n] \sum_{k=0}^{\infty} z^k \, \mathbb{P}\left[Y_1+Y_2+\dots+Y_n = k\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N=n] \left(\phi_Y(z)\right)^n = \phi_N(\phi_Y(z)).
\end{aligned}$$

$\square$

Haarautumisprosessin populaation odotettu koko

Aloitetaan helpommasta kysymyksestä: populaation t:nnen sukupolven odotusarvoisesta koosta

$$\mathbb{E}[X_t]$$

Galton-Watson haarautumisprosessissa jälkeläisjakaumalla q. Osoittautuu, että relevantein parametri on yhden yksilön jälkeläisten lukumäärän Y odotusarvo

$$m_Y := \mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}[Y=k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot q(k).$$

Osoitamme seuraavaksi, että populaation odotettu koko kasvaa eksponentiaalisesti jos $m_Y > 1$ ja lähestyy nollaa eksponentiaalisesti jos $m_Y < 1$.

Lause 5.9. Tilasta $X_0 = x$ käynnistyvälle Galton-Watson haarautumisprosessille t:nnen sukupolven odotettu koko on

$$\mathbb{E}[X_t] = x \cdot m_Y^t .$$

Todistus: Ehdollistamalla ajanhetken t tilan X_t suhteen saadaan

$$\mathbb{E}[X_{t+1} \mid X_t = y] = \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{y} Y_j \,\Big|\, X_t = y\Big]$$
$$= \sum_{j=1}^{y} \mathbb{E}[Y_j \mid X_t = y] = y \cdot m_Y .$$

Siten

$$\mathbb{E}[X_{t+1}] = \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{P}[X_t = y] \cdot \mathbb{E}[X_{t+1} \mid X_t = y]$$
$$= \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{P}[X_t = y] \cdot y \cdot m_Y = m_Y \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot \mathbb{P}[X_t = y]$$
$$= m_Y \cdot \mathbb{E}[X_t].$$

Tästä induktiolla seuraa $\mathbb{E}[X_t] = m_Y^t \cdot \mathbb{E}[X_0]$.

□

Sukupuuton todennäköisyys

Haarautumisprosessissa kulkuaikaa

$$T_{\{0\}} = \min\{t \geq 0 \mid X_t = 0\}$$

absorboivaan tilaan 0 kutsutaan populaation elinajaksi. Sukupuuton todennäköisyys on

$$\mathbb{P}\left[T_{\{0\}} < +\infty\right].$$

Jos populaation koko aluksi on $X_0 = x$ yksilöä, voidaan koko populaatio ajatella koostuvaksi x:stä riippumattomasta alipopulaatiosta, kunkin alkuperäisen yksilön kaikkien sukupolvien jälkeläisistä. Koko populaatio kuolee sukupuuttoon jos ja vain jos jokainen näistä alipopulaatioista kuolee, joten

$$\mathbb{P}_x\left[T_{\{0\}} < +\infty\right] = \eta^x$$

missä

$$\eta = \mathbb{P}_1\left[T_{\{0\}} < +\infty\right]$$

on yhden alkuyksilön haarautumisprosessin sukupuuttotodennäköisyys. Riittää siis selvittää η.

Merkitään jälkeläisten jakauman generoivaa funktiota

$$\phi_Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q(k)\, z^k .$$

Lause 5.10 Tilasta 1 käynnistyvän Galton-Watson haarautumisprosessin sukupuuttotodennäköisyys η on yhtälön

$$\phi_Y(z) = z$$

pienin epänegatiivinen ratkaisu.

Ennen todistusta annamme vielä esimerkkisovelluksen sekä tarvittavan aputuloksen.

<u>Esimerkki</u> Oletetaan, että kukin yksilö saa kaksi jälkeläistä todennäköisyydellä $\alpha \in (0,1)$ ja muussa tapauksessa ei saa yhtään jälkeläistä

$$q(k) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{jos } k=0 \\ \alpha & \text{jos } k=2 \\ 0 & \text{jos } k \neq 0 \text{ ja } k \neq 2 \end{cases}$$

Jälkeläisten lukumäärän generoiva funktio on tällöin
$$\phi_Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot q(k) = (1-\alpha) + \alpha \cdot z^2 .$$

Kiintopisteyhtälöllä
$$\phi_Y(z) = z \qquad \text{eli} \qquad 1-\alpha+\alpha z^2 = z$$
on kaksi ratkaisua
$$z_\pm = \frac{1}{2\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1-4\alpha(1-\alpha)}\right) = \frac{1 \pm \sqrt{(1-2\alpha)^2}}{2\alpha}$$
eli $z_+ = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ ja $z_- = 1$. Molemmat ratkaisut ovat epänegatiivisia kun $\alpha \in (0,1)$, mutta se, kumpi on pienempi, riippuu parametrista α. Eri tapauksissa sukupuuton todennäköisyydeksi saadaan

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{jos } \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} & \text{jos } \alpha > \frac{1}{2} . \end{cases}$$

Todistamme sitten aputuloksen, jolla eri sukupolvien kokojen generoivat funktiot saadaan laskettua.

<u>Lemma 5.12</u> Olkoon $\phi_{X_t}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \mathbb{P}[X_t = k]$ t:nnen sukupolven yksilöiden lukumäärän generoiva funktio. Silloin:

(i) $\phi_{X_{t+1}} = \phi_{X_t} \circ \phi_Y$

(ii) Jos $X_0 = 1$, niin $\phi_{X_t} = \underbrace{\phi_Y \circ \cdots \circ \phi_Y}_{t \text{ kpl}}$

ja siksi pätee myös
$$\phi_{X_{t+1}} = \phi_Y \circ \phi_{X_t} .$$

Todistus: Väite (i) seuraa Lauseesta 5.8, koska sukupolven $t+1$ koko X_{t+1} on summa jakaumaa q (gener. funktio ϕ_Y) noudattavista termeistä, joita on X_t kappaletta, ja termit ovat riippumattomia X_t:stä.

Väitettä (ii) varten huomataan alkuehdon $X_0 = 1$ pätiessä $\phi_{X_0}(z) = z$ (eli $\phi_{X_0} = \mathrm{id}$), jolloin kohdan (i) kaavasta $\phi_{X_{t+1}} = \phi_{X_t} \circ \phi_Y$ induktiivisesti seuraa

$$\phi_{X_t} = \underbrace{\phi_Y \circ \cdots \circ \phi_Y}_{t \text{ kpl}} . \qquad \square$$

Lauseen 5.10. todistus: Muistutetaan aluksi tilan 0 olevan absorboiva, ja siksi tapahtuma $\{X_t = 0\}$ implikoi aina tapahtuman $\{X_{t+1} = 0\}$. Tästä saadaan kasvava jono tapahtumia

$$\{X_1 = 0\} \subseteq \{X_2 = 0\} \subseteq \{X_3 = 0\} \subseteq \cdots \subseteq \{X_t = 0\} \subseteq \cdots$$

Kirjoitetaan sitten sukupuuton todennäköisyys muodossa

$$\eta = \mathbb{P}_1\left[T_{\{0\}} < +\infty\right] = \mathbb{P}_1\left[\exists t \in \mathbb{Z}_+ \text{ s.e. } X_t = 0\right]$$
$$= \mathbb{P}_1\Big[\bigcup_{t \in \mathbb{Z}_+} \{X_t = 0\}\Big].$$

Tämä todennäköisyys on siis ylläolevan kasvavan tapahtumajonon todennäköisyys, ja silloin todennäköisyyden aksioomista (kts. kurssi "MS-E1660 Probability Theory") seuraa

$$\eta = \mathbb{P}_1\Big[\bigcup_{t \in \mathbb{Z}_+} \{X_t = 0\}\Big] = \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}_1\left[X_t = 0\right].$$

Koska todennäköisyysgeneroivat funktiot ovat jatkuvia (suppenevina potenssisarjoina), voidaan Lemman 5.12 perusteella laskea

$$\eta = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_1[X_t = 0]$$
$$= \lim_{t\to\infty} \phi_{X_t}(0) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{(\phi_Y \circ \cdots \circ \phi_Y)}_{t \text{ kpl}}(0)$$
$$= \lim_{t\to\infty} \phi_Y\Big(\underbrace{(\phi_Y \circ \cdots \circ \phi_Y)}_{t-1 \text{ kpl}}(0)\Big)$$
$$= \lim_{t\to\infty} \phi_Y(\phi_{X_{t-1}}(0)) = \phi_Y\big(\lim_{t\to\infty} \phi_{X_{t-1}}(0)\big)$$
$$= \phi_Y\big(\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_1[X_{t-1} = 0]\big) = \phi_Y(\eta).$$

Siis η on funktion ϕ_Y kiintopiste, $\phi_Y(\eta) = \eta$. Osoitetaan sitten, että jos $\alpha \geq 0$ on mikä tahansa ϕ_Y:n epänegatiivinen kiintopiste, $\phi_Y(\alpha) = \alpha$, niin $\eta \leq \alpha$. Keskeisin huomio on, että generoiva funktio

$$\phi_Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot q(k)$$

on kasvava kun $z \geq 0$ (jokainen sarjan termi on kasvava). Epäyhtälö

$$0 \leq \alpha$$

säilyy soveltamalla kasvavaa funktiota ϕ_Y

$$\phi_Y(0) \leq \phi_Y(\alpha) = \alpha.$$

Edelleen tähän soveltamalla funktiota ϕ_Y

$$\phi_Y(\phi_Y(0)) \leq \phi_Y(\alpha) = \alpha$$

ja niin edelleen kaikilla t

$$\underbrace{(\phi_Y \circ \cdots \phi_Y)}_{t \text{ kpl}}(0) \leq \alpha$$

Mutta vasen puoli on aiemman laskun perusteella todennäköisyys $\mathbb{P}[X_t = 0]$, joten rajalla $t \to \infty$ saadaan

$$\eta = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}[X_t = 0] \leq \alpha. \qquad \square$$

Karakterisoidaan vielä tapaukset, joissa sukupuutto varmasti tapahtuu ennen pitkää, ja tapaukset joissa populaatio voi säilyä hengissä loputtomiin.

Lause 5.13 Olkoon $m_Y = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot q(k)$ yhden yksilön jälkeläisten lukumäärän odotusarvo. Oletetaan lisäksi, että $q(0) > 0$, eli että yksilön on mahdollista olla saamatta jälkeläisiä. Silloin sukupuuttotodennäköisyydelle η pätee parametristä m_Y riippuen:

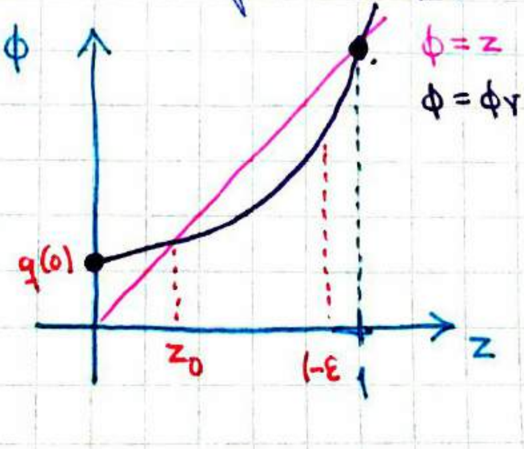
(i) jos $m_Y \leq 1$, niin $\eta = 1$ (varma sukupuutto)

(ii) jos $m_Y > 1$, niin $\eta < 1$.

Todistus: Generoivasta funktiosta $\phi_Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k q(k)$ todetaan seuraavat seikat:

$$\phi_Y(0) = q(0) > 0$$
$$\phi_Y(1) = \sum_k q(k) = 1$$
$$\phi_Y'(1) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot z^{k-1} \cdot q(k) \right)\Big|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q(k) = m_Y.$$

Todistetaan ensin väite (ii).
Koska $\phi_Y(1) = 1$ ja $\phi_Y'(1) = m_Y > 1$, on olemassa jokin pieni $\varepsilon > 0$ siten, että $\phi_Y(1-\varepsilon) < 1-\varepsilon$. Toisaalta $\phi_Y(0) > 0$, joten väliarvolauseen perusteella on olemassa $z_0 \in (0, 1-\varepsilon)$ siten, että $\phi_Y(z_0) = z_0$.
Lauseen 5.10 perusteella sitten $\eta \leq z_0 < 1-\varepsilon < 1$.



Kuva tapauksessa (ii)

Todistetaan sitten väite (i).

Jos $q(k) = 0 \quad \forall k \geq 2$, niin generoiva funktio on suora $\phi_Y(z) = q(0) + q(1)z$ ja ainoa kiintopiste on $z = 1$. Voidaan siis olettaa, että $q(k) > 0$ jollakin $k \geq 2$. Silloin toinen derivaatta

$$\phi_Y''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} q(k)$$

on aidosti positiivinen kaikilla $z \in (0,1)$. Koska $\phi_Y'(1) = m_Y \leq 1$, on tästä johtuen $\phi_Y'(z) < 1$ kaikilla $z \in (0,1)$. Jos $z_0 \in [0,1)$, niin differentiaalilaskennan väliarvolauseesta seuraa, että

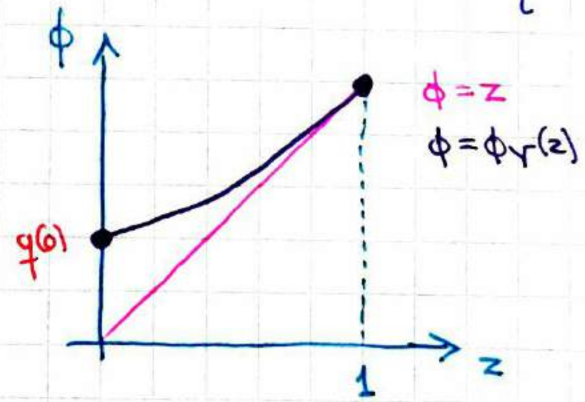
$$\frac{\phi_Y(1) - \phi_Y(z_0)}{1 - z_0} = \phi_Y'(\xi) \qquad \text{jollakin } \xi \in (z_0, 1)$$

joten

$$\frac{\phi_Y(1) - \phi_Y(z_0)}{1 - z_0} < 1$$

eli $\phi_Y(z_0) > z_0$. Siis mikään välin $[0,1)$ piste ei ole kiintopiste, joten pienin kiintopiste on

$$\eta = 1.$$



Kuva tapauksessa (i).

$\square$

MARTINGAALIT JA INFORMAATIOPROSESSIT

Siirrymme seuraavaksi tarkastelemaan stokastisten prosessien luokkaa, josta käytetään termiä martingaalit. Näiden määrittelevä ominaisuus sanoo arkikielellä, että paras ennuste prosessin arvolle tulevaisuudessa (nykyhetkeen asti saatavilla olevan informaation valossa) on prosessin nykyarvo. Tämän tulkinnan takia tehokkailla markkinoilla vaihdettujen arvopapereiden hintaprosessien voidaan perustella olevan martingaaleja. Martingaaleilla on finanssisovellusten lisäksi myös merkittävästi teoreettista käyttöä matematiikassa ja tilastotieteessä.

Informaation käsite oli jo Markov-ketjujen määritelmän taustalla: Markov-prosessin tulevien tilojen todennäköisyydet nykyhetkeen asti käytettävissä olevan informaation (prosessista itsestään) valossa riippuivat vain nykytilasta. Martingaaleille informaatio on vielä keskeisemmässä roolissa, tai ainakin sitä käytetään syvällisemmällä tavalla. Korostettakoon jo näin etukäteen seuraavia seikkoja:

- pelkkien ehdollisten todennäköisyyksien sijasta tulemme käyttämään ehdollisia odotusarvoja ("parhaita ennusteita tietyn informaation valossa")
- tarkastelemme informaatiota abstraktisti ulkopuolisen havainnoijan näkökulmasta, joka tietää mitä informaatiota ennustukseen käytetään, mutta jolla ei ole tätä informaatiota käytettävissään
- sallimme annetulla hetkellä käytettävissä olevan informaation sisältävän mahdollisesti muutakin kuin prosessimme nykyisen ja menneet arvot.

Ehdollinen odotusarvo informaation suhteen

Käsitteiden havainnollistamiseksi oletetaan aluksi, että X ja Y ovat äärellistilaisia, mahdollisesti toisistaan riippuvia satunnaislukuja.

$$\left(\begin{array}{ll} X : \Omega \to \mathcal{X} \subset \mathbb{R} & Y : \Omega \to \mathcal{Y} \subset \mathbb{R} \\ \mathcal{X}, \mathcal{Y} \text{ äärellisiä reaalilukujen osajoukkoja} & \end{array} \right)$$

Satunnaisluvun Y odotusarvo

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \cdot \mathbb{P}[Y = y]$$

on ulkopuolisen havainnoijan "paras ennuste" (yksittäinen lukuarvo) satunnaisluvun Y arvolle, kun taas ehdollinen odotusarvo

$$\mathbb{E}[Y \mid X = x] = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \cdot \mathbb{P}[Y = y \mid X = x]$$

voidaan tulkita sellaisen sisäpiiriläisen "parhaaksi (lukuarvoiseksi) ennusteeksi", joka tietää että $X = x$.

Haluamme kuitenkin käsitellä informaatiota abstraktimmin kuin vain ehdollistamalla tietylle tapahtumalle (kuten tapahtuma $\{X = x\}$ yllä). Haluamme erityisesti tarkastella ehdollista odotusarvoa

$$\mathbb{E}[Y \mid X],$$

joka olisi "paras ennuste" Y:n arvolle sellaisen sisäpiiriläisen näkökulmasta, joka tietää satunnaisluvun X arvon. Tämä ennuste riippuu toki satunnaisesta realisaatiosta X:n arvolle, ja ennuste itsessään on siksi ulkopuolisen havainnoijan näkökulmasta satunnaisluku, joka kuitenkin määräytyy täysin X:n satunnaisesta arvosta. Siis satunnaisluvun Y ehdollinen odotusarvo satunnaisluvun X sisältämän informaation suhteen on satunnaisluku

$$\mathbb{E}[Y \mid X] = h(X),$$

missä h on sopivasti valittu $\underbrace{\text{deterministinen}}_{\text{ei-satunnainen}}$ funktio.

Funktion h arvo pisteessä x on nimenomaan ehdollinen odotusarvo

$$h(x) = \mathbb{E}[Y \mid X = x] = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \cdot \mathbb{P}[Y = y \mid X = x]$$

tapahtuman $\{X = x\}$ sattuessa.

Huom: Erottele ylläolevassa huolellisesti käsitteet

- ehdollinen odotusarvo tapahtuman sattuessa
  (lukuarvoinen "paras ennuste")
  (esim. $\mathbb{E}[Y \mid X = x]$)
- ehdollinen odotusarvo information suhteen
  (satunnaisluku, joka määräytyy information realisaatiosta)
  (esim. $\mathbb{E}[Y \mid X]$).

Huom: Täsmällinen notaatio vähentäisi sekaannuksen vaaraa ylläolevassa. Muistetaan, että tapahtumat ovat todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathbb{P})$ perusjoukon Ω osajoukkoja, ja satunnaisluvut / -muuttujat perusjoukolla Ω määriteltyjä funktioita.

(Satunnainen realisaatio $\omega \in \Omega$ määrää sattuuko tapahtuma $A \subset \Omega$ vai ei ($\omega \in A$ vai $\omega \notin A$) ja määrää satunnaisluvun $X : \Omega \to \mathbb{R}$ arvon $X(\omega)$.)

Erityisesti notaatio $X = x$ on vain lyhennysmerkintä tapahtumalle

$$\{\omega' \in \Omega \mid X(\omega') = x\} \subset \Omega.$$

Kun deterministinen funktio $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ on määritelty kaavalla $h(x) = \sum_y y \cdot \frac{\mathbb{P}[Y = y \text{ ja } X = x]}{\mathbb{P}[X = x]}$ on satunnaisluvun $h(X)$ arvo realisaation $\omega \in \Omega$ sattuessa luku $h(X(\omega))$ eli $h(X)$ tosiaan on perusjoukolla määritelty (yhdistetty) funktio

$$h(X) = h \circ X : \quad \begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{X} & \mathcal{X} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) & \longmapsto & h(X(\omega)) \end{array} .$$

<u>Esimerkki</u> Kahdelle pelaajalle, 1 ja 2, jaetaan 52 kortin korttipakasta molemmille 5 korttia. Pelaajat katsovat omat korttinsa, mutta eivät näe toistensa korttejä. Olkoon X_i pelaajan $i=1,2$ kädessä olevien herttojen lukumäärä.

Huomataan ensinnäkin, että ulkopuolisen tarkkailijan (joka ei ole nähnyt jaettuja korttejä) odottama lukumäärä vaikkapa pelaajan 2 hertoille on

$$\mathbb{E}[X_2] = 5 \cdot \frac{13}{52} = 1{,}25.$$

Jos pelaajalla 1 on k herttaa omassa kädessään, on hänen odottama pelaajan 2 herttojen lukumäärä

$$\mathbb{E}[X_2 \mid X_1 = k] = \sum_{j=0}^{5} j \cdot \mathbb{P}[X_2 = j \mid X_1 = k]$$

$$= \sum_{j=0}^{5} j \cdot \frac{\binom{13-k}{j}\binom{47-13+k}{5-j}}{\binom{47}{5}} = \frac{5}{47}(13-k).$$

Tällöin ulkopuolisen tarkkailijan näkökulmasta pelaajan 1 odottama pelaajan 2 herttojen lukumäärä on (satunnaisluku)

$$\mathbb{E}[X_2 \mid X_1] = \frac{5}{47}(13 - X_1),$$

mikä riippuu pelaajan 1 herttojen lukumäärästä X_1, jota ulkopuolinen tarkkailija ei kuitenkaan tunne.

Lopuksi toteamme vielä, että ulkopuolisen tarkkailijan näkökulmasta pelaajan 2 itsensä odottama omien herttojensa lukumäärä on

$$\mathbb{E}[X_2 \mid X_2] = X_2, \qquad \text{(satunnaisluku)}$$

koska tarkkailija tietää pelaajan 2 tietävän omien herttojensa määrän, vaikka tarkkailijalle tämä määrä onkin tuntematon ja satunnainen.

Ehdollinen odotusarvo vektoriarvoisen informaation suhteen määritellään samalla periaatteella. Olkoot $X_1, \dots, X_n$ ja Y äärellistilaisia, mahdollisesti toisistaan riippuvia satunnaislukuja. Tällöin Y:n ehdollinen odotusarvo satunnaisvektorin $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ sisältämän informaation suhteen on

"ulkopuolisen havainnoijan näkemyksen mukainen paras sellaisen sisäpiiriläisen ennuste Y:n arvolle, joka tuntee satunnaisvektorin $X = (X_1, \dots, X_n)$ arvon"

$$\mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2, \dots, X_n] = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

missä deterministinen funktio

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

on määritelty kaavalla

$$h(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{E}[Y \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

$$= \sum_y y \cdot \mathbb{P}[Y = y \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n].$$

Huomautetaan vielä, että jos $\mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = 0$, ei ehdollinen todennäköisyys yllä ole hyvin määritelty, mutta myöskin ulkopuolisen tarkkailijan näkökulmasta tapahtuma $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ on "mahdoton" (sen tn on nolla), joten tarkkailijan on tarpeetonta edes miettiä, millainen sisäpiiriläisen ennuste olisi "mahdottomassa tilanteessa".

Ehdollisen odotusarvon laskusääntöjä

Oletetaan edelleen, että kaikki tarkastellut satunnaismuuttujat saavat arvoja äärellisissä tilajoukoissa.

Informaation käsittelyä varten otetaan käyttöön lyhennysmerkintä

$$Z \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

jos $Z = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ jollakin deterministisellä funktiolla h.

Lause 6.3. Äärellisen tilajoukon satunnaisluvuille (sekä yleisemmin Lauseen 6.6 ehdoin) pätee:

(i) harhattomuus:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Y \mid X_1, \dots, X_n]\right] = \mathbb{E}[Y]$$

(ii) tunnetun arvon ulosveto: jos $Z \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$

niin $\mathbb{E}[Z \cdot Y \mid X_1, \dots, X_n] = Z \cdot \mathbb{E}[Y \mid X_1, \dots X_n]$

(iii) riippumattoman informaation huomiotta jättäminen: jos Y ja $(X_1, \dots, X_n)$ ovat riippumattomia, niin $\mathbb{E}[Y \mid X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[Y]$

(iv) päällekkäisen informaation huomiotta jättäminen: jos $Z_1, \dots, Z_m \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$ niin

$$\mathbb{E}[Y \mid X_1, \dots, X_n, Z_1, \dots, Z_m] = \mathbb{E}[Y \mid X_1, \dots, X_n].$$

Ehdollisen odotusarvon yleisestä määritelmästä

Jos satunnaisluku X on jatkuva, funktiota h ei voida suoraan määritellä kaavalla $h(x) = \mathbb{E}[Y \mid X = x]$ koska $\mathbb{P}[X = x] = 0$ kaikilla x. Yleispätevä määritelmä lähtee seuraavasta havainnosta:

Lemma 6.4. (Ehdollinen harhattomuus) Jokaiselle äärellisen tilajoukon satunnaisvektorille X ja satunnaisluvulle Y satunnaisluku

$$\hat{Y} = \mathbb{E}[Y \mid X]$$

toteuttaa

$$\mathbb{E}[\hat{Y} \mid X \in A] = \mathbb{E}[Y \mid X \in A]$$

kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$ joille $\mathbb{P}[X \in A] > 0$.

Yleinen ehdollisen odotusarvon määritelmä perustuu tällaisten satunnaismuuttujien $\hat{Y}$ olemassaoloon ja yksikäsitteisyyteen (lukuunottamatta nollatodennäköisyyksisiä tapahtumia).

Lause 6.5. Jos $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, niin on olemassa yksikäsitteinen (lukuunottamatta nollatn...) satunnaisluku

$$\hat{Y} \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

siten, että $\mathbb{E}[|\hat{Y}|] < \infty$ ja

$$\mathbb{E}[\hat{Y} \mid X \in A] = \mathbb{E}[Y \mid X \in A]$$

kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$ joille $\mathbb{P}[X \in A] > 0$.

Tämän lauseen todistus vaatisi kurssin "MS-E1660 Probability Theory" käsitteitä ja tekniikoita. Lauseen perusteella ehdollinen odotusarvo

$$\mathbb{E}[Y \mid X_1, \dots, X_n] := \hat{Y} \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

voidaan kuitenkin määritellä aina kun satunnaisluku Y on integroituva eli $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.

Lause 6.6: Kun satunnaisluvut $Y, Y_1, Y_2, \dots, Z, YZ$ ovat integroituvia, niille pätee Lauseen 6.3 ominaisuudet ja lisäksi

- ehdollinen harhattomuus

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2] \,\big|\, X_1\big] = \mathbb{E}[Y \mid X_1]$$

- ehdollinen riippumattoman informaation huomiotta jättö: kun $X_2 \perp\!\!\!\perp (X_1, Y)$

$$\mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2] = \mathbb{E}[Y \mid X_1]$$

- lineaarisuus: kaikilla $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[a_1 Y_1 + a_2 Y_2 \mid X] = a_1 \mathbb{E}[Y_1 \mid X] + a_2 \mathbb{E}[Y_2 \mid X]$$

- monotonisuus: jos $Y_1 \leq Y_2$ niin

$$\mathbb{E}[Y_1 \mid X] \leq \mathbb{E}[Y_2 \mid X]$$

- dominoitu konvergenssi: jos $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ on jono satunnaislukuja jolle $|Y_n| \leq Z$ jollakin integroituvalla Z ja kaikilla n ja jos $Y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} Y$, niin $\mathbb{E}[Y_n \mid X] \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E}[Y \mid X]$.

MARTINGAALIN MÄÄRITELMÄ

Satunnaisjono $(M_0, M_1, M_2, \dots)$ on satunnaisjonon $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ suhteen *martingaali*, jos

(i) $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty \quad \forall t \in \mathbb{Z}_+$

(ii) $M_t \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_t)$

(iii) $\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_0, X_1, \dots, X_t] = M_t$.

Edellisellä kerralla käsiteltiin ehdollista odotusarvoa. Korostetaan vielä erottelua:

- ehdollinen odotusarvo tietyn tapahtuman sattuessa on luku

  (äärellistilaisille X ja Y, tapahtuman $\{X=x\}$ sattuessa

  $$\mathbb{E}[Y \mid X=x] = \sum_y y \cdot \frac{\mathbb{P}[Y=y, X=x]}{\mathbb{P}[X=x]} \quad)$$

- ehdollinen odotusarvo informaation suhteen on satunnaisluku

  (äärellistilaisille X ja Y, satunnaisluvun X generoiman informaation suhteen

  $$\mathbb{E}[Y \mid X] = h(X)$$

  missä $h(x) = \mathbb{E}[Y \mid X=x] = \sum_y y \cdot \frac{\mathbb{P}[Y=y, X=x]}{\mathbb{P}[X=x]}$.)

Otettiin myös käyttöön lyhennysmerkintä

$$Y \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$\Updownarrow$$

$$Y = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$ jollakin deterministisellä funktiolla h.

Yleisesti, satunnaisluvun Y ehdollinen odotusarvo informaation suhteen voidaan määritellä jos Y on integroituva eli jos $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, ja tällöin ehdollisille odotusarvoille

$$\mathbb{E}[Y \mid X_1, \ldots, X_n] \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$$

on muun muassa seuraavat tärkeät ominaisuudet.

Lauseet 6.3 ja 6.6. Ehdollisille odotusarvoille pätee:

"Harhattomuus": $$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big] = \mathbb{E}[Y]$$

"Ehdollinen harhattomuus":
$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X_1, X_2] \,\big|\, X_1\big] = \mathbb{E}[Y|X_1].$$

"Tunnetun arvon ulosveto": Jos $Z \in \sigma(X)$, niin
$$\mathbb{E}[Y \cdot Z \,|\, X] = Z \cdot \mathbb{E}[Y|X].$$

"Riippumattoman informaation huomiotta jättäminen":
Jos $X \perp\!\!\!\perp Y$, niin $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$.

"Ehdollinen riippumattoman informaation huomiotta jättäminen":
Jos $X_2 \perp\!\!\!\perp (Y, X_1)$, niin $\mathbb{E}[Y|X_1, X_2] = \mathbb{E}[Y|X_1]$.

"Päällekkäisen informaation huomiotta jättäminen":
Jos $X_2 \in \sigma(X_1)$, niin $\mathbb{E}[Y|X_1, X_2] = \mathbb{E}[Y|X_1]$

"Lineaarisuus": Kaikilla $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}[a_1 Y_1 + a_2 Y_2 \,|\, X] = a_1 \mathbb{E}[Y_1|X] + a_2 \mathbb{E}[Y_2|X].$$

"Monotonisuus": Jos $Y_1 \leq Y_2$, niin
$$\mathbb{E}[Y_1|X] \leq \mathbb{E}[Y_2|X].$$

"Dominoitu konvergenssi": Jos $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Y$ ja jollakin integroituvalla satunnaisluvulla Z ja kaikilla n pätee $|Y_n| \leq Z$, niin
$$\mathbb{E}[Y_n|X] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[Y_n|X].$$

Sanomme, että stokastinen prosessi $(M_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ on informaatioprosessin $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ suhteen martingaali, jos pätee

(i) integroituvuus: $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty, \ \forall t \in \mathbb{Z}_+$

(Tämä on lähinnä tekninen oletus, jolla taataan tarvittavien ehdollisten odotusarvojen olemassaolo.)

(ii) informaatioon sopivuus: $M_t \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_t), \ \forall t$

(Tulkinta: "Prosessin arvo M_t hetkellä t määräytyy tuolla hetkellä käytettävissä olevasta informaatiosta")

(iii) martingaaliominaisuus: $\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_0, \dots, X_t] = M_t, \ \forall$

(Tulkinta: "Paras ennuste prosessin tulevalle arvolle, nykyhetkeen asti käytettävissä olevan informaation valossa, on prosessin nykyarvo".)

Käsittelemme myös seuraavia kahta varianttia y.o. määritelmästä.

Prosessi (M_t) on (X_t):n suhteen ylimartingaali jos pätee (i), (ii) ja

(iii)': $\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_0, \dots, X_t] \le M_t \qquad \forall t.$

Vastaavasti (M_t) on (X_t):n suhteen alimartingaali jos pätee (i), (ii) ja

(iii)'': $\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_0, \dots, X_t] \ge M_t \qquad \forall t.$

Esimerkki Olkoot $X_1, X_2, \dots$ riippumattomia, samoin jakautuneita, integroituvia satunnaislukuja odotusarvonaan $m = \mathbb{E}[X_s]$. Silloin kaavan

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^{t} X_s \qquad (M_0 = \text{vakio})$$

määrittelemä stokastinen prosessi $(M_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on informaatioprosessin (X_t) suhteen

- martingaali, jos $m = 0$
- ylimartingaali, jos $m \leq 0$
- alimartingaali, jos $m \geq 0$.

Nimittäin, määritteleviä ehtoja varten

- integroituvuus: kolmioepäyhtälöllä

$$\mathbb{E}[|M_t|] = \mathbb{E}[|M_0 + X_1 + \dots + X_t|]$$

$$\leq \mathbb{E}[|M_0|] + \mathbb{E}[|X_1|] + \dots + \mathbb{E}[|X_t|]$$

$$= M_0 + t \cdot m < \infty$$

- sopivuus informaatioon: selvästi $M_t = M_0 + X_1 + \dots + X_t$ on deterministinen funktio arvoista $X_1, \dots, X_t$.

- martingaaliominaisuus (tai yli-/alimgaaliomin.):

lineaarisuus

$$\mathbb{E}[M_{t+1} | X_1, \dots, X_t] = \mathbb{E}[M_t + X_{t+1} | X_1, \dots, X_t]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[M_t | X_1, \dots, X_t]}_{= M_t \text{ tunnetun arvon ulosvedolla}} + \underbrace{\mathbb{E}[X_{t+1} | X_1, \dots, X_t]}_{= \mathbb{E}[X_{t+1}] = m \text{ riippumattoman information huomiotta jättämisellä}}$$

$$= M_t + m .$$

Väitteet seuraavat tästä.

Usein on tapana sanoa, että prosessi $(M_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on martingaali, ottamatta kantaa taustalla olevaan informaatioprosessiin. Tällöin tarkoitetaan, että prosessi $(M_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on martingaali itsensä suhteen, eli

$$\mathbb{E}[|M_t|] < \infty \qquad \forall t$$

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid M_0, M_1, \dots, M_t] = M_t \qquad \forall t$$

(ja triviaalisti $M_t \in \sigma(M_0, \dots, M_t)$). Seuraava tulos selventänee tätä terminologian käyttöä.

<u>Lause 6.9.</u> Jos $(M_0, M_1, \dots)$ on martingaali jonkin informaatioprosessin $(X_0, X_1, \dots)$ suhteen, on se myös martingaali itsensä suhteen.

<u>Todistus</u>: Oletetaan, että $(M_0, M_1, \dots)$ on martingaali informaatioprosessin $(X_0, X_1, \dots)$ suhteen. Erityisesti $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ kaikilla t, joten integroituvuusominaisuus on voimassa. Aina triviaalisti $M_t \in \sigma(M_0, M_1, \dots, M_t)$, joten tarkistettavaksi jää enää varsinainen martingaaliominaisuus.

Merkitään $X_{s:t} = (X_s, X_{s+1}, \dots, X_{t-1}, X_t)$ ja vastaavasti prosessista M muodostetuille satunnaisvektoreille. Ehdollisen harhattomuuden perusteella

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid M_{0:t}] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}, M_{0:t}] \Big| M_{0:t}\Big].$$

Koska $M_{0:t} \in \sigma(X_{0:t})$, saadaan päällekkäisen informaation huomiotta jättämisominaisuudella

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}, M_{0:t}] &= \mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}] \\ &= M_t \qquad \text{(martingaaliominaisuus).}\end{aligned}$$

Yhdistämällä ylläolevat kaavat saadaan martingaaliominaisuus itsensä suhteen:

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid M_{0:t}] = \mathbb{E}[M_t \mid M_{0:t}] = M_t. \qquad \square$$

Martingaalien odotusarvoista kehitystä kuvaa seuraava.

Lause 6.10 Kuvaus $t \longmapsto \mathbb{E}[M_t]$ on

(i) vakio, jos (M_t) on martingaali
(ii) vähenevä, jos (M_t) on ylimartingaali
(iii) kasvava, jos (M_t) on alimartingaali.

Todistus: Jos (M_t) on ylimartingaali informaatioprosessin (X_t) suhteen, niin

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}] \leq M_t .$$

Ehdollisen odotusarvon harhattomuutta ja monotonisuutta käyttäen tästä saadaan

$$\mathbb{E}[M_{t+1}] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}]\big] \leq \mathbb{E}[M_t].$$

Tämä todistaa kohdan (ii). Kohdat (i) ja (iii) käsitellään samaan tapaan. □

PYSÄYTETYT MARTINGAALIT JA UHKAPELIT

Uhkapeli yksikköpanoksella

Kertynyt tuotto t:ltä pelikierokselta yksikköpanoksella pelattaessa

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} X_s \qquad (M_0 = 0)$$

missä X_s on kierroksen s tuotto.

Jos pelikierokset ovat toisistaan riippumattomat niin prosessi $(M_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ on informaatioprosessin $(M_0, X_1, X_2, X_3, \dots)$ suhteen

- ylimartingaali, jos $\mathbb{E}[X_s] \le 0 \quad \forall s$
- martingaali, jos $\mathbb{E}[X_s] = 0 \quad \forall s$
- alimartingaali, jos $\mathbb{E}[X_s] \ge 0 \quad \forall s$.

Uhkapelitulkinta:

alimartingaali $\leftrightarrow$ suotuisa uhkapeli
martingaali $\leftrightarrow$ reilu uhkapeli
ylimartingaali $\leftrightarrow$ epäsuotuisa uhkapeli

Esimerkki RAY:n ruletissa punaiselle panostaminen:

$$X_s = \begin{cases} +1 & \text{todennäköisyydellä } \frac{18}{37} \\ -1 & \text{——————}\,\text{"}\,\text{——————} \frac{19}{37} \end{cases} \Rightarrow \mathbb{E}[X_s] = \frac{-1}{37}$$

yhdelle numerolle panostaminen

$$X_s = \begin{cases} +31 & \text{tn:llä } \frac{1}{37} \\ -1 & \text{tn:llä } \frac{36}{37} \end{cases} \Rightarrow \mathbb{E}[X_s] = \frac{-5}{37}.$$

Molemmissa tapauksissa pelien odotettu tuotto yksikköpanosta kohden $\mathbb{E}[X_s] < 0$ on negatiivinen, ja kertynyt tuotto $(M_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ yksikköpanoksella pelattaessa on ylimartingaali.

Onko jollakin nokkelalla panostusstrategialla mahdollista saavuttaa positiivinen tuotto? (odotusarvoisesti)

Uhkapeli panostaen

Kun pelikierroksella s panostetaan H_s yksikköä ja kierroksen tuotto yksikköpanosta kohti on X_s, niin pelaajan varallisuus kierroksen t jälkeen on

$$W_t = W_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s X_s .$$

Esim. 1: Uhkapeli vakiopanoksella c:

$$H_s = c \quad \forall s$$

$$\Longrightarrow \quad W_t = W_0 + c \cdot \sum_{s=1}^{t} X_s = W_0 + c \cdot M_t$$

Esim. 2: Uhkapeli yksikköpanoksella kierrokseen T asti, ja sen jälkeen lopettaminen:

$$H_s = \mathbb{1}_{\{s \le T\}} = \begin{cases} 1 & \text{jos } s \le T \\ 0 & \text{jos } s > T, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad W_t = \begin{cases} W_0 + M_t & \text{kun } t \le T \\ W_0 + M_T & \text{kun } t > T. \end{cases}$$

Panostusstrategiasta on syytä olettaa, että kierroksen t panosta H_t koskeva päätös tehdään kierrosten $1, 2, \dots, t-1$ tulosten perusteella (panosta ei esimerkiksi saa päättää vasta sitten kun näkee rulettipyörän pysähtyvän), eli

$$H_t \in \sigma(W_0, X_1, X_2, \dots, X_{t-1}) \qquad \forall t.$$

Tällöin sanotaan, että jono $(H_1, H_2, \dots)$ on informaatioprosessin $(W_0, X_1, X_2, \dots)$ suhteen ennakoitava.

Jos panostusstrategia on ylläolevan Esimerkin 2 mukainen kierroksen T jälkeen lopettaminen,

$$H_t = \mathbb{1}_{\{t \le T\}} = \begin{cases} 1 & \text{jos } t \le T \\ 0 & \text{jos } t > T, \end{cases}$$

mahdollisesti satunnaisella lopetushetkellä T, voidaan ennakoitavuus karakterisoida seuraavasti.

<u>Lause 7.5</u>: Satunnaisjono $t \mapsto H_t = \mathbb{1}_{\{t \le T\}}$ on informaatioprosessin $(X_0, X_1, \ldots)$ suhteen ennakoitava jos ja vain jos kaikilla $t \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$\mathbb{1}_{\{T = t\}} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_t).$$

Jos satunnainen ajanhetki $T \in \{0,1,2,\ldots\} \cup \{+\infty\}$ toteuttaa y.o. lauseen ehdon, niin sanomme, että T on valintahetki tai pysäytyshetki informaatioprosessin $(X_0, X_1, \ldots)$ suhteen. Määrittelevä ehto

$$\mathbb{1}_{\{T=t\}} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_t)$$

vaatii, että tapahtuman $\{T=t\}$ sattuminen ("hetkellä t lopettaminen") voidaan selvittää satunnaisvektorista $(X_0, X_1, \ldots, X_t)$ deterministisesti (eli "voidaan päättää hetkellä t käytettävissä olevan informaation perusteella")

Otetaan vielä käyttöön lyhennysmerkintä

$X_{s:t}$ satunnaisvektorille $(X_s, X_{s+1}, \ldots, X_{t-1}, X_t)$.

<u>Lauseen 7.5. todistus</u>

"$\Longrightarrow$": Oletetaan, että (H_t) on ennakoitava. Silloin $H_t \in \sigma(X_{0:t-1})$ ja $H_{t+1} \in \sigma(X_{0:t})$. Siis sekä H_t että H_{t+1} voidaan määrittää deterministisinä funktioina satunnaisvektorista $X_{0:t}$. Sama pätee silloin indikaattorille $\mathbb{1}_{\{T=t\}} = H_t - H_{t+1}$.

"$\Longleftarrow$": Oletetaan, että $1_{\{T=t\}} \in \sigma(X_{0:t})$ kaikilla t. Nyt

$$H_t = 1_{\{t \le T\}} = 1 - 1_{\{T<t\}}$$
$$= 1 - \sum_{s=1}^{t-1} 1_{\{T=s\}}$$

ja jokainen indikaattori $1_{\{T=s\}}$ tässä voidaan oletuksen perusteella lausua deterministisenä funktiona arvoista $(X_0, \dots, X_s)$. Siis H_t voidaan lausua deterministisenä funktiona arvoista $(X_0, \dots, X_{t-1})$, eli

$$H_t \in \sigma(X_{0:t-1}),$$

joten (H_t) on ennakoitava. $\square$

Palataan vielä uhkapeliin panostusstrategialla (H_t). Määritellään yksikkökertymäprosessi

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} X_s \qquad (t \in \mathbb{Z}_+)$$

ja lausutaan pelaajan nettovarallisuus ajanhetkellä t muodossa

$$W_t = W_0 + (H \bullet M)_t ,$$

missä

$$(H \bullet M)_t = \sum_{s=1}^{t} H_s (M_s - M_{s-1})$$

on jonon $(H_1, H_2, \dots)$ integraaliprosessi yksikkökertymäprosessin $(M_0, M_1, M_2, \dots)$ suhteen.

Pörssitulkinta: $M_t \leftrightarrow$ osakkeen päätöskurssi päivälle t
$H_t \leftrightarrow$ osakkeiden lkm sijoittajan salkussa päivän t aikana
$(H \bullet M)_t \leftrightarrow$ päivään t asti kertynyt sijoittajan tuotto

Huom: Jatkuvan ajan analogia integraaliprosessille $(H \bullet M)$ on n.k. Itō-integraali $\int_0^t H_t \, dM_t$, [MS-E1601 Brownian motion and stochastic analysis.

Lause 7.3. Olkoon $(H_1, H_2, \dots)$ informaatioprosessin $(X_0, X_1, \dots)$ suhteen ennakoitava jono integroituvia satunnaislukuja siten, että myös $(H \bullet M)_t$ on integroituva kaikilla t. Silloin:

(i) jos $(M_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on martingaali, niin myös $((H \bullet M)_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on martingaali

(ii) jos $(M_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on alimartingaali ja $H_t \geq 0$ kaikilla t, niin myös $((H \bullet M)_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on alimartingaali.

(iii) jos $(M_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on ylimartingaali ja $H_t \geq 0$ kaikilla t, niin myös $((H \bullet M)_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on ylimartingaali.

Uhkapelitulkinta:

(i) "Reilu peli millä tahansa panostusstrategialla pysyy reiluna".

(iii) "Epäsuotuisa peli pysyy epäsuotuisana millä tahansa epänegatiivisella panostusstrategialla."

(ii) "Suotuisa peli pysyy suotuisana ..."

Ennen lauseen todistusta huomautetaan, että esimerkiksi seuraavat ehdot ovat riittäviä takaamaan oletuksen siitä, että $(H \bullet M)_t$ on integroituva:

- jos panokset H_s ovat rajoitettuja, eli $\mathbb{P}[|H_s| \leq c_s] = 1$ joillakin vakioilla c_s, kaikilla s

tai

- jos tuotot $X_s = M_s - M_{s-1}$ ovat rajoitettuja, eli $\mathbb{P}[|X_s| \leq c_s] = 1$ joillakin vakioilla c_s, kaikilla s.

Esimerkiksi ensimmäisen ehdon toteutuessa voidaan kolmioepäyhtälöä käyttäen laskea:

$$\mathbb{E}\left[\,|(H \bullet M)_t|\,\right] = \mathbb{E}\left[\,\left|\sum_{s=1}^{t} H_s (M_s - M_{s-1})\right|\,\right] \leq \sum_{s=1}^{t} \underbrace{c_s}_{<\infty}\Big(\underbrace{\mathbb{E}[|M_s|]}_{<\infty} + \underbrace{\mathbb{E}[|M_{s-1}|]}_{<\infty}\Big) < \infty .$$

Lauseen 7.3. todistus: Merkitään lyhyesti

$$W_t = (H \bullet M)_t = \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot X_s = \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot (M_s - M_{s-1}).$$

Integroituvuusoletuksen perusteella $\mathbb{E}[|W_t|] < \infty$ kaikilla t, joten martingaalin (ali-/ylimartingaalin) määritelmän integroituvuusehto on voimassa. Lisäksi koska (H_t) on ennustettava, on H_s deterministinen funktio arvoista $X_0, X_1, \ldots, X_{s-1}$ ja siten $W_t = \sum_{s=1}^{t} H_s X_s$ on deterministinen funktio arvoista $X_0, X_1, \ldots, X_t$, joten martingaalin (ali-/ylimgaalin) määritelmän ehto informaatioprosessiin (X_t) sopivuudesta on voimassa. Näytettäväksi jää enää varsinainen martingaaliominaisuus (ali-/ylimgaaliomin.) eli ehdollisia odotusarvoja koskeva ehto. Tämä tarkastelu tehdään erikseen tapauksissa (i), (ii) ja (iii).

Tapaus (i): Jos (M_t) on martingaali, pätee

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{martingaali-} \\ \text{ominaisuus}}}{=} M_t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tunnetun arvon} \\ \text{ulosveto ja } M_t \in \sigma(X_{0:t})}}{=} \mathbb{E}[M_t \mid X_{0:t}].$$

Integraaliprosessin määritelmän perusteella puolestaan

$$W_{t+1} - W_t = H_{t+1} \cdot (M_{t+1} - M_t).$$

Ennakoitavuuden perusteella $H_{t+1} \in \sigma(X_{0:t})$ ja tunnetun arvon ulosvedolla sitten

$$\mathbb{E}[W_{t+1} - W_t \mid X_{0:t}] = \mathbb{E}[H_{t+1}(M_{t+1} - M_t) \mid X_{0:t}]$$

$$= H_{t+1} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[M_{t+1} - M_t \mid X_{0:t}]}_{\substack{= \mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}] - \mathbb{E}[M_t \mid X_{0:t}] \\ = M_t - M_t \\ = 0}} = 0.$$

Edelleen lineaarisuutta käyttäen saadaan

$$\mathbb{E}[W_{t+1} \mid X_{0:t}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lineaarisuus}}}{=} \mathbb{E}[W_t \mid X_{0:t}] \underset{\substack{\uparrow \\ W_t \in \sigma(X_{0:t})}}{=} W_t.$$

Tapaus (ii): Lasku noudattaa samoja vaiheita kuin tapauksessa (i). Alimartingaalille

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}] \geq M_t = \mathbb{E}[M_t \mid X_{0:t}],$$

ja sitten

$$\mathbb{E}[W_{t+1} - W_t \mid X_{0:t}] = \mathbb{E}[H_{t+1} \cdot (M_{t+1} - M_t) \mid X_{0:t}]$$

$$= \underbrace{H_{t+1}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[M_{t+1} - M_t \mid X_{0:t}]}_{= \mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}] - \mathbb{E}[M_t \mid X_{0:t}] \geq 0} \geq 0,$$

Huom. Oletusta panostuksen epänegatiivisuudesta tarvitaan tässä.

mistä väite seuraa samoin kuin yllä.

Tapaus (iii): Kuten tapaus (ii).

$\square$

Palautetaan mieliin:

- martingaali: $\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \sigma(X_{0:t})] = M_t \quad \forall t$

  ylimartingaali: $\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \sigma(X_{0:t})] \leq M_t \quad \forall t$

  ja lisäksi tuli vaatia

  $$\mathbb{E}[|M_t|] < \infty \quad \forall t \quad , \quad M_t \in \sigma(X_{0:t}) \quad \forall t.$$

  martingaali $\longleftrightarrow$ "reilu uhkapeli"

  ylimartingaali $\longleftrightarrow$ "epäsuotuisa uhkapeli"

- ennakoitava panostusstrategia: $H = (H_1, H_2, \dots)$

  $$H_t \in \sigma(X_{0:t-1}) \quad \forall t$$

- pysäytyshetki eli valintahetki:

  satunnaisluku $T \in \{0,1,2,\dots\} \cup \{+\infty\}$

  jolle $\mathbb{1}_{\{T=t\}} \in \sigma(X_{0:t}) \quad \forall t$

  "Tapahtuman $\{T=t\}$ satuminen määräytyy hetkellä t käytettävissä olevasta informaatiosta".

- integraaliprosessi: ("uhkapeli panostaen" tai "sijoitussalkun tuotto")

  $$(H \bullet M)_t = \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot (M_s - M_{s-1})$$

- Lause 7.3: Jos H on ennakoitava, H_t ja $(H \bullet M)_t$ integroituvia $\forall t$, niin

  (i): M martingaali $\Longrightarrow$ $H \bullet M$ martingaali

  (ii): $\left.\begin{array}{l} M \text{ ylimartingaali} \\ \text{ja } H_t \geq 0 \quad \forall t \end{array}\right\} \Longrightarrow H \bullet M$ ylimartingaali

  "Reilu peli pysyy reiluna panostusstrategiasta huolimatta"

  "Epäsuotuisa peli pysyy epäsuotuisana millä tahansa epänegatiivisella panostusstrategialla".

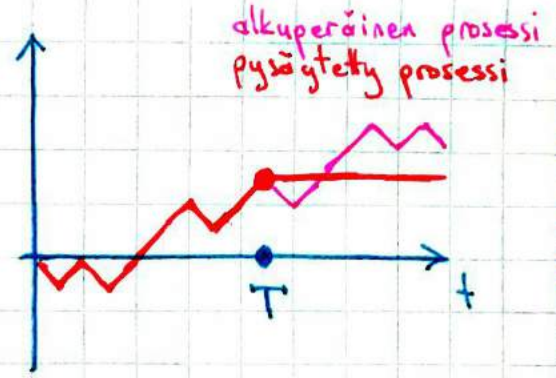
Pysäytetyt martingaalit

Satunnaisprosessi $(M_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ pysäytettynä satunnaisella hetkellä $T \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ on prosessi

$$(M_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{Z}_+}$$

missä

$$t \wedge T := \min(t, T).$$



Lause 7.7: (i) Valintahetkellä pysäytetty martingaali on edelleen martingaali.

(ii) Valintahetkellä pysäytetty ylimartingaali on edelleen ylimartingaali.

Todistus: Jos $M_0 = 0$, pysäytetty prosessi voidaan lausua integraaliprosessina panostusstrategian

$$H_s = \mathbb{1}\{s \leq T\} = \begin{cases} 1 & \text{jos } s \leq T \\ 0 & \text{jos } s > T \end{cases}$$

suhteen, eli

$$M_{t \wedge T} = (H \bullet M)_t = \begin{cases} M_t & \text{jos } t \leq T \\ M_T & \text{jos } t > T. \end{cases}$$

Panostus H on rajoitettu,

$$|H_t| \leq 1 \quad \forall s,$$

joten H_t ja $(H \bullet M)_t$ ovat integroituvia kunhan myös M toteuttaa integroituvuusoletuksen. Kun T on pysäytyshetki, on H ennakoitava Lauseen 7.5. perusteella. Väitteet (i) ja (ii) seuraavat siksi Lauseesta 7.3.

Yleisellä M_0 voidaan kirjoittaa $M_{t \wedge T} = M_0 + (H \bullet M)_t$ ja summa on edelleen (yli)martingaali. $\square$

Valinnaisen pysäyttämisen lause

Lause 6.10 kertoo martingaalin arvosta M_t kiinnitetyllä ajanhetkellä ainakin sen, että odotusarvoisesti tämä arvo on sama kuin arvo millä tahansa muulla ajanhetkellä, vaikkapa alkuhetkellä:

$$\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0] \quad \forall t.$$

(kun M on martingaali)

Mitä voidaan sanoa martingaalin arvosta satunnaisella pysäytyshetkellä T?

Lause 7.8 Oletetaan, että T on äärellinen ($\mathbb{P}[T<\infty]=1$) valintahetki ja $M=(M_0, M_1, \ldots)$ on martingaali (vastaavasti ylimartingaali). Oletetaan lisäksi, että on olemassa sellainen integroituva satunnaisluku Z että

$$|M_{t\wedge T}| \leq Z \quad \forall t.$$

Tällöin

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$$

(vastaavasti $\mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_0]$).

Todistus: Kun M on martingaali, on myös pysäytetty prosessi $(M_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{Z}}$ Lauseen 7.7. perusteella martingaali, joten Lauseen 6.10 mukaan

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T}] = \mathbb{E}[M_{0\wedge T}] = \mathbb{E}[M_0] \quad \forall t.$$

Toisaalta valintahetken T äärellisyys takaa, että

$$\lim_{t\to\infty} M_{t\wedge T} = M_T \quad \text{(todennäköisyydellä 1)}.$$

Katso [MS-E1600 Probability Theory].

Dominoidun konvergenssin lauseesta saadaan siten

$$\mathbb{E}[M_T] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[M_{t\wedge T}] = \mathbb{E}[M_0].$$

Tässä tarvitaan oletusta $|M_{t\wedge T}| \leq Z$.

Ylimartingaalin tapaus käsitellään vastaavasti. □

<u>Esimerkki</u>: (Uhkapelurin vararikon symmetrinen tapaus)

Olkoon $M_t = x + \sum_{s=1}^{t} X_s$, missä $X_1, X_2, \dots$ ovat riippumattomia ja
$$\mathbb{P}[X_s = +1] = \frac{1}{2} = \mathbb{P}[X_s = -1],$$
eli $M = (M_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on symmetrinen satunnaiskävely lähetettynä arvosta $M_0 = x$.

Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ sellaiset, että $a \leq x \leq b$, ja olkoon T kävelyn ensimmäinen osumahetki tasolle a tai b,
$$T = \min\{t \geq 0 \mid M_t = a \text{ tai } M_t = b\}.$$
Silloin T on valintahetki, koska tapahtuma
$$\{T = t\} = \{M_t = a \text{ tai } M_t = b \text{ ja } M_s \neq a, b \text{ kaikilla } s < t\}$$
voidaan määrätä hetkeen t mennessä esiintyvistä arvoista $M_0, M_1, \dots, M_t$.

Pysäytetyn prosessin arvot ovat rajoitettuja,
$$a \leq M_{t \wedge T} \leq b \quad \forall t,$$
joten dominoivaksi satunnaismuuttujaksi kelpaa vakio $Z = \max\{|a|, |b|\}$. Valintahetki T on äärellinen, koska vaikkapa mitkä tahansa $n = b - a$ kappaletta peräkkäisiä askeleita ylös takaa b:hen osumisen, ja siten
$$\mathbb{P}[T > k \cdot n] \leq \mathbb{P}\left[\begin{array}{l}\text{jokin askeleista } X_1, \dots, X_n \text{ on } -1 \text{ ja} \\ \text{jokin askeleista } X_{n+1}, \dots, X_{2n} \text{ on } -1 \text{ ja} \\ \dots \text{ ja jokin askeleista } \dots, X_{kn} \text{ on } -1\end{array}\right]$$
$$= (1 - 2^{-n})^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$
eli $\mathbb{P}[T < \infty] = \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}[T \leq kn] \geq \lim_{k \to \infty} (1 - \mathbb{P}[T > kn]) = 1.$

Huomataan vielä, että

$M_T = a$ jos $T_{\{a\}} < T_{\{b\}}$
eli a:han osutaan ennen b:tä

ja $M_T = b$ jos $T_{\{b\}} < T_{\{a\}}$
eli b:hen osutaan ennen a:ta.

Siis

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_T] &= a \cdot \mathbb{P}[T_{\{a\}} < T_{\{b\}}] \\ &\quad + b \cdot \mathbb{P}[T_{\{b\}} < T_{\{a\}}] \\ &= a + (b-a) \cdot \mathbb{P}[T_{\{b\}} < T_{\{a\}}].\end{aligned}$$

Valinnaisen pysäyttämisen lauseen mukaan

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0] = x.$$

Näistä voidaan ratkaista osumatodennäköisyys b:hen

$$\mathbb{P}[T_{\{b\}} < T_{\{a\}}] = \frac{x-a}{b-a},$$

joka on sama kuin aiemmin johtamamme uhkapelurin vararikkotodennäköisyys (symmetriselle satunnaiskävelylle).

Valinnaisen pysäyttämisen lauseen uhkapelitulkinta olisi, että reilussa tai epäsuotuisassa pelissä ei odotusarvoisesti voi päästä voitolle millään lopettamisstrategialla (kunhan tietyt järkevät oletukset pelistä ovat voimassa).

Tarkastellaan tämän valossa "paradoksaalista" hyvin tunnettua uhkapelistrategiaa: "tuplausstrategiaa", josta martingaalit ovat itseasiassa saaneet nimensäkin.

Esimerkki (Tuplausstrategia)

Kierroksella s lyödään vetoa (ilman kertoimia) panoksella $H_s \geq 0$, jolloin voidaan joko voittaa H_s yksikköä tai hävitä H_s yksikköä. Oletetaan eri kierrosten vedonlyönnin kohteet riippumattomiksi ja voiton todennäköisyydeksi $p \in (0, \frac{1}{2}]$, jolloin uhkapeli on joko reilu ($p = \frac{1}{2}$) tai epäsuotuisa ($0 < p < \frac{1}{2}$). Kierrokseen t mennessä kertynyt voitto on

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot X_s \,, \quad \text{missä}$$

$X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomat ja
$\mathbb{P}[X_s = +1] = p$, $\mathbb{P}[X_s = -1] = 1 - p$.

Tuplausstrategiaksi sanotaan seuraavaa menettelyä. Ensimmäisellä kierroksella asetetaan vedonlyönnille yksikköpanos. Aina hävityn kierroksen jälkeen seuraavalla kierroksella käytetään kaksinkertaista panosta edelliseen verrattuna. Peli lopetetaan ensimmäisen voiton jälkeen. Esimerkiksi, jos neljä ensimmäistä kierrosta hävitään ja viides voitetaan, näyttää pelin kulku seuraavalta

kierros t	1	2	3	4	5
panos H_t	1	2	4	8	16
tulos X_t	-1	-1	-1	-1	$+1$
tuotto $H_t \cdot X_t$	-1	-2	-4	-8	$+16$
kertynyt tuotto $M_t = \sum_{s=1}^{t} H_s X_s$	-1	-3	-7	-15	$+1$

.

Tällä strategialla ensimmäisen voiton sattuessa päästään aina yksi yksikkö voitolle, koska jos ensimmäinen voitto tapahtuu kierroksella T, niin kertynyt voitto tällöin on

$$M_T = \sum_{s=1}^{T} H_s X_s = \sum_{s=1}^{T-1} 2^{s-1} \cdot (-1) + 2^{T-1} \cdot (+1)$$

(äärellinen geometrinen sarja)

$$= -\frac{1-2^{T-1}}{1-2} + 2^{T-1} = (1-2^{T-1}) + 2^{T-1}$$

$$= +1 .$$

Lisäksi, kun voitolla on positiivinen todennäköisyys $p>0$, on voiton ennen pitkää tapahtuminen varmaa, $\mathbb{P}[T<\infty]=1$, koska riippumattomuudesta

$$\mathbb{P}[T>k] = \mathbb{P}[X_1=-1, X_2=-1, \ldots, X_k=-1]$$

$$= (1-p)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

ja

$$\mathbb{P}[T<\infty] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[T\leq k]$$

$$= \lim_{k\to\infty} (1-\mathbb{P}[T>k]) = 1-0 = 1 .$$

Siis varmasti (todennäköisyydellä 1) äärellisessä ajassa T saadaan positiivinen kertynyt tuotto

$$M_T = +1 > 0 .$$

Onko kyseessä idioottivarma tapa rikastua?

Mitä martingaaliteoria sanoo asiasta ja eikö erityisesti voiton odotusarvo

$$\mathbb{E}[M_T] = +1 > 0 = \mathbb{E}[M_0]$$

ole ristiriidassa valinnaisen pysäyttämisen lauseen kanssa?

Tarkastellaan Lauseen 7.8 ehtoja yksitellen:

- Onko $M = (M_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ martingaali tai ylimartingaali?

  Kyllä: Yksikkötuottokertymäprosessi $t \longmapsto \sum_{s=1}^{t} X_s$ on aiemman esimerkin mukaan ylimartingaali kun $p \leq \frac{1}{2}$ (martingaali jos $p = \frac{1}{2}$). Itse prosessi M on konstruoitu tästä integraaliprosessina panostuksilla $H = (H_t)$. Kierroksen t panos on rajoitettu, $|H_t| \leq 2^{t-1}$, joten Lauseen 7.3 oletukset ovat voimassa.

- Onko T valintahetki?

  Kyllä: Tapahtuma $\{T = t\}$ on sama kuin $\{X_t = +1$ ja $X_1 = X_2 = \dots = X_{t-1} = -1\}$ ja määräytyy hetkellä t käytettävissä olevasta informaatiosta.

- Onko T äärellinen?

  Kyllä: Yllä laskettiin $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$ kun $p > 0$.

- Ovatko kaikki $M_{t \wedge T}$ dominoituja jollakin integroituvalla satunnaisluvulla Z?

  Eivät! Oletetaan $|M_{t \wedge T}| \leq Z$ $\forall t$. Koska $\mathbb{P}[T > t] = (1-p)^t$, on $\mathbb{P}[M_{t \wedge T} = -2^t + 1] = (1-p)^t$ ja silloin täytyisi olla $\mathbb{P}[Z \geq 2^t - 1] \geq (1-p)^t$. Tällaiselle satunnaisluvulle Z odotusarvo on ääretön, $\mathbb{E}[Z] = +\infty$. Siis Z ei ole integroituva.

Odotusarvon äärettömyys voidaan tarkastaa esim. luennon 28 Lemman avulla:

$$\mathbb{E}[Z_1] \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[Z_1 \geq k]$$ ← (tämä on Z_1:in kokonaislukuosan $\lfloor Z_1 \rfloor$ odotusarvo ja $\lfloor Z_1 \rfloor \leq Z$

$$\geq 1 \cdot \mathbb{P}[Z_1 \geq 1] + 2 \cdot \mathbb{P}[Z_1 \geq 3] + 4 \cdot \mathbb{P}[Z_1 \geq 7] + \dots$$

$$\geq \sum_{t=1}^{\infty} 2^{t-1} \mathbb{P}[Z_1 \geq 2^t - 1] \geq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{\infty} \cdot 2^t \cdot (1-p)^t$$

$$= \infty$$ koska geometrisen sarjan suhdeluku on $2 \cdot (1-p) \geq 1$.

Tämä siis selittää miksi Lausetta 7.8 ei voi soveltaa tuplausstrategiaan. Antaako se vihjeitä siitä mikä tuplausstrategian idioottivarmassa rikastumismenetelmässä saattaisi olla epärealistista?

Antaa! Dominoivan satunnaismuuttujan Z_1 odotusarvon äärettömyys kielii siitä, että pelin panokset kasvavat liian todennäköisesti liian suuriksi. Esimerkiksi kaikilla kasinoilla on käytössä jokin yläraja sallittujen panosten suuruudelle, joten tuplausstrategiaa ei kasinoilla voi toteuttaa loppuun asti (ja tällöin Lausetta 7.8 voitaisiinkin taas soveltaa). Myös muissa yhteyksissä se, ettei panosten suuruudelle olisi mitään ylärajaa (esim. koko planeetan kultavarannot) on epärealistista.

Tuplausstrategian kaltaisia "paradokseja" pitää kuitenkin aina muistaa huolella varoa martingaaliteoriaa sovellettaessa!

Markov-ketjuihin liittyviä martingaaleja

Olkoon $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ Markov-ketju tilajoukolla S ja siirtymämatriisilla $\mathbb{P} = (p_{x,y})_{x,y \in S}$.

Jos $f : S \to \mathbb{R}$ on funktio, voidaan määritellä reaaliarvoinen stokastinen prosessi M

$$M_t = f(X_t).$$

Vielä yleisemmin, funktio f voisi riippua ajanhetkestä t, eli tarkasteltaisiin kokoelmaa funktioita

$$f_t : S \to \mathbb{R}$$

indeksoituna ajanhetkillä $t \in \mathbb{Z}_+$, ja prosessi M määriteltäisiin kaavalla

$$M_t = f_t(X_t).$$

Tutkimme seuraavaksi millä ehdoilla tällainen prosessi M olisi martingaali.

Ehdollistetaan ensin tapahtumalle $\{X_t = x\}$ ja lasketaan

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_t = x] = \sum_{y \in S} \mathbb{P}[X_{t+1} = y \mid X_t = x] \cdot \underbrace{f_{t+1}(y)}$$

kun $X_{t+1} = y$ on $M_{t+1} = f_{t+1}(y)$

$$= \sum_{y \in S} p_{x,y} \cdot f_{t+1}(y)$$

$$= (\mathbb{P} f_{t+1})_x .$$

Matriisimuodossa:
- f_{t+1} pystyvektori
- $\mathbb{P}$ neliömatriisi

Kun $X_t = x$ on $M_t = f_t(x)$, joten

$$\mathbb{E}[M_{t+1} - M_t \mid X_t = x] = (\mathbb{P} f_{t+1} - f_t)_x$$

ja Markov-ominaisuuden perusteella

$$\underbrace{\mathbb{E}[M_{t+1} - M_t \mid X_0, X_1, \ldots, X_t]}_{= \mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}] - M_t \text{ koska } M_t \in \sigma(X_{0:t}).} = (\mathbb{P} f_{t+1} - f_t)_{X_t} .$$

Nyt voidaan huomata, että jos vektoriyhtälö

$$Pf_{t+1} = f_t$$

on voimassa, niin $\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}] = M_t$.
Samoin jos komponenteittainen vektoriepäyhtälö

$$Pf_{t+1} \leq f_t$$

on voimassa, niin $\mathbb{E}[M_{t+1} \mid X_{0:t}] \leq M_t$.
Jos tilajoukko S on ääretön, pitää lisäksi huolehtia siitä että tällaiset odotusarvot ovat hyvin määriteltyjä eli yhtäpitävästi että y.o. äärettömien pystyvektoreiden kertominen äärettömillä matriiseilla tuottaa (komponenteittain) itseisesti suppenevia sarjoja. Kun näin on, voidaan päätellä martingaaliominaisuus prosessille M.

<u>Lause 6.14</u> Oletetaan, että kaikilla $x \in S$ ja $t \in \mathbb{Z}_+$ pätee $\sum_{y \in S} P_{x,y} \cdot |f(y)| < \infty$.
Kaavan $M_t = f_t(X_t)$ määrittelemä prosessi on
(i) martingaali, jos $Pf_{t+1} = f_t \quad \forall t$
(ii) ylimartingaali, jos $Pf_{t+1} \leq f_t \quad \forall t$.

<u>Esimerkki</u> Tarkastellaan epäsymmetristä satunnaiskävelyä $X_t = x + \sum_{s=1}^{t} Y_s$, missä $Y_1, Y_2, \dots$ ovat riippumattomat ja $\mathbb{P}[Y_s = +1] = q$, $\mathbb{P}[Y_s = -1] = 1-q$.
Kun kaikilla t asetetaan $f_t : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$
$f_t(x) = f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, pätee yhtälö $Pf = f$ jos ja vain jos $\alpha = 1$ tai $\alpha = \frac{1-q}{q}$. Ensimmäisestä saadaan vakiomartingaali $M_t = 1 \quad \forall t$.

Jälkimmäisestä ($f(x) = (\frac{1-q}{q})^x$) saadaan kiinnostavampi martingaali

$$M_t = f(X_t) = \left(\frac{1-q}{q}\right)^{X_t}.$$

Valitsemalla pysäytystasot $a \leq x \leq b$ ja pysäyttämällä tämän martingaalin osumahetkellä

$$T = \min(T_{\{a\}}, T_{\{b\}})$$

voidaan valinnaisen pysäyttämisen lauseesta päätellä

$$\underbrace{\mathbb{E}[M_T]}_{\mathbb{P}[T_{\{a\}} < T_{\{b\}}] \cdot (\frac{1-q}{q})^a + \mathbb{P}[T_{\{b\}} < T_{\{a\}}] \cdot (\frac{1-q}{q})^b} = \mathbb{E}[M_0] = \left(\frac{1-q}{q}\right)^x$$

Tästä voidaan ratkaista epäsymmetrinen uhkapelurin vararikkotodennäköisyys

$$\mathbb{P}_x[T_{\{b\}} < T_{\{a\}}] = \frac{(\frac{1-q}{q})^{x-a} - 1}{(\frac{1-q}{q})^{b-a} - 1}.$$

Tulos on toki sama kuin aiemmin Markov-ketjujen teorialla johtamamme.

POISSON PROSESSI

Tähän asti olemme käsitelleet diskreettiaikaisia stokastisia prosesseja, eli satunnaismuuttujakokoelmia

$$X = (X_t)_{t \in T} ,$$

jotka on indeksoitu ajanhetkien joukolla $T = \mathbb{Z}_+$. Siirrymme nyt tarkastelemaan jatkuva-aikaisia stokastisia prosesseja, joille ajanhetkien joukko on joko reaaliakseli $T = \mathbb{R}$ tai sen epänegatiivinen osa $T = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Ensimmäisenä jatkuva-aikaisena prosessina tulemme käsittelemään Poisson-prosessia, jolla mallinnetaan satunnaisia tapahtumahetkiä useissa yhteyksissä. Aivan ensimmäinen tavoitteemme on perustella miksi Poisson-prosessi on ainoa tietyt riippumattomuusoletukset sekä homogeenisuuden ajassa toteuttava tapahtumahetkiprosessi. Vielä ennen tätä, annetaan joitakin esimerkkejä tilanteista, joissa voisimme olla kiinnostuneita satunnaisista tapahtumahetkistä.

Esimerkkejä satunnaisista tapahtumahetkistä:

1.) Asiakkaiden saapumiset liikkeeseen (kauppaan, pankkiin, ...). Saattaisimme olla kiinnostuneita vaikkapa siitä, montako asiakaspalvelijaa tarvitaan, jotta jonot eivät kasaantuisi kohtuuttomiksi tai siitä, millaisia vaihteluita myynnin tai asiakasmäärän suuruudessa on pelkästään satunnaisuudesta johtuen odotettavissa.

2.) Korvausvaatimusten saapumiset vakuutusyhtiöön. Tämä on tulkittavissa erikoistapaukseksi asiakkaiden saapumisprosessista, mutta kiinnostavat kysymykset liittyvät enemmän vaikkapa vakuutusyhtiön vakavaraisuuteen, eli haluaisimme ainakin ymmärtää satunnaisvaihteluita korvausvaateiden saapumisprosessissa.

3.) Geiger-mittari. Radioaktiivisen aineen läheisyydessä Geiger-mittari ilmaisee alfa-, beta- ja gammahiukkasten saapumiset niiden ionisoivaan vaikutukseen perustuvan havainnon ansiosta.

4.) Bussien saapumishetket pysäkille.

5.) Tietoliikennevaihteeseen tai -kytkimeen saapuvat datapaketit. Aiemmin tarkastelimme diskreettiaikaista esimerkkiä, mutta datapakettien saapumisen mallintaminen jatkuvalla ajalla on myös järkevää ja tavallista. Kiinnostuksen kohteena voisi olla jälleen todennäköisyys joutua hylkäämään paketteja puskurin rajallisen koon takia tai viive, joka aiheutuu jonottavista paketeista.

Monissa sovelluksissa satunnaisista tapahtumahetkistä on realistista olettaa, että

- eri aikaväleillä (joilla ei ole päällekkäisyyttä) olevat tapahtumahetket ovat riippumattomat
- aikavälille osuvien tapahtumahetkien jakauma riippuu vain aikavälin pituudesta.

Silloinkin, kun on vähäisiä syitä epäillä ylläolevien oletusten olevan aivan tarkasti voimassa, voidaan niiden mahdollisesti ajatella johtavan kohtuulliseen approksimaatioon. Poisson-prosessi on sellainen matemaattinen idealisaatio, jossa nämä ominaisuudet ovat täsmällisesti voimassa. Miten hyvin arvioisit näiden oletusten pätevän yllä luetelluissa esimerkeissä?

Siirrymme nyt aiheen matemaattiseen tarkasteluun.

Satunnaiset pistekuviot, laskurimitat ja laskuriprosessit

Välin $S \subset \mathbb{R}$ satunnainen pistekuvio on satunnainen, lokaalisti äärellinen S:n osajoukko $X \subset S$ eli tarkemmin, jollakin todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathbb{P})$ määritelty joukkoarvoinen satunnaismuuttuja

$$\Omega \ni \omega \longmapsto X(\omega) \subset S$$

jolle pätee, että kaikilla suljetuilla ja rajoitetuilla $K \subset S$, leikkaus $X(\omega) \cap K$ on äärellinen (todennäköisyydellä 1). Jätämme selkeyden vuoksi riippuvuuden ω:sta merkitsemättä, kuten yleensäkin satunnaismuuttujille. Sivuutamme myös tekniset mittateoreettiset kysymykset joukkoarvoisista satunnaismuuttujista.

Välin S satunnaisen pistekuvion X laskurimitta määritellään kaavalla

$$N(B) = \#(X \cap B), \text{ kun } B \subset S,$$

eli $N(B)$ kertoo osajoukkoon $B \subset S$ osuvien pisteiden lukumäärän pistekuviossa X (tämä lukumäärä on satunnainen kokonaisluku).

Lopulta, jos $S = \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ kuten useimmiten satunnaisia tapahtumahetkiä mallinnettaessa, satunnaisen pistekuvion X laskuriprosessi on satunnainen funktio $t \mapsto N(t)$, missä $N(t)$ kertoo ajanhetkeen t asti esiintyneiden tapahtumahetkien lukumäärän

$$N(t) = \#\big([0,t] \cap X\big) = N\big([0,t]\big).$$

Sekä laskuriprosessia että laskurimittaa merkitään tässä symbolilla N, mutta jälkimmäisen argumentti on osajoukko (esim. $[0,t] \subset \mathbb{R}_+$) ja ensimmäisen reaaliluku (esim. $t \in \mathbb{R}_+$) joten sekaannuksen vaaraa ei pitäisi olla.

Yllä on esitetty kolme erilaista kuvailua joukon $\mathbb{R}_+$ satunnaiselle pistekuviolle

- pistekuvio $X \subset \mathbb{R}_+$ (satunnainen osajoukko)
- laskurimitta N (satunnainen mitta $\mathbb{R}_+$:lla)
- laskuriprosessi $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$
  (satunnainen funktio $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{Z}_+$ eli kokonaislukuarvoinen jatkuva-aikainen stokastinen prosessi)

Kuvailut ovat keskenään ekvivalentteja ja käytämme niistä vaihtelevasti sitä mikä kulloinkin vaikuttaa luontevimmalta.

Kaksi oletusta, jotka teemme pistekuviosta voidaan nyt matemaattisesti muotoilla laskurimitan N avulla seuraavasti:

Satunnainen pistekuvio on riippumattomasti sironnut, jos satunnaisluvut $N(A_1), \dots, N(A_m)$ ovat riippumattomat aina kun osajoukot $A_1, \dots, A_m \subset S$ ovat erilliset (eli $A_i \cap A_j = \emptyset$ kun $i \neq j$).

Välin $\mathbb{R}_+$ satunnainen pistekuvio on tasakoosteinen eli homogeeninen jos kaikilla $A \subset \mathbb{R}_+$ ja $s \in \mathbb{R}_+$ satunnaismuuttujat $N(A)$ ja $N(A+s)$ ovat samoin jakautuneet.

toisin sanoen, näiden pistemassafunktiot ovat samat, eli $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathbb{P}[N(A)=k] = \mathbb{P}[N(A+s)=k]$$

$A+s$ on joukko $\{t+s \mid t \in A\} \subset \mathbb{R}_+$, eli A:n translaatio s:n verran eteenpäin

Tasakoosteisen pistekuvion intensiteetti λ on sen pisteiden lukumäärän odotusarvo yksikkövälillä $(0,1]$ eli

$$\lambda = \mathbb{E}\left[N((0,1])\right].$$

Pyrimme näyttämään, että ylläolevat ominaisuudet karakterisoivat satunnaisen pistekuvion. Tärkein askel tätä varten on seuraava tulos, joka selittää Poisson-jakauman merkityksen universaalina pisteiden lukumäärän jakaumana riippumattomasti sironneissa tasakoosteisissa pistekuvioissa.

Lause 8.5 Olkoon X välin $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ riippumattomasti sironnut tasakoosteinen pistekuvio intensiteetillä $\lambda \in (0,\infty)$. Tällöin sen pisteiden lukumäärä välillä $[0,t]$ noudattaa Poisson-jakaumaa parametrillä λt eli

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Todistuksen vaiheet ovat seuraavat:

(i) Näytetään, että ensimmäinen tapahtumahetki on eksponenttijakautunut.
(Tämän eksponenttijakauman parametri osoittautuu myöhemmässä vaiheessa olevan λ)

(ii) Ilmaistaan välin pisteiden lukumäärä pienenpienten osavälien avulla ja näytetään, että osaväleistä binomijakautuneeseen määrään sattuu tapahtumahetkiä.

(iii) Näytetään binomijakauman konvergenssi Poisson-jakaumaan kun osavälijakoa tihennetään.

(iv) Näytetään, että suurella todennäköisyydellä pienille osaväleille ei satu useampia tapahtumahetkiä, jolloin koko välin tapahtumahetkien lukumäärä on sama kuin tapahtumahetkiä sisältävien osavälien lukumäärä.

Näistä vaiheista saadaan haluttu johtopäätös, ja jokaisessa vaiheessa opitaan muutenkin tärkeitä asioita.

Vaihe (i):

Olkoon $v(t) = \mathbb{P}[N((0,t]) = 0]$ todennäköisyys sille, ettei välillä $(0,t]$ ole yhtään pistekuvion X pistettä (eli "tapahtumahetkeä"). Havaitaan, että

$$\begin{aligned} v(s+t) &= \mathbb{P}[N((0,s+t]) = 0] \\ &= \mathbb{P}[N((0,s]) = 0 \text{ ja } N((s,s+t]) = 0] \\ \text{(riippum. sironnut} \rightsquigarrow) \quad &= \mathbb{P}[N((0,s]) = 0] \cdot \mathbb{P}[N((s,s+t]) = 0] \\ \text{(tasakoosteinen} \rightsquigarrow) \quad &= \mathbb{P}[N((0,s]) = 0] \cdot \mathbb{P}[N((0,t]) = 0] \\ &= v(s) \cdot v(t) . \end{aligned}$$

Havaitaan lisäksi, että v on vähenevä funktio ja käytetään sitten seuraavaa aputulosta.

Harjoitustehtävä: Olkoon $v : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ vähenevä funktio, joka toteuttaa $v(s+t) = v(s) \cdot v(t)$ kaikilla $s,t \in \mathbb{R}_+$. Näytä, että pätee yhtälö $f(s) = f(1)^s$

(a) kaikilla epänegatiivisilla kokonaisluvuilla s
(b) kaikilla epänegatiivisilla rationaaliluvuilla s
(c) kaikilla epänegatiivisilla reaaliluvuilla s.

Kun kirjoitetaan $v(1) = e^{-\alpha}$, saadaan tästä $v(t) = e^{-\alpha t}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}_+$.

Kun muistetaan, että $\mathrm{Exp}(\alpha)$ -jakautuneelle satunnaisluvulle τ

$$\mathbb{P}[\tau > t] = \int_t^\infty \alpha \cdot e^{-\alpha u} \, du = e^{-\alpha t} ,$$

voidaan yllä johdetun kaavan

$$\mathbb{P}[N((0,t]) = 0] = v(t) = e^{-\alpha t}$$

tulkita sanovan, että ensimmäinen tapahtumahetki noudattaa eksponenttijakaumaa jollakin parametrilla α.

Vaihe (ii):

Tutkitaan sitten satunnaismuuttujaa $N((0,t])$, eli välille $(0,t]$ osuvien pisteiden lukumäärää. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ jokin (suuri) positiivinen kokonaisluku. Jaetaan väli $(0,t]$ tasapituisiin osaväleihin

$$I_j^{(n)} = \left(\tfrac{(j-1)t}{n}, \tfrac{jt}{n}\right], \qquad j=1,2,\dots,n.$$

Silloin

$$N((0,t]) = \sum_{j=1}^{n} N(I_j^{(n)})$$

ja summan termit $N(I_j^{(n)})$, $j=1,\dots,n$, ovat riippumattomat (koska pistekuvio on riippumattomasti sironnut) ja samoin jakautuneet (koska pistekuvio on tasakoosteinen).

Määritellään indikaattorisatunnaismuuttujat

$$\theta_j^{(n)} = \mathbb{1}_{\{N(I_j^{(n)})>0\}} = \begin{cases} 1 & \text{jos } N(I_j^{(n)})>0 \\ 0 & \text{jos } N(I_j^{(n)})=0. \end{cases}$$

Silloin $Z_n = \theta_1^{(n)} + \theta_2^{(n)} + \dots + \theta_n^{(n)}$ on sellaisten osavälien lukumäärä, jotka sisältävät tapahtumahetkiä. Merkitään

$$A_n = \{ N(I_j^{(n)}) \leq 1 \quad \forall j=1,\dots,n \}$$

sitä tapahtumaa, ettei mikään osaväli sisällä enempää kuin yhden tapahtumahetken (vaiheessa (iv) näytämme että $\mathbb{P}[A_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$).

Tapahtuman A_n vallitessa pätee $N((0,t]) = Z_n$, joten

$$\mathbb{P}[N((0,t])=k] = \mathbb{P}[Z_n=k] + \epsilon_n,$$

missä $\epsilon_n = \mathbb{P}[A_n^c \text{ ja } N((0,t])=k] - \mathbb{P}[A_n^c \text{ ja } Z_n=k]$.

(Koska $\epsilon_n \leq 2\cdot\mathbb{P}[A_n^c]$, vaiheen (iv) tuloksesta $\mathbb{P}[A_n^c] \to 0$ seuraa $\epsilon_n \to 0$, joten virhe ϵ_n, joka tehdään korvaamalla $N((0,t])$ Z_n:llä tulee pieneksi kun $n \to \infty$.)

Havaitaan sitten, että riippumattomien samoin jakautuneiden $\{0,1\}$-arvoisten termien $\theta_j^{(n)}$ summana, Z_n on binomijakautunut parametrein n ja

$$q_n = \mathbb{P}[\theta_j^{(n)} = 1] = 1 - \mathbb{P}[N((0,\tfrac{t}{n}]) = 0]$$
$$= 1 - v(t/n) = 1 - e^{-\alpha t/n},$$

eli

$$\mathbb{P}[Z_n = k] = \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k}, \quad k = 0,1,\dots,n.$$

Todetaan vielä, että $q_n \approx \frac{\alpha t}{n}$ seuraavassa täsmällisessä mielessä

$$n \cdot q_n = n \cdot (1 - e^{-\alpha t/n}) = \frac{1 - e^{-\alpha t n^{-1}}}{n^{-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha t$$

l'Hôspitalin säännön perusteella.

Vaihe (iii):

Lemma 8.6 Olkoon $Z_1, Z_2, \dots$ jono satunnaislukuja, missä $Z_n \sim \mathrm{Bin}(n, q_n)$ $\forall n$ ja $n \cdot q_n \to \alpha$ kun $n \to \infty$. Silloin

$$\mathbb{P}[Z_n = k] \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha^k}{k!}.$$

Todistus: Lasketaan:

$$\mathbb{P}[Z_n = k] = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} q_n^k (1-q_n)^{n-k}$$
$$= \frac{1}{k!} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)\, n^{-k} (n \cdot q_n)^k (1-q_n)^n (1-q_n)^{-k}$$
$$= \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}}_{\to 1} \underbrace{(n \cdot q_n)^k}_{\to \alpha^k} \underbrace{\left(1 - \frac{n \cdot q_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\alpha}} \underbrace{(1-q_n)^{-k}}_{\to 1}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}. \qquad \square$$

Yllä käytimme seuraavia raja-arvoja:

- $\frac{n-c}{n} = \frac{1 - c/n}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ millä tahansa c
- $n \cdot q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ oletuksen mukaan

- $q_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{(n q_n)}_{\to \alpha} \longrightarrow 0 \cdot \alpha = 0$

joten $(1-q_n)^{-k} \longrightarrow 1^{-k} = 1$

- koska $\left(1+\frac{c}{n}\right)^n \longrightarrow e^c$ millä tahansa c,

[katso Differentiaali- ja integraalilaskenta]

ja millä tahansa $\varepsilon > 0$ ja suurilla n

$$\alpha - \varepsilon \leq n \cdot q_n \leq \alpha + \varepsilon$$

saadaan epäyhtälöt (vähenevää funktiota soveltamalla)

$$\underbrace{\left(1-\frac{\alpha-\varepsilon}{n}\right)^n}_{\downarrow\; e^{-\alpha+\varepsilon}} \geq \left(1-\frac{n\cdot q_n}{n}\right)^n \geq \underbrace{\left(1-\frac{\alpha+\varepsilon}{n}\right)^n}_{\downarrow\; e^{-\alpha-\varepsilon}}$$

ja koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, lopulta

$$\left(1-\frac{n\cdot q_n}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-\alpha}.$$

<u>Harjoitustehtävä</u>: Osoita suoraan generoiville funktioille Lemman 8.6 oletuksin

(a): $\phi_{Z_n}(z) = (1-q_n+q_n z)^n$

(b): $\phi_{Z_n}(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp((z-1)\alpha)$

(c): Kohdan (b) raja on Poisson(α)-jakauman generoiva funktio.

<u>Vaihe (iv)</u>:

Tässä viimeisessä vaiheessa tavoitteenomme on perustella, että kohdassa (ii) käytetyn tapahtuman A_n todennäköisyys suppenee ykköseen kun n kasvaa. Tähän ominaisuuteen ei edes tarvita oletuksiamme satunnaisesta pistekuviosta, vaan pelkkä lokaalisti äärellisyys riittää takaamaan ettei lyhyille väleille osu montaa pistekuvion pistettä.

(Hiemon eri oletukset kuin Leskelän lemmassa.)

<u>Lemma 8.7</u>: Olkoon X välin $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ satunnainen pistekuvio ja N sen laskurimitta. Olkoon $t > 0$ ja
$$I_j^{(n)} = \left(\tfrac{j-1}{n}t, \tfrac{j}{n}t\right] \quad \text{kun} \quad j = 1,2,\ldots,n.$$
Silloin
$$\mathbb{P}\left[N(I_j^{(n)}) \leq 1 \text{ kaikilla } j=1,2,\ldots,n\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

<u>Todistus</u>: Koska X on lokaalisti äärellinen, on $N([0,t]) < \infty$ todennäköisyydellä 1. Olkoon satunnaisluku
$$D := \min\{|x-y| \mid x,y \in X \cap [0,t]\}$$
pienin pisteiden $x,y \in X \cap [0,t]$ välisistä etäisyyksistä. Kun $n > t/D$, ei mikään väleistä $I_j^{(n)} \subset [0,t]$ voi sisältää useampaa kuin yhden näistä pisteistä, sillä välin pituus $\frac{t}{n}$ on pienempi kuin pisteiden väliset etäisyydet. Siksi
$$\mathbb{1}_{\{N(I_j^{(n)}) \leq 1 \ \forall j=1,\ldots,n\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$
ja dominoidun konvergenssin lauseesta
$$\mathbb{P}\left[N(I_j^{(n)}) \leq 1 \ \forall j=1,\ldots,n\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{N(I_j^{(n)}) \leq 1 \ \forall j=1,\ldots,n\}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[1] = 1. \qquad \square$$

<u>Lauseen 8.5 todistus</u>:

Vaiheessa (ii) todettiin, että
$$\mathbb{P}[N((0,t]) = k] = \mathbb{P}[Z_n = k] + \epsilon_n,$$
missä $|\epsilon_n| \leq 2 \cdot \mathbb{P}[A_n^c]$ ja A_n on tapahtuma
$$A_n = \{N(I_j^{(n)}) \leq 1 \ \forall j=1,\ldots,n\}.$$
Vaiheen (iv) perusteella $\mathbb{P}[A_n^c] = 1 - \mathbb{P}[A_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ joten $\epsilon_n \to 0$ kun $n \to \infty$.

Toisaalta vaiheen (iii) perusteella
$$\mathbb{P}[Z_n = k] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k!}(\alpha t)^k e^{-\alpha t},$$
missä $\alpha > 0$ on vaiheessa (i) määritelty luku

jolle $\mathbb{P}[N((0,s]) = 0] = e^{-\alpha s} \quad \forall s \in \mathbb{R}_+$.
Nyt voidaan kirjoittaa

$$\mathbb{P}[N((0,t]) = k] = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{P}[Z_n = k] + \epsilon_n \right)$$

$$= \frac{1}{k!} (\alpha t)^k e^{-\alpha t} + 0,$$

eli $N((0,t])$ noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla $\alpha \cdot t$. Silloin intensiteettiparametri λ voidaan laskea asettamalla $t=1$

$$\lambda = \mathbb{E}[N((0,1])] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(\alpha \cdot 1)^k}{k!} e^{-\alpha \cdot 1} = \alpha$$

Poisson-jakauman odotusarvona. Saadaan johtopäätös $\alpha = \lambda$ ja siten

$$\mathbb{P}[N((0,t]) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \qquad \square$$

Poisson-prosessi

Lauseen 8.5 mukaisen riippumasti sironneen tasakoosteisen satunnaisen pistekuvion laskuriprosessia

$$N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$$

sanotaan Poisson-prosessiksi intensiteetillä $\lambda > 0$. Lauseen johtopäätöksestä yhdistettynä tasakoosteisuuteen ja riippumattomasti sironneisuuteen nähdään ominaisuudet:

1°) $N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot (t-s)) \quad \forall s < t$

2°) N:llä on riippumattomat lisäykset, eli

$$N(t_1) - N(s_1), \; N(t_2) - N(s_2), \dots, N(t_k) - N(s_k)$$

ovat riippumattomat aina kun

$$0 \le s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \dots \le t_{k-1} \le s_k < t_k.$$

Edelliseltä luennolta

- Välin $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ satunnaisen pistekuvion X laskuriprosessi $N = (N(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$

$$N(t) = \#\left(X \cap [0,t]\right)$$

(lukumäärä pisteistä / tapahtumahetkistä ajanhetkeen t mennessä)

- Pistekuvio on
    - riippumattomasti sironnut, jos erillisille aikaväleille osuvien pisteiden lukumäärät ovat riippumattomat
    - tasakoosteinen, jos aikavälille osuvien pisteiden lukumäärän jakauma riippuu vain välin pituudesta

- Lause 8.5: Riippumattomasti sironneelle tasakoosteiselle satunnaiselle pistekuviolle pätee

$$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t),$$

missä $\lambda = \mathbb{E}[N(1)]$ (intensiteetti).

Kun Lauseen 8.5 johtopäätöksen lisäksi käytetään vielä tasakoosteisuutta, saadaan

(i): $N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda\cdot(t-s)) \quad \forall s<t.$

Riippumattomasti sironneisuus tarkoittaa, että

(ii): $N(t_1)-N(s_1),\ N(t_2)-N(s_2),\ \dots,\ N(t_k)-N(s_k)$
ovat riippumattomat $\forall\ 0 \le s_1 < t_1 \le s_2 < \dots \le s_k < t_k.$

Koska laskuriprosessissa käytetään suljettua väliä $[0,t]$,

(iii): $t \longmapsto N(t)$ on oikealta jatkuva funktio,
eli $\forall t: \lim_{h\to 0^+} N(t+h) = N(t).$

Ominaisuudet (i), (ii), (iii) toteuttavaa stokastista prosessia sanotaan Poisson-prosessiksi intensiteetillä λ.

Lauseen 8.5 tulos voidaan siis tulkita:

Korollaari: Riippumattomasti sironneen tasakoosteisen satunnaisen pistekuvion laskuriprosessi on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda = \mathbb{E}[N(1)]$.

Konkreettisin tapa konstruoida tällainen pistekuvio ja sen laskuriprosessi on lähteä pisteiden väliaikojen jonosta $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$, jossa väliajat ovat riippumattomat ja eksponenttijakautuneet.

Lause 8.9: Olkoot $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ riippumattomat ja $\tau_j \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\forall j$. Asetetaan

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n = \sum_{j=1}^{n} \tau_j$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja tarkastellaan pistekuvion $X = \{T_1, T_2, T_3, \ldots\}$ laskuriprosessia

$$N(t) = \max\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid t \geq T_n\}.$$

Silloin $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä λ.

Olennaisin osa todistusta on tehty harjoitustehtävissä 5A2 ja 5A3, joissa näytetään mm.

- $\mathbb{P}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

  eli $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$

- $\mathbb{P}[T_{n+1} > t + s \mid N(t) = n] = e^{-\lambda s}$

  eli hetkestä t eteenpäin odotusaika seuraavaan tapahtumahetkeen $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Sivuutamme yksityiskohtaisen todistuksen.

Päällekkäiset Poisson-prosessit

Riippumattomien Poisson-prosessien päällekkäin laittaminen (eli yhdiste vastaavista satunnaisista pistekuvioista) tuottaa Poisson-prosessin, jonka intensiteetti on summa päällekkäin laitettujen prosessien intensiteeteistä.

Olennainen tämän perustelun tarvittava lasku on:

Lemma 9.2. Jos $M_1, M_2, \dots, M_n$ ovat riippumattomia Poisson-jakautuneita satunnaislukuja parametrein $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vastaavasti, niin summa

$$M = \sum_{j=1}^{n} M_j$$

on Poisson-jakautunut parametrilla $\lambda = \sum_j \lambda_j$.

Todistus: Käytetään generoivia funktioita.

$$\phi_{M_j}(z) = \mathbb{E}\left[z^{M_j}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \mathbb{P}[M_j = k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda_j^k}{k!} e^{-\lambda_j} = e^{-\lambda_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z \cdot \lambda_j)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda_j} e^{z\lambda_j} = \exp\left((z-1)\lambda_j\right).$$

Riippumattoman summan generoiva funktio on tulo

$$\phi_M(z) = \mathbb{E}\left[z^{\sum_j M_j}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_j z^{M_j}\right] = \prod_j \mathbb{E}\left[z^{M_j}\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \phi_{M_j}(z) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left((z-1)\lambda_j\right)$$

$$= \exp\left((z-1)\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right).$$

Tämä on Poisson$(\sum_j \lambda_j)$-jakautuneen satunnaisluvun generoiva funktio. Generoiva funktio määrää jakauman, joten

$$M \sim \text{Poisson}\left(\sum_j \lambda_j\right).$$

$\square$

Lause 9.1 Jos $N^{(j)} = (N^{(j)}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $j=1,2,\dots,n$, ovat riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä λ_j, $j=1,2,\dots,n$, niin summana

$$N(t) = \sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(t)$$

määritelty prosessi $N = (N(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$.

Todistus: Tarkistetaan Poisson-prosessin määrittelevät ominaisuudet (i), (ii), (iii).

(i) Lisäys hetkien $s<t$ välillä on

$$N(t) - N(s) = \sum_j N^{(j)}(t) - \sum_j N^{(j)}(s)$$
$$= \sum_j \left(N^{(j)}(t) - N^{(j)}(s)\right).$$

Tämän summan termit ovat riippumattomat (koska prosessit $N^{(j)}$ ovat) ja j:nnen termin jakauma on $\mathrm{Poisson}((t-s)\cdot\lambda_j)$, koska $N^{(j)}$ on Poisson prosessi intensiteetillä λ_j. Edellisen Lemman perusteella siten

$$N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poisson}\left((t-s)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right).$$

(ii) Kun $0 \le s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \dots \le s_k < t_k$, ovat lisäykset

$$N(t_1) - N(s_1) = \sum_j \left(N^{(j)}(t_1) - N^{(j)}(s_1)\right)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$N(t_k) - N(s_k) = \sum_j \left(N^{(j)}(t_k) - N^{(j)}(s_k)\right)$$

riippumattomat, koska prosessit $N^{(j)}$ ja niiden lisäykset erillisillä aikaväleillä ovat.

(iii) Summana oikealta jatkuvista funktioista

$$t \mapsto N(t) = \sum_j N^{(j)}(t) \quad \text{on oikealta jatkuva.}$$

$\square$

Esimerkki Vakuutusyhtiöön saapuvien kotivakuutusten korvausvaatimukset noudattavat Poisson-prosessia intensiteetillä $\lambda_K = \frac{1{,}5}{\text{vrk}}$ ja liikennevakuutusten korvausvaatimukset riippumatonta Poisson prosessia intensiteetillä $\lambda_L = \frac{3{,}5}{\text{vrk}}$.

Silloin kaikkien (koti- ja liikenne-) vakuutusten korvausvaatimusten saapumisprosessi on Poisson-prosessi intensiteetillä

$$\lambda = \lambda_K + \lambda_L = \frac{5{,}0}{\text{vrk}}.$$

Poisson prosessin harventaminen eli ohentaminen

Päällekkäin laittamiselle "käänteinen" operaatio on prosessin harventaminen valitsemalla vain satunnainen osajoukko kaikista tapahtumahetkistä.

Lause 9.9. Olkoot $B_1, B_2, \dots$ riippumattomia samoin jakautuneita äärellisen tai numeroituvasti äärettömän tilajoukon J satunnaismuuttujia ja $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ näistä riippumaton Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda > 0$. Määritellään

$$N^{(j)}(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \mathbb{1}_{\{B_n = j\}}$$

kaikilla $j \in J$ ja $t \in \mathbb{R}_+$. Silloin $N^{(j)} = (N^{(j)}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda_j = \lambda \cdot \mathbb{P}[B_n = j]$ ja prosessit $N^{(j)}$, $j \in J$, ovat riippumattomat.

Todistus on saman tapainen kuin Lauseen 9.1 todistus. Keskeinen Poisson-jakaumaa koskeva aputulos on seuraava:

Harjoitustehtävä: Olkoot $B_1, B_2, \dots$ riippumattomia samoin jakautuneita joukolla J ja M näistä riippumaton Poisson(λ)-jakautunut satunnaisluku. Silloin satunnaisluvut

$$M^{(j)} = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{\{B_n = j\}}$$

ovat riippumattomia ja $M^{(j)} \sim \text{Poisson}(\lambda_j)$, missä $\lambda_j = \lambda \cdot \mathbb{P}[B_n = j]$.

Esimerkki Vakuutusyhtiöön tulee korvausvaatimuksia $\lambda = \frac{7{,}0}{\text{vrk}}$ -intensiteettisen Poisson-prosessin mukaisesti. Korvausvaatimuksista 50 % koskee liikennevakuutuksia, 30 % kotivakuutuksia ja 20 % tapaturmavakuutuksia. Oletetaan, ettei vaatimusten tyyppien välillä ole tilastollista riippuvuutta, eli n:nnen vaatimuksen tyyppi on $B_n \in J := \{\text{LIIKENNE}, \text{KOTI}, \text{TAPATURMA}\}$ ja $B_1, B_2, B_3, \dots$ ovat riippumattomia.

Silloin vaikkapa tapaturmakorvausvaatimuksia saapuu Poisson-prosessina intensiteetillä

$$\lambda_T = 0{,}2 \cdot \frac{7{,}0}{\text{vrk}} = \frac{1{,}4}{\text{vrk}},$$

liikennevakuutusten korvauksia intensiteetillä

$$\lambda_L = 0{,}3 \cdot \frac{7{,}0}{\text{vrk}} = \frac{2{,}1}{\text{vrk}},$$

ja nämä saapumisprosessit ovat keskenään riippumattomet.

Yhdistetty Poisson-prosessi

Olkoot $Z_1, Z_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaislukuja ja $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ näistä riippumaton Poisson prosessi intensiteetillä λ.
Prosessia $S = (S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$,

$$S(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} Z_n$$

kutsutaan yhdistetyksi Poisson-prosessiksi.

(Huom: S ei välttämättä ole kokonaislukuarvoinen prosessi, joten sillä ei ole "tapahtumahetkien laskuri" -tulkintaa.)

Esimerkki Vakuutusyhtiöön saapuu korvausvaatimuksia Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ.
Korvausvaatimuksen n suuruus on Z_n euroa ja suuruudet $Z_1, Z_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita.
Oletetaan, että yksittäisen korvausvaatimuksen suuruuden odotusarvo on

$$\mathbb{E}[Z_n] = m$$

ja varianssi

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \mathbb{E}[Z_n^2] - \mathbb{E}[Z_n]^2 = \sigma^2.$$

Mitä voidaan sanoa hetkeen t mennessä saapuneiden korvausvaatimusten kokonaissummasta $S(t)$? Erityisesti, voidaanko laskea odotusarvo

$\mathbb{E}[S(t)]$ ja varianssi $\mathrm{Var}(S(t))$?

Tarvitsemme seuraavaa apulausetta.

<u>Lemma 9.6</u> Olkoot $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ riippumattomat ja samoin jakautuneet, ja M näistä riippumaton satunnainen epäneg. kokonaisluku.
Määritellään
$$S = \sum_{n=1}^{M} Z_n .$$
Silloin $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[M] \cdot \mathbb{E}[Z_n]$

ja $\mathrm{Var}(S) = \mathbb{E}[M] \cdot \mathrm{Var}(Z_n) + \mathrm{Var}(M) \cdot \mathbb{E}[Z_n]^2$.

<u>Todistus:</u> Lasketaan ehdollistamalla M:n arvolle
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}[M=m] \cdot \mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{M} Z_n \,\Big|\, M=m\Big] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}[M=m] \cdot m \cdot \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_n] \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m\, \mathbb{P}[M=m] \\
&= \mathbb{E}[Z_n] \cdot \mathbb{E}[M].
\end{aligned}$$
Samaan tapaan
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2] &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}[M=m] \cdot \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{n=1}^{M} Z_n\Big)^2 \,\Big|\, M=m\Big] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}[M=m] \cdot \Big(m\, \mathbb{E}[Z_n^2] + m(m-1) \cdot \mathbb{E}[Z_n]^2\Big) \\
&= \mathbb{E}[Z_n^2] \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m\, \mathbb{P}[M=m] + \mathbb{E}[Z_n]^2 \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)\, \mathbb{P}[M=m] \\
&= \mathbb{E}[Z_n^2]\, \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[Z_n]^2\, \mathbb{E}[M^2 - M].
\end{aligned}$$
Nyt varianssiksi saadaan
$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 \\
&= \mathbb{E}[Z_n^2]\, \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[Z_n]^2 \big(\mathbb{E}[M^2] - \mathbb{E}[M]\big) \\
&\qquad - \mathbb{E}[Z_n]^2\, \mathbb{E}[M]^2 \\
&= \big(\mathbb{E}[Z_n^2] - \mathbb{E}[Z_n]^2\big)\, \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[Z_n]^2 \big(\mathbb{E}[M^2] - \mathbb{E}[M]^2\big) \\
&= \mathrm{Var}(Z_n)\, \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[Z_n]^2 \cdot \mathrm{Var}(M).
\end{aligned}$$
$\square$

Lause 9.5 Olkoon $S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Z_n$ yhdistetty Poisson-prosessi kuten yllä. Jos

$$\mathbb{E}[Z_n] = m \quad \text{ja} \quad \mathrm{Var}(Z_n) = \sigma^2,$$

niin

$$\mathbb{E}[S(t)] = \lambda t m \quad \text{ja}$$

$$\mathrm{Var}(S(t)) = \lambda t \cdot (\sigma^2 + m^2).$$

Todistus: Sovelletaan edellistä Lemmaa. Käytetään tunnettuja Poisson-jakauman tunnuslukuja

$$\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$$

$$\mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t.$$

Silloin

$$\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}[N(t)]\, \mathbb{E}[Z_n] = \lambda t m$$

ja

$$\mathrm{Var}(S(t)) = \mathbb{E}[N(t)]\, \mathrm{Var}(Z_n) + \mathrm{Var}(N(t))\, \mathbb{E}[Z_n]^2$$

$$= \lambda t \sigma^2 + \lambda t m^2 = \lambda t (\sigma^2 + m^2). \quad \square$$

Jatkuva-aikaiset Markov-prosessit

Jatkuva-aikaisella stokastisella prosessilla $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ äärellisellä tai numeroituvasti äärettömällä tilajoukolla S on Markov-ominaisuus, jos

$$\mathbb{P}[X(t+h) = y \mid X(t) = x, H_{t-}] = (P(h))_{x,y}$$

kaikilla $x, y \in S$, $t \in \mathbb{R}_+$, $h \geq 0$, ja tapahtumilla H_{t-} jotka riippuvat vain prosessin menneistä arvoista $X(s)$, $s \leq t$.

$$\left(\text{eli } \mathbb{1}_{H_{t-}} \in \sigma(X(s) : s \leq t)\right)$$

Lukuja $(P(h))_{x,y}$ sanotaan prosessin h:n aikayksikön siirtymätodennäköisyyksiksi ja näistä muodostettua matriisia $P(h)$ vastaavasti h:n aikayksikön siirtymämatriisiksi. Ero diskreettiaikaisiin Markov-ketjuihin on, että $h \geq 0$ on mielivaltainen positiivinen reaaliluku.

Esimerkki (Poisson-prosessi)

Olkoon $N = (N(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Prosessin N tilajoukko on $S = \mathbb{Z}_+$ (epäneg. kokonaisluvut). Onko N:llä Markov-ominaisuus?

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa tapahtumaksi H_{t-} otetaan varma tapahtuma ($H_{t-} = \Omega$), eli ehdollistetaan vain prosessin arvolle $N(t)$ hetkellä t. Silloin

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[N(t+h) = l \mid N(t) = k] \\
&= \mathbb{P}[N(t+h) - N(t) = l-k \mid N(t) - N(0) = k] \\
&= \mathbb{P}[N(t+h) - N(t) = l-k] \qquad \text{(riippumattomat lisäykset)} \\
&= \begin{cases} e^{-\lambda h}(\lambda h)^{l-k}/(l-k)! & \text{jos } l-k \geq 0 \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Näin saadaan selville, että h:n aikayksikön siirtymätodennäköisyyksien olisi oltava

$$(\mathbb{P}(h))_{k,l} = \begin{cases} e^{-\lambda h} \dfrac{(\lambda h)^{l-k}}{(l-k)!} & l \geq k \\ 0 & \text{muuten}. \end{cases}$$

Entä jos ehdollistamme vielä arvoille hetkillä $s_1 < s_2 < \dots < s_n < t$? Lisäysten avulla kirjoitetaan

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big[N(t+h) = l \mid N(t) = k,\ N(s_1) = m_1, \dots, N(s_n) = m_n\big] \\ &= \mathbb{P}\big[N(t+h) - N(t) = l-k \mid N(s_1) - N(0) = m_1, \\ &\qquad N(s_2) - N(s_1) = m_2 - m_1, \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad N(s_n) - N(s_{n-1}) = m_n - m_{n-1}, \\ &\qquad N(t) - N(s_n) = k - m_n\big] \\ &= \mathbb{P}\big[N(t+h) - N(t) = l-k \mid N(t) = k\big] = (\mathbb{P}(h))_{k,l} \end{aligned}$$

erillisten aikavälien lisäysten riippumattomuuden perusteella.

Puuttumatta tällä kurssilla tarkkoihin mittateoreettisiin perusteluihin toteamme, että yllä oleva riittää Markov-ominaisuuden perusteluksi.

Markov-ominaisuudesta seuraa, että prosessi viettää alkutilassaan eksponenttijakautuneen ajan ja hyppää sitten johonkin toiseen tilaan. Tarkemmin:

<u>Lause</u> 10.3 Tilasta $x \in S$ käynnistyvälle jatkuva-aikaiselle Markov-prosessille $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ ensimmäinen hyppyhetki

$$T = \min\{t \geq 0 \mid X(t) \neq x\}$$

noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla

$$\lambda_x = 1/\mathbb{E}_x[T].$$

Erityisesti, millä tahansa $y \neq x$ ja $h \geq 0$

$$\big(\mathbb{P}(h)\big)_{x,y} = \mathbb{P}\big[X(h)=y \,\big|\, X(0)=x\big] = \mathbb{P}_x\big[X(h)=y\big]$$
$$\leq \mathbb{P}_x\big[T \leq h\big] = 1 - e^{-h\lambda_x}$$
$$\leq h \cdot \lambda_x .$$

Osoittautuu, että derivaatta

$$\lambda_{x,y} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\big(\mathbb{P}(h)\big)_{x,y} \leq \lambda_x$$

on olemassa, ja sitä kutsutaan Markov-prosessin hyppyvauhdiksi tai hyppytahdiksi tilasta x tilaan y. Selvästi

$$1 = \mathbb{P}_x\big[X(h) \in S\big] = \mathbb{P}_x\big[X(h)=x\big] + \sum_{y \neq x} \mathbb{P}_x\big[X(h)=y\big]$$
$$= \big(\mathbb{P}(h)\big)_{x,x} + \sum_{y \neq x} \big(\mathbb{P}(h)\big)_{x,y}$$

joten derivoimalla pisteessä $h=0$ ja huomaamalla, että

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\big(\mathbb{P}(h) - 1\big) = -\lambda_x$$

saadaan

$$\lambda_x = \sum_{y \neq x} \lambda_{x,y} .$$

Derivaatta pisteessä $h=0$ määrittelee Markov-prosessin generaattorimatriisin

$$Q := \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\big(\mathbb{P}(h) - I\big),$$

jonka komponentit ovat ylläolevan perusteella

$$Q_{x,y} = \begin{cases} -\sum_{z \neq x} \lambda_{x,z} & \text{jos } x = y \\ \lambda_{x,y} & \text{jos } x \neq y \end{cases} .$$

Generaattorimatriisilla voidaan erityisesti selvittää hetkittäisten tilajakaumien

$$\mu(t) = \big(\mu_x(t)\big)_{x \in S} \qquad \mu_x(t) = \mathbb{P}\big[X(t) = x\big]$$

aikakehitys, sillä

$$\begin{aligned}
\mu_y(t+h) &= \mathbb{P}\big[X(t+h) = y\big] \\
&= \sum_{x \in S} \mathbb{P}\big[X(t) = x\big] \cdot \mathbb{P}\big[X(t+h) = y \,\big|\, X(t) = x\big] \\
&= \sum_{x \in S} \mu_x(t) \cdot \big(P(h)\big)_{x,y}
\end{aligned}$$

ja siten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mu_y(t) &= \frac{d}{dh}\Big|_{h=0}\big(\mu_y(t+h)\big) = \sum_{x \in S} \mu_x(t) \Big(\frac{d}{dh}\Big|_{h=0} P(h)\Big)_{x,y} \\
&= \sum_{x \in S} \mu_x(t) \cdot Q_{x,y}
\end{aligned}$$

tai vektorimuodossa

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mu(t) = \mu(t)\, Q}\,.$$

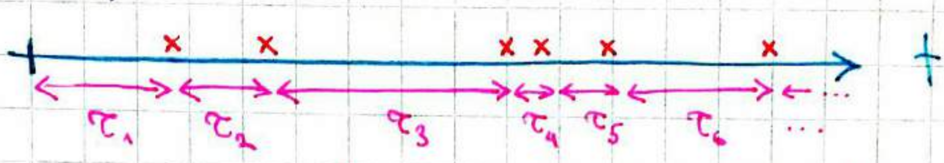
Jakauma $\pi = (\pi_x)_{x \in S}$, joka toteuttaa

$$\pi = \pi Q$$

ei muutu ajassa: jos prosessi lähetetään satunnaisesta, jakaumaa π noudattavasta tilasta, on sen hetkittäinen tilajakauma millä tahansa hetkellä edelleen π. Tällaista jakaumaa kutsutaan <u>tasapainojakaumaksi</u> tai <u>stationaariseksi jakaumaksi</u>.

Palautetaan mieliin:

- Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda > 0$



riippumattomat $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakautuneet väliajat

laskuriprosessi $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$

- $N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poisson}((t-s)\cdot\lambda)$
- $N(t_1) - N(s_1), \ldots, N(t_k) - N(s_k)$ $\perp\!\!\!\perp$

  kun $0 \le s_1 < t_1 \le s_2 < \ldots \le s_k < t_k$

- Jatkuva-aikainen Markov-prosessi $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$
  - tilajoukko S äärellinen tai numeroituvasti ääretön
  - Markov-ominaisuus:

$$\mathbb{P}\left[X(t+h) = y \mid X(t) = x, H_{t-}\right] = (\mathbb{P}(h))_{x,y}$$

$\forall\, t, h \ge 0$ $\forall\, x, y \in S$ $\forall\, H_{t-}$ menneisyyttä

eli arvoja $(X_s)_{s \in [0,t]}$ koskeva tapahtuma

Hetkittäiset tilajakaumat

Tilajakauma hetkellä t : $\mu(t) = (\mu_x(t))_{x\in S}$

missä $\mu_x(t) = \mathbb{P}[X(t)=x]$.

Lause 11.2 Kaikilla $t, h \geq 0$ pätee

$$\mu_y(t+h) = \sum_{x\in S} \mu_x(t)\,(P(h))_{x,y}$$

eli vektorimuodossa $\mu(t+h) = \mu(t)\,P(h)$

ja erityisesti $\mu(t) = \mu(0)\,P(t)$.

Todistus: Lasketaan ehdollistamalla hetken t tilalle $X(t)$:

$$\mu_y(t+h) = \mathbb{P}[X(t+h)=y]$$

$$= \sum_{x\in S} \underbrace{\mathbb{P}[X(t)=x]}_{=\mu_x(t)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}[X(t+h)=y \mid X(t)=x]}_{=(P(h))_{x,y}}$$

$$= \sum_{x\in S} \mu_x(t)\cdot(P(h))_{x,y}. \qquad \square$$

Hyppyvauhdit ja generaattorimatriisi

Jos Markov-prosessille $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ pätee

$$\frac{1}{h}\mathbb{P}[X(t+h)=y \mid X(t)=x] \xrightarrow[h\to 0]{} \lambda_{x,y}$$

kun $x,y\in S$, $x\neq y$, sanotaan lukua $\lambda_{x,y}$ prosessin hyppyvauhdiksi tai hyppyintensiteetiksi tilasta x tilaan y.

Koska $\mathbb{P}[X(t+h)=x \mid X(t)=x] = 1-\sum_{y\neq x} \mathbb{P}[X(t+h)=y \mid X(t)=x]$

saadaan silloin myös

$$\frac{1}{h}\Big(\mathbb{P}[X(t+h)=x \mid X(t)=x] - 1\Big) \xrightarrow[h\to 0]{} -\sum_{y\neq x} \lambda_{x,y} .$$

Matriisia

$$Q = \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} P(h)$$

sanotaan prosessin generaattorimatriisiksi, ja ylläolevan mukaan

$$Q_{x,y} = \begin{cases} \lambda_{x,y} & \text{jos } x \neq y \\ -\sum_{z\neq x} \lambda_{x,z} & \text{jos } x = y \end{cases} .$$

Lause 11.4 Siirtymätodennäköisyysmatriisit $P(t)$ toteuttavat puoliryhmäominaisuuden

$$P(t+s) = P(t)\,P(s) \qquad \text{(matriisitulo)}$$

ja differentiaaliyhtälön

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t)\,Q = Q\,P(t).$$

Korollaari Siirtymätodennäköisyysmatriisi $P(t)$ saadaan generaattorimatriisista Q matriisieksponenttina

$$P(t) = \exp(tQ) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n Q^n .$$

Korollaarin todistus: Nollan aikayksikön siirtymämatriisi on yksikkömatriisi $P(0) = I$. Matriisieksponentti $\exp(tQ)$ on Lauseen 11.4 differentiaaliyhtälön $\frac{d}{dt}P(t) = P(t)\,Q$ yksikäsitteinen ratkaisu tällä alkuehdolla. $\square$

Lauseen 11.4 todistus:

Puoliryhmäominaisuutta varten lasketaan kuten aiemminkin

$$(\mathbb{P}(t+h))_{x,z} = \mathbb{P}[X(t+h)=z \mid X(0)=x]$$

$$= \sum_{y\in S} \underbrace{\mathbb{P}[X(t)=y \mid X(0)=x]}_{(\mathbb{P}(t))_{x,y}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}[X(t+h)=z \mid X(t)=y, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{historiaa koskeva ehto}}}{X(0)=x}]}_{(\mathbb{P}(h))_{y,z}}$$

$$= \sum_{y\in S} (\mathbb{P}(t))_{x,y} \cdot (\mathbb{P}(h))_{y,z} = (\mathbb{P}(t)\mathbb{P}(h))_{x,z}.$$

Muistetaan $\frac{d}{dh}\big|_{h=0} \mathbb{P}(h) = Q$ ja kirjoitetaan

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(t) = \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} \mathbb{P}(t+h) = \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} (\mathbb{P}(t)\mathbb{P}(h))$$

$$= \mathbb{P}(t)\left(\frac{d}{dh}\Big|_{h=0} \mathbb{P}(h)\right) = \mathbb{P}(t)\, Q.$$

Differentiaaliyhtälön jälkimmäinen muoto tarkistetaan samaan tapaan. $\square$

Tasapainojakaumat

Tilajoukon S jakaumaa $\pi = (\pi_x)_{x\in S}$ sanotaan prosessin *tasapainojakaumaksi* jos

$$\pi Q = 0 \quad \text{eli} \quad \sum_{x\in S} \pi_x Q_{xy} = 0 \quad \forall y.$$

Satunnaisesta, jakaumaa π noudattavasta tilasta käynnistetyn prosessin hetkittäiset tilajakaumat $\mu(t)$ kaikilla ajanhetkillä t ovat edelleen π, koska $\mu(0) = \pi$ ja Lauseiden 11.2 ja 11.4 perusteella

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = \frac{d}{dt}(\mu(0)\mathbb{P}(t)) = \frac{d}{dt}(\pi\, \mathbb{P}(t))$$

$$= \pi \frac{d}{dt}\mathbb{P}(t) = \pi Q\, \mathbb{P}(t) = 0\, \mathbb{P}(t) = 0.$$

Esimerkki (Poisson-prosessi)

Muistutetaan, että intensiteetin λ Poisson-prosessi $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ on jatkuva-aikainen Markov-prosessi numeroituvasti äärettömällä tilajoukolla $S = \mathbb{Z}_+$ ja siirtymätodennäköisyysmatriiseilla

$$(\mathbb{P}(h))_{k,l} = \begin{cases} e^{-\lambda h} \dfrac{(\lambda h)^{l-k}}{(l-k)!} & \text{jos } l \geq k \\ 0 & \text{jos } l < k. \end{cases}$$

Lasketaan generaattorimatriisi

$$Q_{k,l} = \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} (\mathbb{P}(h))_{x,y}$$

derivoimalla

$$\frac{d}{dh}\left(e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^{l-k}}{(l-k)!}\right) = \frac{\lambda^{l-k}}{(l-k)!}\left(-\lambda e^{-\lambda h} \cdot h^{l-k} + e^{-\lambda h}(l-k) h^{l-k-1}\right)$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} \begin{cases} -\lambda & \text{jos } l = k \\ +\lambda & \text{jos } l = k+1 \\ 0 & \text{jos } l \geq k+2. \end{cases}$$

Saadaan

$$Q_{k,l} = \begin{cases} -\lambda & \text{jos } l = k \\ +\lambda & \text{jos } l = k+1 \\ 0 & \text{jos } l \notin \{k, k+1\}. \end{cases}$$

Poisson-prosessin hyppyvauhti tilasta k tilaan $k+1$ on λ, ja muut hyppyvauhdit ovat nollia.

Olennaisesti samat laskut näyttävät, että hetkittäiset tilajakaumat $\mu(t) = (\mu_k(t))_{k \in \mathbb{Z}_+}$ $\mu_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ toteuttavat differentiaaliyhtälön $\frac{d}{dt}\mu(t) = \mu(t)\, Q$.

Yhtälön $\pi Q = 0$ eli $-\lambda \pi_l + \lambda \pi_{l-1} = 0 \quad \forall l$ ainoat ratkaisut ovat vakioita $\pi_l = c \quad \forall l$, joten stationaarista jakaumaa Poisson-prosessilla ei ole.

Jatkuva-aikaisen Markov-prosessin konstruktio

Jos on annettu hyppyvauhdit $\lambda_{x,y}$, $x \neq y$, tai vastaava generaattorimatriisi $Q = (Q_{x,y})_{x,y \in S}$, miten prosessi voidaan konstruoida — vai onko tämä ylipäänsä mahdollista?

Ei ole kovin vaikeaa nähdä, että äärettömillä tilajoukoilla olisi olemassa sellaisia hyppyvauhtien valintoja, joilla prosessi saattaisiin karkaamaan äärellisessä ajassa pois mistä tahansa tilajoukon äärellisestä osajoukosta.

(Ongelmista kiinnostunut lukija voi pohtia vaikkapa tilajoukon $S = \mathbb{Z}_+$ "kiihdytettyä" Poisson-prosessia, jonka hyppyvauhdit kasvavat mitä suurempi prosessin arvo on, esimerkiksi

$$\lambda_{k,l} = \begin{cases} (k+1)^2 & \text{jos } l = k+1 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

Kuinka kauan tason $n \in \mathbb{Z}_+$ saavuttaminen odotusarvoisesti kestää? Entä kun $n \to \infty$?)

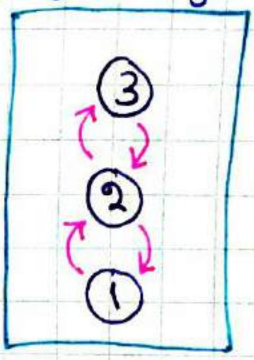
Joudumme siis välttämättä tekemään joitakin oletuksia, jotta konstruktio olisi mahdollinen. Leskelän monisteessa on esitetty konstruktio rajoitettujen hyppyvauhtien oletuksella

$$\sup_{x \in S} \Big(\sum_{y \neq x} \lambda_{x,y} \Big) < \infty .$$

Esitämme tässä seuraavaksi havainnollisen konstruktion (vielä ylläolevaa rajoittavammalla) oletuksella, että tilajoukko S on äärellinen.

Muodostetaan ensin siirtymäkaavio: suunnattu verkko, jonka solmut ovat tilat $x \in S$ ja linkit ovat parit $(x,y) \in S \times S$ joille $x \neq y$ ja $\lambda_{x,y} > 0$.

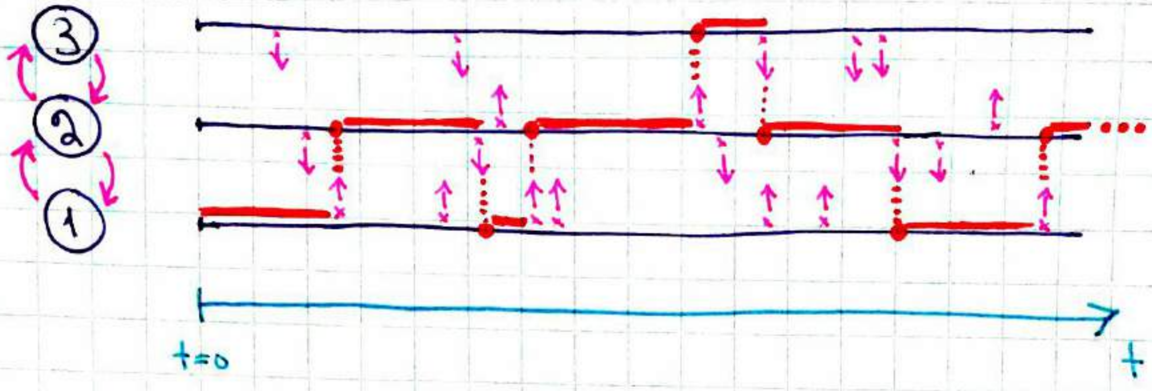
Esim: $$S = \{1, 2, 3\}$$ $$\lambda_{1,3} = 0, \quad \lambda_{3,1} = 0$$ $$\lambda_{1,2}, \lambda_{2,1}, \lambda_{2,3}, \lambda_{3,2} > 0$$



Kullekin linkille (x,y) annetaan sitten Poisson-prosessi $N^{(x,y)} = (N^{(x,y)}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ intensiteetillä $\lambda_{x,y} > 0$, toisistaan riippumatta. Havaitaan, että koska jokainen Poisson-prosessi on lokaalisti äärellinen ja linkkejä on vain äärellisen monta, on millä tahansa rajoitetulla aikavälillä vain äärellisen monta mitään linkkiä vastaavaa tapahtumahetkeä. Siksi voidaan määritellä prosessi $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ alkujakaumalla $\mu(0) = (\mu_x(0))_{x \in S}$ seuraavasti:

- Valitaan satunnainen alkutila $X(0)$ jakauman $\mu(0)$ mukaisesti.
- Jos $X(0) = x_0$, niin tilassa x_0 pysytään siihen ajanhetkeen $\tau_1 > 0$ asti, jolloin ensimmäisen kerran jollakin x_0:sta lähtevän linkin Poisson-prosessilla on tapahtumahetki.
- Hetkellä $\tau_1 > 0$ hypätään siihen tilaan x_1, johon osoittavalla linkillä (x_0, x_1) oli tapahtumahetki: $X(\tau_1) = x_1$. Tilassa x_1 pysytään siihen ajanhetkeen $\tau_2 > \tau_1$ asti, jolloin ensimmäisen kerran jollakin x_1:stä lähtevän linkin Poisson-prosessilla on tapahtumahetki
- Hetkellä $\tau_2 > \tau_1$ hypätään siihen tilaan x_2, johon osoittavalla linkillä (x_1, x_2) oli tapahtumahetki: ...

Havainnollistus: $S = \{1,2,3\}$, $\lambda_{x,y}$ kuten edellisessä



Linkeille annettuja Poisson-prosesseja voi ajatella "herätyskelloina": jos prosessi on tilassa josta lähtevän linkin "herätyskello" soi, prosessi hyppää vastaavaa linkkiä pitkin uuteen tilaan. Muualla soivat "herätyskellot" eivät aiheuta hyppyjä.

Formaalimmin:

1°) Valitaan $x_0 \in S$ annetun alkujakauman $\mu(0)$ mukaisesti.

2°) Kun $x_0, x_1, \ldots, x_n \in S$ ja $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n$ on määritelty, määritellään T_{n+1} kaavalla

$$T_{n+1} = \min\left\{ t > T_n \;\middle|\; \exists x_{n+1} \in S \text{ siten, että } N^{(x_n,x_{n+1})}(t) > N^{(x_n,x_{n+1})}(T_n) \right\}$$

ja x_{n+1} tulee määritellyksi samasta ehdosta.

3°) Prosessi $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ on paloittain vakio, oikealta jatkuva (satunnainen) ajan funktio

$$\begin{aligned}
X(t) &= x_0 && \text{kun } t \in [0, T_1) \\
X(t) &= x_1 && \text{kun } t \in [T_1, T_2) \\
X(t) &= x_2 && \text{kun } t \in [T_2, T_3) \\
&\vdots && \qquad\vdots
\end{aligned}$$

Näin määritelty prosessi on:

(i) hyvin määritelty kaikilla ajanhetkillä $t \in \mathbb{R}_+$

- Todennäköisyys sille, että useampi "herätyskello" koskaan "soi" samanaikaisesti on 0. Siis hyppyjen suunnat ovat yksikäsitteiset.
- Poisson-prosessit ovat lokaalisti äärellisiä ja linkkejä on vain äärellisen monta, joten millä tahansa rajoitetulla aikavälillä on vain äärellisen monta "herätyskellon soimista". Siksi hyppyjä voidaan seurata koko aikavälin yli (ei hyppyhetkien kasautumista).

  Samasta syystä $T_n \longrightarrow +\infty$ kun $n \longrightarrow \infty$, joten jokainen $t \in [0,\infty)$ kuuluu jollekin väleistä $[T_n, T_{n+1})$ ja arvo $X(t) = x_n$ on määritelty.

(ii) jatkuva-aikainen Markov-prosessi halutuilla hyppyvauhdeilla $\lambda_{x,y}$

- Kiinnitetään $t \geq 0$, oletetaan $X(t) = x$ ja tarkastellaan aikaväliä $[t, t+h]$, missä $h > 0$ on pieni, $h \to 0$.

  Havaitaan:

$$\mathbb{P}[\text{useampi kello soi välillä } [t,t+h]] = \mathcal{O}(h^2)$$

ja
$$\mathbb{P}[\text{kello } (x,y) \text{ soi välillä } [t,t+h]] = 1 - e^{-\lambda_{x,y} h} = \lambda_{x,y} \cdot h + \mathcal{O}(h^2)$$

ja vieläpä

$$\mathbb{P}[\text{ainoastaan kello } (x,y) \text{ soi välillä } [t,t+h]] = \left(1 - e^{-\lambda_{x,y} h}\right) \prod_{(z,w) \neq (x,y)} e^{-\lambda_{z,w} h} = \lambda_{x,y} \cdot h + \mathcal{O}(h^2).$$

Näistä ja Poisson-prosessien riippumattomista lisäyksistä

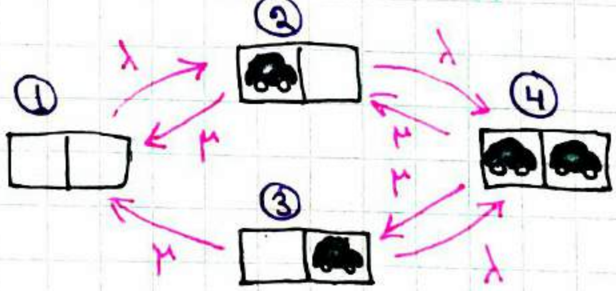
$$\mathbb{P}[X(t+h)=y \mid X(t)=x,\ H_{t-}]$$
$$= \mathbb{P}[\text{ainoastaan kello } (x,y) \text{ soi välillä } [t,t+h]] + \mathcal{O}(h^2)$$
$$= \lambda_{x,y} \cdot h + \mathcal{O}(h^2).$$

Otetaan vielä yksi käytännönläheinen esimerkki, jota koskevat laskut löytyvät tarkemmin liitteenä olevasta Mathematica-tiedostosta.

<u>Esimerkki</u> (Parkkipaikka)

Parkkipaikalla on kaksi parkkiruutua. Pysäköimään yrittäviä autoja saapuu riippumattomin eksponenttijakautunein välijoin keskimäärin kerran 10 minuutissa. Auto pysäköi ensimmäiseen ruutuun, jos se on vapaana, muuten toiseen ruutuun, jos se on vapaana, ja molempien ruutujen ollessa varattuna poistuu paikalta. Pysäköineet autot pysyvät ruuduissaan eksponenttijakautuneet ajat, keskimäärin 45 minuuttia, toisistaan ja saapuvista autoista riippumatta.

SIIRTYMÄ-KAAVIO



$$\lambda = \frac{1}{10 \text{ min}}$$

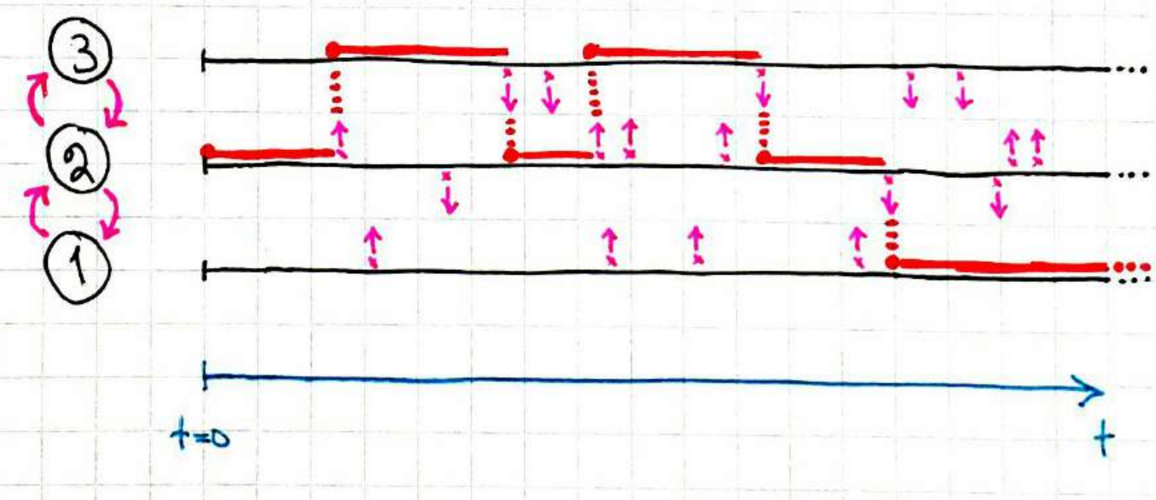
$$\mu = \frac{1}{45 \text{ min}}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & 0 & \lambda \\ \mu & 0 & -\lambda-\mu & \lambda \\ 0 & \mu & \mu & -2\mu \end{bmatrix}$$

Palautetaan mieliin:

- Jatkuva-aikaisen Markov-prosessin $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ hyppyvauhdit $\lambda_{x,y}$, $x,y \in S$, $x \neq y$:
$$\mathbb{P}[X(t+h) = y \mid X(t) = x] = h \cdot \lambda_{x,y} + o(h)$$
- Siirtymäkaavio: suunnattu verkko, solmut $x \in S$, linkit (x,y) missä $\lambda_{x,y} > 0$.
- Prosessin konstruktio (kun S on äärellinen) ja tapa hahmottaa prosessi:
    - linkeillä (x,y) riippumattomat herätyskellot, jotka hälyttävät $\lambda_{x,y}$-intensiteettisen Poisson-prosessin mukaisesti
    - prosessin ollessa tilassa x ja linkin (x,y) herätyskellon hälyttäessä hyppää prosessi vastaavaa linkkiä pitkin tilaan y

Esim:



Tarkastellaan nyt sitä aikaa, jonka prosessi viettää tietyssä tilassa x ennen hyppäämistään siitä pois sekä sitä satunnaista linkkiä, jota pitkin hyppy tehdään.

Jos hetkellä $s \in \mathbb{R}_+$ prosessi on tilassa $X(s)=x$, niin pois hyppäämisen määräävät x:stä lähtevien linkkien (x,y) herätyskellojen Poisson-prosessit $N^{(x,y)}$. Muistetaan, että hetkestä s aloitetut Poisson-prosessit $\tilde{N}^{(x,y)}$

$$\tilde{N}^{(x,y)}(t) := N^{(x,y)}(s+t) - N^{(x,y)}(s)$$

ovat edelleen Poisson-prosesseja, ja näiden ensimmäisten tapahtumahetkien ajat

$$T^{(x,y)} = \min\{t>0 \mid \tilde{N}^{(x,y)}(t) > 0\}$$

ovat eksponenttijakautuneita parametrilla $\lambda_{x,y}$ (vastaavan Poisson-prosessin intensiteetti), ja riippumattomia (koska liittyvät riippumattomiin herätyskelloihin). Siis hetkestä s eteenpäin tilassa x vietetty aika τ on

$$\tau = \min_y T^{(x,y)}$$

(riippumattomista eksponenttijakautuneista odotusajoista pienin)

ja hypyn kohde on se tila ξ jolla minimi saavutetaan $\left(T^{(x,\xi)} = \tau\right)$ eli

$$\xi = \operatorname*{argmin}_y T^{(x,y)} .$$

Aika τ hyppyyn ja hypyn kohde ξ ovat satunnaiset, lopulta herätyskellojen satunnaisuudesta johtuen. Näiden satunnaismuuttujien jakaumat voidaan päätellä seuraavan lauseen perusteella.

Lause 10.6 Oletetaan, että $(T_j)_{j\in J}$ on kokoelma riippumattomia satunnaislukuja, $T_j \sim \mathrm{Exp}(\lambda_j)$ ja $\sum_{j\in J} \lambda_j < \infty$ (tämä ehto on aina voimassa jos indeksijoukko J on äärellinen). Määritellään

$$\tau = \min_j T_j \quad \text{ja} \quad \xi = \operatorname{argmin}_j T_j .$$

Silloin $\tau \sim \mathrm{Exp}(\sum_j \lambda_j)$ ja

$$\mathbb{P}[\xi = i] = \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j} \qquad \forall i \in J$$

ja lisäksi τ ja ξ ovat riippumattomat.

Todistus: Muistutetaan, että eksponenttijakaumalle pätee

$$\mathbb{P}[T_j > t] = \int_t^\infty ds \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda s} = \Big/_t^\infty (-e^{-\lambda s}) = e^{-\lambda t}.$$

Riippumattomuuden perusteella lasketaan τ:in jakauma

$$\mathbb{P}[\tau > t] = \mathbb{P}[\min_j T_j > t] = \mathbb{P}[T_j > t \ \ \forall j \in J]$$

$$= \prod_{j\in J} \mathbb{P}[T_j > t] = \prod_{j\in J} e^{-\lambda_j t} = e^{-t\cdot \sum_j \lambda_j},$$

joka on väitetty $\tau \sim \mathrm{Exp}(\sum_j \lambda_j)$.

Selvitetään seuraavaksi ξ:n jakauma. Tapahtuma $\{\xi = i\}$ sattuu täsmälleen silloin jos $T_i < T_j \ \ \forall j \neq i$ eli $T_i < \min_{j\neq i} T_j =: T'$. Kuten yllä, $T' = \min_{j\neq i} T_j \sim \mathrm{Exp}(\sum_{j\neq i} \lambda_j)$ ja T' on riippumaton T_i:stä koska kaikki minimissä esiintyvät satunnaisluvut ovat.

Siis

$$\mathbb{P}[\xi = i] = \mathbb{P}[T_i < T']$$

$$= \int_0^\infty ds\, \lambda_i e^{-\lambda_i s} \cdot \int_s^\infty ds'\, \lambda' \cdot e^{-\lambda' s'}$$

missä $\lambda' = \sum_{j\neq i} \lambda_j$.

Lasketaan vielä yleisemmin, kun $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}[t < T_i < T'] = \int_t^\infty ds\, \lambda_i \cdot e^{-s\lambda_i} \int_s^\infty ds'\, \lambda' \cdot e^{-s'\lambda'}$$

$$= \int_t^\infty ds\, \lambda_i \cdot e^{-s\lambda_i} \cdot \left(e^{-s\lambda'}\right) = \lambda_i \cdot \int_t^\infty e^{-s(\lambda_i + \lambda')}$$

$$= \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \lambda'} \cdot e^{-t \cdot (\lambda_i + \lambda')} = \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j} \cdot e^{-t \cdot \sum_j \lambda_j}.$$

Asettamalla $t = 0$ havaitaan ensinnäkin

$$\mathbb{P}[\xi = i] = \mathbb{P}[T_i < T'] = \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j},$$

eli ξ:n jakauma on väitteen mukainen.

Riippumattomuuden todistamiseksi havaitaan, että millä tahansa $t \geq 0$ pätee

$$\mathbb{P}[\xi = i \text{ ja } \tau > t] = \mathbb{P}[t < T_i < T']$$

$$= \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j} \cdot e^{-t \cdot \sum_j \lambda_j} = \mathbb{P}[\xi = i] \cdot \mathbb{P}[\tau > t].$$

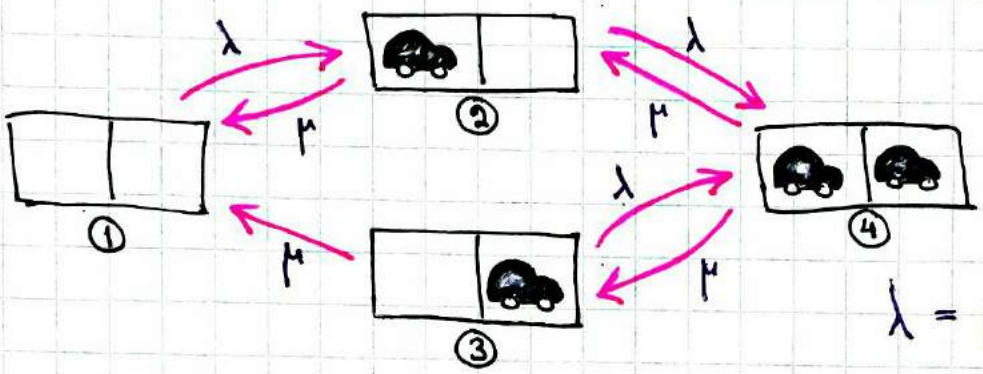
Satunnaismuuttujien ξ ja τ riippumattomuus seuraa tästä. $\square$

Kun ylläolevaa lausetta sovelletaan jatkuva-aikaiseen Markov-prosessiin $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ joka hetkellä s on tilassa $X(s) = x$, saadaan johtopäätökset:

- odotusaika τ seuraavaan hyppyyn on eksponenttijakautunut parametrilla $\sum_y \lambda_{x,y}$ (erityisesti $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\sum_y \lambda_{x,y}}$)
- tila ξ johon seuraavaksi hypätään noudattaa jakaumaa
$$\mathbb{P}[\xi = z] = \frac{\lambda_{x,z}}{\sum_y \lambda_{x,y}}$$
- odotusaika τ hyppyyn ja hypyn kohde ξ ovat $\perp\!\!\!\perp$.

Esimerkki (Parkkipaikka)

Palataan aiemmin tarkastelemaamme malliin kahden parkkiruudun parkkipaikasta, johon saapuu autoja keskimäärin kerran 10 minuutissa ja jossa autot viettävät parkissa keskimäärin 45 minuuttia.
Siirtymäkaavio ja hyppyintensiteetit olivat



$$\lambda = \frac{1}{10 \text{ min}}$$

$$\mu = \frac{1}{45 \text{ min}}.$$

Oletetaan, että nykyhetkellä ensimmäinen ruutu on vapaa ja toinen ruutu varattu eli prosessi on tilassa $x=3$.

Kuinka kauan kestää ennen kuin joko uusi auto tulee ensimmäiseen ruutuun tai toisessa ruudussa oleva poistuu? Ylläolevan perusteella odotusaika τ tähän on eksponenttijakautunut parametrilla

$$\sum_y \lambda_{3,y} = \lambda_{3,4} + \lambda_{3,1} = \lambda + \mu = \frac{1}{10 \text{ min}} + \frac{1}{45 \text{ min}}$$

$$= \frac{11}{90 \text{ min}} \approx 0{,}1222 \frac{1}{\text{min}}$$

eli odotusarvoisesti kestää

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\lambda_{3,4} + \lambda_{3,1}} = \frac{90}{11} \text{ min} \approx 8{,}18 \text{ min}$$

Millä todennäköisyydellä ensin saapuu uusi auto ennen kuin parkissa oleva poistuu?

$$\mathbb{P}[\xi = 4] = \frac{\lambda_{3,4}}{\lambda_{3,4} + \lambda_{3,1}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \approx 0{,}818.$$

Tasapainojakaumat ja rajajakaumat

Tietyin oletuksin (yhtenäisyys, jaksottomuus, äärellistilaisuus) diskreettiaikaisten Markov-ketjujen hetkittäiset tilajakaumat konvergoivat pitkässä juoksussa yksikäsitteiseen tasapainojakaumaan. Entä jatkuva-aikaisten Markov-prosessien tapauksessa?

Muistutetaan, että tasapainojakauma on sellainen $\pi = (\pi_x)_{x \in S}$, jolle

$$\underbrace{\pi_x \geq 0 \quad \forall x \in S, \quad \sum_{x \in S} \pi_x = 1}_{\text{joukon } S \text{ todennäköisyysjakauma}}$$

ja joka toteuttaa tasapainoyhtälöt

$$\pi Q = 0 \quad \text{eli} \quad \sum_{x \in S} \pi_x Q_{xy} = 0 \quad \forall y.$$

$$\left(\text{Muistutus:} \quad Q_{x,y} = \begin{cases} \lambda_{x,y} & \text{jos } x \neq y \\ -\sum_z \lambda_{x,z} & \text{jos } x = y \end{cases} . \right)$$

Samaan tapaan kuin diskreettiaikaisille Markov-ketjuille määritellään yhtenäisyys siirtymäkaavion avulla. Jatkuva-aikainen Markov-prosessi on yhtenäinen, jos kaikilla $x, y \in S$, $x \neq y$, on olemassa $x = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = y$ siten että hyppyvauhdit $\lambda_{z_{j-1}, z_j} > 0$ ovat positiivisia kaikilla linkeillä (z_{j-1}, z_j), $j = 1, \dots, n$. (Kun tämä ehto toteutuu tilapareille x, y, sanotaan, että tilasta x on pääsy tilaan y).

Muistutetaan vielä hetkittäisen tilajakauman $\mu(t)$ määritelmä

$$\mu(t) = \left(\mu_x(t)\right)_{x\in S}, \quad \mu_x(t) = \mathbb{P}[X(t)=x].$$

Pitkän aikavälin käyttäytymisen perustulos on seuraava.

<u>Lause 11.8</u> Äärellisen tilajoukon S yhtenäisellä Markov-prosessilla on yksikäsitteinen tasapainojakauma π ja mistä tahansa alkutilasta (tai alkujakaumasta) lähtien hetkittäiset tilajakaumat suppenevat tähän

$$\mu(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi.$$

Huomautetaan, että toisin kuin diskreetissä ajassa, ei jaksottomuutta tarvinnut olettaa. Hyppyjen välit ovat eksponenttijakautuneita, eli erityisesti jatkuvia satunnaislukuja, jotka voivat saada erilaisia arvoja ja jaksollisuutta ei pääse aiheutumaan.

Jatkuva-aikaiset Markov-kustannusmallit

Kuten diskreetissäkin ajassa, Markov-prosesseista tyypillisesti esitettävät kysymykset voidaan usein muotoilla seuraavanlaisena "kustannusmallina".

Merkitään kustannusten (satunnaista) aiheutumistahtia hetkellä s

$$C_s \in \mathbb{R}$$

(Tarkemmin: satunnaismuuttuja $C_s : \Omega \to \mathbb{R}$)

jolloin hetkeen t mennessä kertynyt kustannus on integraali

$$\int_0^t C_s \, ds .$$

Oletetaan, että odotusarvoinen kustannusten aiheutumistahti riippuu vain prosessin tilasta eikä menneisyydestä,

$$\mathbb{E}[C_s \mid X(s)=y \, , H_{s-}] = c(y)$$

kaikilla $s \geq 0$, $y \in S$, H_{s-} arvoja $(X_u)_{u\in[0,s]}$ koskeva tapahtuma. Kunhan tietyt tekniset integroituvuusoletukset (kts. MS-E1990 Probability Theory) ovat voimassa, saadaan odotettu kustannuskertymä

$$g_t(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^t C_s \, ds \;\middle|\; X(0)=x\right]$$

tilasta x lähtien laskettua intuitiivisesti selvästä kaavasta

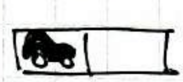
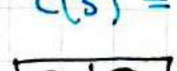
$$g_t(x) = \sum_y \int_0^t (\mathbb{P}(s))_{x,y} \cdot c(y) \, ds$$

(Lause 11.9 Leskelän monisteessa).

Äärellisen tilajoukon yhtenäisen Markov-prosessin tapauksessa kustannusten odotettu kertymistahti suppenee tasapainojakaumaa π vastaavaan arvoon pitkällä aikavälillä:

$$\frac{g_t(x)}{t} \xrightarrow[t \to \infty]{} \sum_{y \in S} \pi_y \cdot c(y)$$

(Leskelän monisteen Lauseen 11.10 seuraus).

Esimerkki Palataan vielä aiempaan parkkipaikkamalliin. Oletetaan, että jokaista pysäköinyttä autoa veloittaa parkkimittari tahdilla 3 € / tunti eli $\frac{1}{20}$ €/min. Tilassa 1 () parkkipaikka on tyhjä, joten "kustannusten" (eli kaupungin parkkimaksuista saaman tuoton) kertymistahti on $c(1) = 0$. Tiloissa 2 () ja 3 () pysäköineenä on yksi auto, joten $c(2) = c(3) = \frac{1}{20}$, ja tilassa 4 () autoja on kaksi, joten $c(4) = 2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$.

Prosessi on yhtenäinen (kts. siirtymäkaavio), joten yllä olevan tuloksen ja aiemmin ratkaistun tasapainojakauman $\pi = \left[\frac{8}{125}, \frac{234}{1375}, \frac{162}{1375}, \frac{81}{125}\right]$ avulla parkkipaikan pitkän aikavälin kustannusten kertymistahti on

$$\sum_{y=1}^{4} \pi_y \cdot c(y) \approx 0{,}079 \frac{€}{\text{min}} \approx 4{,}75 \frac{€}{\text{tunti}} \approx 114 \frac{€}{\text{vrk}}.$$