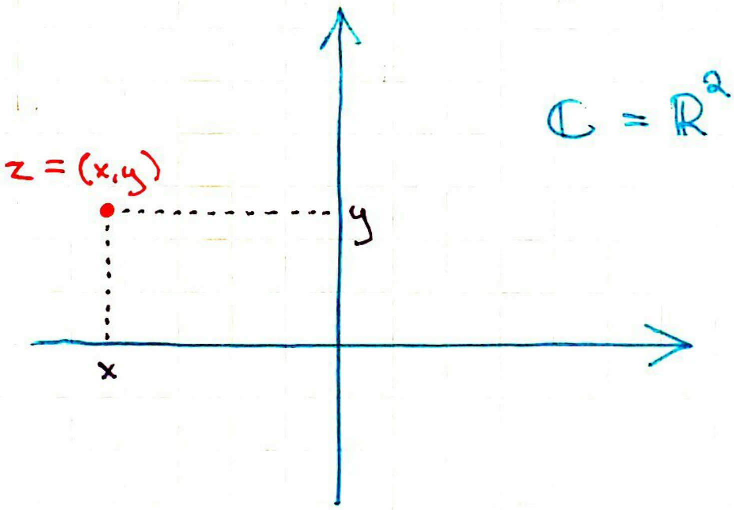
KOMPLEKSILUVUT

Määritelmä 1.1: Kompleksiluku on järjestetty pari $z = (x, y)$ missä $x, y \in \mathbb{R}$. Kompleksilukujen joukkoa merkitään

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Kompleksiluku voidaan visualisoida tason pisteenä, jonka koordinaatit ovat (x, y).



KOMPLEKSILUKUJEN LASKUTOIMITUKSET

Kompleksilukujen summa ja tulo määritellään seuraavilla kaavoilla.

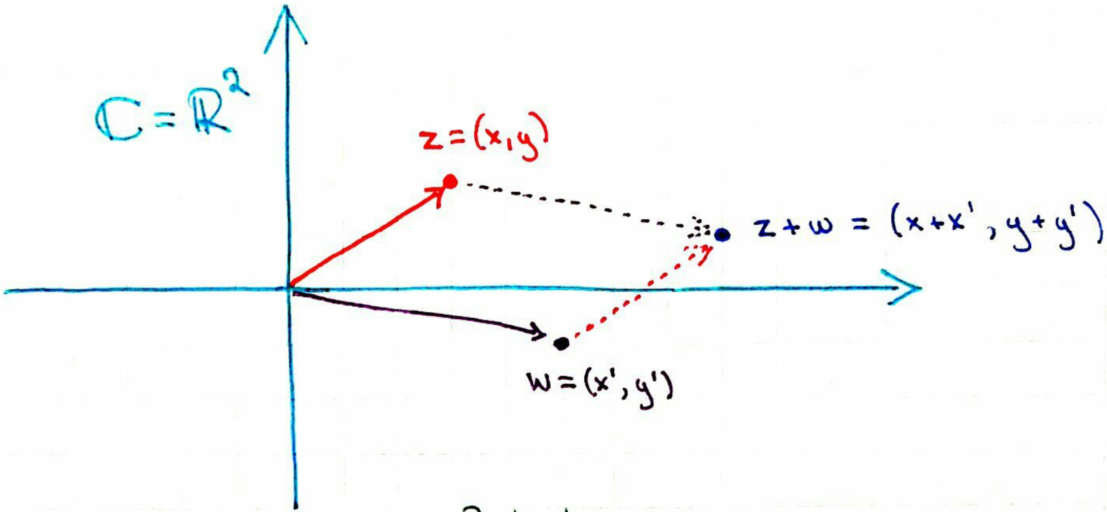
Määr. 1.2. Olkoon $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ ja $w = (x', y') \in \mathbb{C}$. Asetetaan

$$z + w = (x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$$

ja

$$z \cdot w = (x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', xy' - yx').$$

Kompleksilukujen summa on siis tavallinen tason vektorien yhteenlasku:



Pisteet z, w, $z+w$ ja origo muodostavat suunnikkaan

Kompleksilukujen tulon geometriseen tulkintaan palataan myöhemmin.

<u>Lause 1.1</u> Kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ varustettuna ylläolevilla laskutoimituksilla (summa ja tulo) on kunta, eli seuraavat laskusäännöt ovat voimassa:

$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad : \quad z + w = w + z$ (summan vaihdannaisuus)

$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad : \quad z \cdot w = w \cdot z$ (tulon vaihdannaisuus)

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad : \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (summan liitännäisyys)

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad : \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (tulon liitännäisyys)

$\exists 0 \in \mathbb{C} \quad : \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad : \quad z + 0 = z$ (nolla-alkio)

$\exists 1 \in \mathbb{C} \quad : \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad : \quad z \cdot 1 = z$ (ykkösalkio)

$\forall z \in \mathbb{C} \quad : \quad \exists (-z) \in \mathbb{C} \quad : \quad z + (-z) = 0$ (vasta-alkio)

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad : \quad \exists z^{-1} \in \mathbb{C} \quad : \quad z \cdot z^{-1} = 1$ (käänteisalkio)

$\forall z_1, z_2, w \quad : \quad w \cdot (z_1 + z_2) = w \cdot z_1 + w \cdot z_2$ (osittelulaki)

Jätetään Lauseen 1.1. todistus pääosin harjoitustehtäväksi. Todetaan kuitenkin seuraavat:

- nolla-alkio on $0 = (0,0)$
- ykkösalkio on $1 = (1,0)$
- kompleksiluvun $z=(x,y)$ vasta-alkio on $-z=(-x,-y)$
- nollasta eroavan kompleksiluvun $z=(x,y) \neq (0,0)$ käänteisalkio on

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

Tarkistetaan väitteistä viimeinen esimerkin vuoksi:

Merkitään $x' = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $y' = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

Silloin

$$\begin{aligned}
&(x,y)\cdot(x',y') \\
&:= (xx'-yy', \; xy'+yx') \\
&= \Big(\underbrace{x\frac{x}{x^2+y^2} - y\frac{-y}{x^2+y^2}}_{=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1}, \; \underbrace{x\frac{-y}{x^2+y^2} + y\frac{x}{x^2+y^2}}_{=0}\Big) \\
&= (1,0) = 1 \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Reaaliluvut kompleksilukujen osajoukkona: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Kuvaus
$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto (x,0) = u(x)$$
on selvästi injektiivinen. Lisäksi se "kunnioittaa laskutoimituksia" seuraavassa mielessä:

$$u(x_1)+u(x_2) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1+x_2, 0) = u(x_1+x_2)$$

$$u(x_1)\cdot u(x_2) = (x_1, 0)\cdot(x_2, 0) = (x_1x_2 - 0\cdot 0,\ x_1\cdot 0 + 0\cdot x_2) = (x_1x_2, 0) = u(x_1x_2).$$

Voimme siis samastaa reaaliluvun $x \in \mathbb{R}$ ja kompleksiluvun $u(x) = (x,0) \in \mathbb{C}$ ilman sekaannuksen vaaraa siitä, kumman kunnan laskutoimituksia niille ajatellaan käytettävän.

(Samastuksessa lisäksi reaalinen nolla- ja ykkösalkio tulee samastetuksi kompleksisen nolla- ja ykkösalkion kanssa:
$$u(0) = (0,0) = 0 \in \mathbb{C}$$
$$u(1) = (1,0) = 1 \in \mathbb{C}$$
joten notaatio ei näidenkään osalta aiheuta sekaannuksen vaaraa.)

Imaginaariyksikkö

Merkitään $\mathbf{i} = (0,1) \in \mathbb{C}$.

Edellisen samastuksen avulla, jos $x, y \in \mathbb{R}$, saadaan $\mathbb{C}$:ssä

$$\underset{\text{"tarkoittaa } u(x)\in\mathbb{C}\text{"}}{x} + \mathbf{i}\cdot \underset{\text{"}u(y)\in\mathbb{C}\text{"}}{y} = u(x) + \mathbf{i}\cdot u(y)$$

$$= (x,0) + \underbrace{(0,1)\cdot(y,0)}_{\substack{=(0\cdot y-1\cdot 0,\ 1\cdot y+0\cdot 0)\\ =(0,y)}}$$

$$= (x,0) + (0,y)$$

$$= (x,y).$$

Yläolevilla merkinnöillä kompleksiluku $z = (x,y)$ on siis $z = x + \mathbf{i}y$.

Näin kompleksiluvut ovat

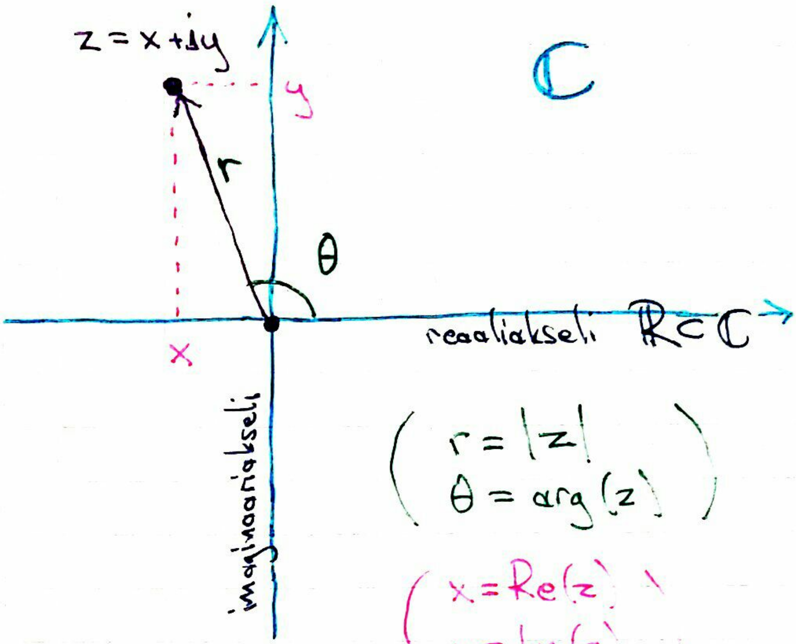
$$\mathbb{C} = \{ x + \mathbf{i}y \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

ja niillä laskeminen on helppoa — tavallisten laskusääntöjen (kunta-aksioomien) lisäksi tarvitsee vain muistaa $\mathbf{i}^2 = -1$.

Esim.: $z = x + \mathbf{i}y \qquad z' = x' + \mathbf{i}y'$

$$\begin{aligned} z\cdot z' &= (x+\mathbf{i}y)(x'+\mathbf{i}y') \\ &= xx' + \mathbf{i}yx' + \mathbf{i}xy' + \mathbf{i}^2\cdot yy' \\ &= xx' + \mathbf{i}(yx'+xy') - yy' \\ &= xx' - yy' + \mathbf{i}(yx'+xy'). \end{aligned}$$

Kompleksilukujen geometrisen esityksen käsitteitä



Kompleksiluku

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$(x, y \in \mathbb{R})$$

vastaa tason piste

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\begin{pmatrix} r = |z| \\ \theta = \arg(z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = \mathrm{Re}(z) \\ y = \mathrm{Im}(z) \end{pmatrix}$$

Sen koordinaatteja kutsutaan kompleksiluvun z

reaaliosaksi $\mathrm{Re}(z) := x$ ja

imaginaariosaksi $\mathrm{Im}(z) := y$.

Kompleksiluvun z moduli eli itseisarvo on pisteen (x, y) etäisyys origosta

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

Jos $z \neq 0$ eli $(x, y) \neq (0, 0)$, niin kulma θ positiivisen reaaliakselin ja origosta pisteeseen (x, y) kulkevan janan välillä määräytyy ehdoista

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \quad \text{ja} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

2π:n kokonaislukumoninkertaa vaille.

Kulmaa kutsutaan (nollasta eroavan) kompleksiluvun z argumentiksi

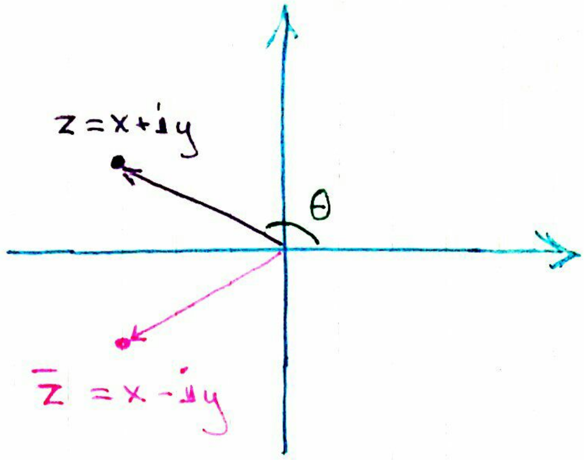
$$\arg(z) = \theta.$$

(Määritelty modulo 2π jos $z \neq 0$)

Reaaliakselin suhteen peilattua pistettä

$(x, -y)$

vastaavaa kompleksi-lukua



$$\bar{z} := x - iy$$

kutsutaan luvun z liittoluvuksi eli kompleksikonjugaatiksi.

Havaintoja määritelmistä: $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x+iy)(x-iy) \\ &= x^2 \cancel{- ixy} \cancel{+ ixy} - i^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad (\text{modulo } 2\pi)$$

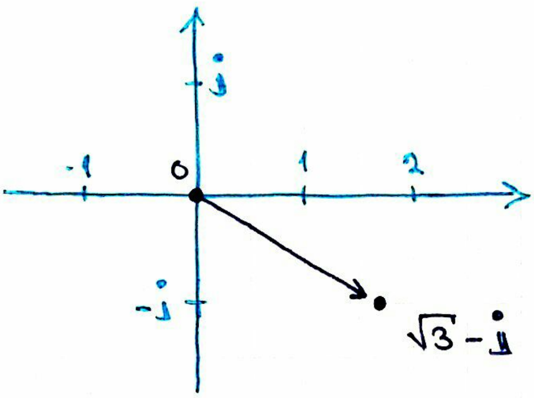
jos $z \neq 0$.

$$z + \bar{z} = (x + \cancel{iy}) + (x - \cancel{iy}) = 2x = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = (\cancel{x} + iy) - (\cancel{x} - iy) = 2iy = 2i \cdot \mathrm{Im}(z).$$

Esimerkki:

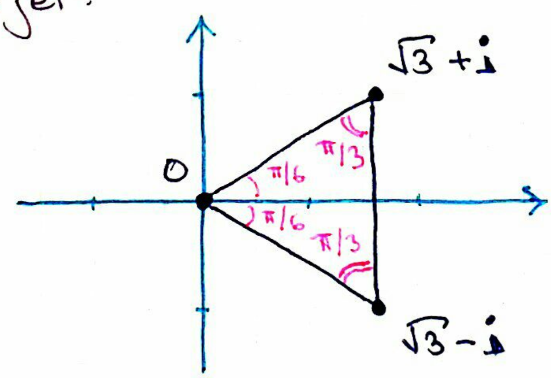
Tarkastellaan kompleksilukua $z = \sqrt{3} - i \in \mathbb{C}$:



Nyt $\mathrm{Re}(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3}$ ja $\mathrm{Im}(\sqrt{3} - i) = -1$ ja itseisarvo eli moduli on

$$|\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Argumentin selvittämiseksi havaitaan, että liittoluku $\bar{z} = \sqrt{3} + i$ on myös etäisyydellä 2 sekä origosta että pisteestä z, joten nämä kolme pistettä ovat tasasivuisen kolmion kärjet:



Siis

$$\arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6} \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Esimerkki:

Olkoon edelleen $z = \sqrt{3} - i$.

Lasketaan

$$
\begin{aligned}
z^2 &= (\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} - i) \\
&= \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}\, i + i^2 \\
&= 3 - 2\sqrt{3}\, i - 1 \\
&= 2 - 2\sqrt{3}\, i
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
z^3 = z^2 \cdot z &= (\sqrt{3} - i)(2 - 2\sqrt{3}\, i) \\
&= 2\sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{3}^2 i - 2i + 2\sqrt{3} \cdot i^2 \\
&= \cancel{2\sqrt{3}} - 6i - 2i - \cancel{2\sqrt{3}} \\
&= -8i.
\end{aligned}
$$

Lemma Kompleksikonjugointi kunnioittaa kompleksilukujen laskutoimituksia seuraavasti: kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ pätee

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{ja} \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Tod: Yhteenlaskua koskeva väite seuraa suoraan määritelmistä ja kertolaskua varten lasketaan, kun $z = x + iy$ ja $w = x' + iy'$

$$
\begin{aligned}
\bar{z} \cdot \bar{w} &= (x - iy)(x' - iy') = xx' - ixy' - iyx' + i^2 yy' \\
&= xx' - yy' - i \cdot (xy' + x'y) \\
&= \overline{(xx' - yy' + i(xy' + x'y))} = \overline{z \cdot w}.
\end{aligned}
$$

□

<u>Havainto</u>: Käänteisluvun reaali- ja imaginaari-osien laskeminen:

Olkoon $z = x + iy \neq 0 \in \mathbb{C}$.

Huomataan

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$$

$$= \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Kaava on sama kuin kunta-aksioomien tarkistuksen yhteydessä, mutta ylläoleva lienee helpoin tapa muistaa se:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

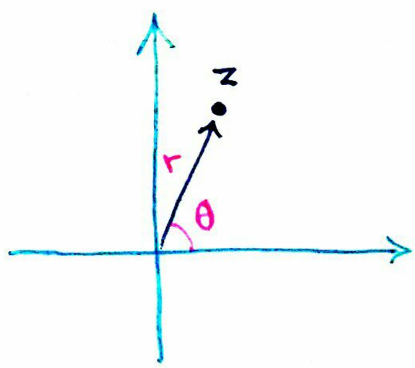
<u>Napakoordinaattiesitys ja tulon geometrinen tulkinta</u>

Merkitään kompleksiluvun $z = x + iy$ modulia $r = |z|$ ja argumenttia $\theta = \arg(z)$. (Jos $z = 0$, ei θ:n valinnalla ole väliä alla olevassa.)

Silloin voidaan kirjoittaa

$$z = x + iy$$

$$= r \cdot \cos(\theta) + i \cdot r \cdot \sin(\theta).$$



Otetaan käyttöön merkintä, n.k. Eulerin kaava

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta).$$

(Myöhemmin kurssilla määritellään kompleksinen eksponenttifunktio $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja osoittautuu, että yläoleva merkintä on konsistentti tämän kanssa, $e^{i\theta} = \exp(i\theta)$. Tässä vaiheessa kyse on kuitenkin vain notaatiosta.)

Kompleksiluku $z \in \mathbb{C}$ voidaan siis kirjoittaa

$$z = r \cdot e^{i\theta},$$

missä $r = |z|$ ja $\theta = \arg(z)$.

Propositio: Jos $z = r \cdot e^{i\theta}$ ja $w = r' \cdot e^{i\theta'}$ ($r, r' \geq 0$, $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$), niin pätee

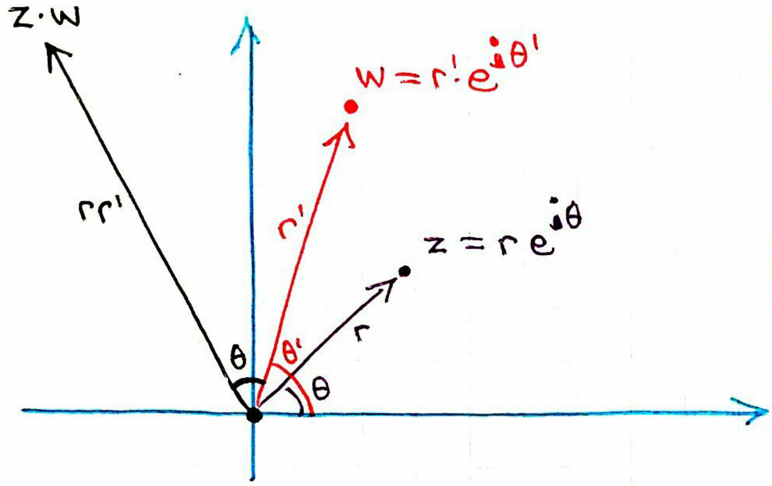
$$z \cdot w = rr' \cdot e^{i(\theta+\theta')}.$$

Todistus:
$$\begin{aligned}
z \cdot w &= (r \cdot e^{i\theta})(r' \cdot e^{i\theta'}) \\
&= (r \cdot \cos(\theta) + i r \cdot \sin(\theta))(r' \cdot \cos(\theta') + i r' \sin(\theta')) \\
&= rr' \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(\cos(\theta') + i \sin(\theta')) \\
&= rr' \cdot \big[\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \\
&\qquad + i\,(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))\big] \\
&= rr' \cdot \big[\cos(\theta+\theta') + i \cdot \sin(\theta+\theta')\big] \\
&= rr' \cdot e^{i(\theta+\theta')}.
\end{aligned}$$

trigonometristen summakaavojen perusteella

$\square$

Tulolle saadaan tästä geometrinen tulkinta — tulon itseisarvo on itseisarvojen tulo ja tulon argumentti on argumenttien summa:



Kompleksiluvulla
$z = r e^{i\theta}$
kertominen on siis kompleksitason kierto kulman θ verran ja skaalaus tekijällä r.

Historiallisesti tärkeä ja usein hyödyllinen erikoistapaus ylläolevasta on seuraava.

Lause (De Moivren kaava)

Jos $\theta \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}$ niin

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Tod: Tapaus $n = 1$ on selvä ja induktiolla edellistä propositiota käyttäen saadaan kaava todistettua kaikille positiivisille n.

Tapaus $n = 0$ on myös selvä nollannen potenssin määritelmästä, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^0 = 1$.

Tapaus $n = -1$ seuraa käänteisalkion kaavasta

$$\begin{aligned}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{-1} &= \frac{\cos(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} + i\,\frac{-\sin(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ &= \cos(\theta) - i\cdot\sin(\theta) \\ &= \cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\end{aligned}$$

ja yleinen negatiivinen n jälleen induktiolla. □

Esimerkkisovellus 1:

De Moivren kaavan tapaus $n=2$ antaa yhtälön

$$\left(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)\right)^2 = \cos(2\theta) + i \cdot \sin(2\theta).$$

Vasen puoli voidaan myös laskea suoraan

$$\left(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)\right)^2$$

$$= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2i \cdot \cos(\theta)\sin(\theta).$$

Vertailemalla yllä olevien lausekkeiden reaaliosia saadaan kaksinkertaisen kulman kosinikaava

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

ja imaginaariosista vastaavasti kaksinkertaisen kulman sinikaava

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta).$$

Yleisempi n-kertaisen kulman kosini- tai sinikaava saadaan laskemalla De Moivren kaavan vasen puoli binomikaavalla ja tarkastelemalla lopputuloksen reaali- tai imaginaariosaa.

Esimerkkisovellus 2: Kompleksiset ykkösenjuuret

Olkoon $n \in \{3,4,5,\ldots\}$

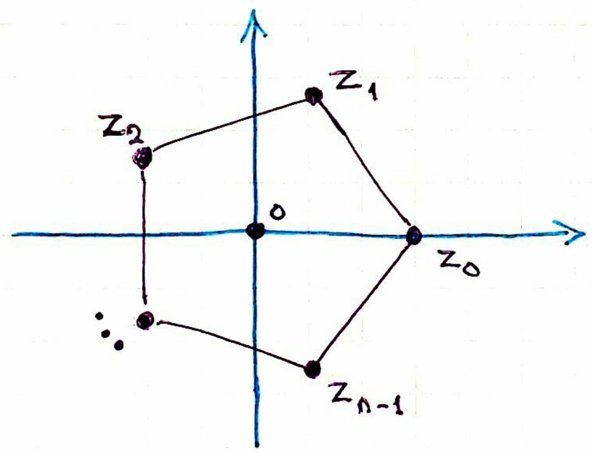
Kun $j = 0,1,2,\ldots,n-1$, asetetaan

$$z_j := e^{i\frac{2\pi}{n}j} = \cos\left(\tfrac{2\pi j}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\tfrac{2\pi j}{n}\right).$$

De Moivren kaavasta saadaan

$$z_j^n = \underbrace{\cos(2\pi j)}_{=1} + i\cdot\underbrace{\sin(2\pi j)}_{=0} = 1.$$

Pisteet z_j, $j=0,1,\ldots,n-1$ ovat säännöllisen origokeskisen n-kulmion kärjet:



Olemme siis löytäneet n eri kompleksilukua, jotka toteuttavat astetta n olevan polynomiyhtälön

$$z^n = 1.$$

Polynomilla $z^n - 1$ on siis juuret $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ ja vastaavat tekijät $z - z_j$, mistä (vertaamalla vielä johtavan termin kerrointa) päättelemme

$$z^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1} (z - z_j).$$

Esimerkkilasku:

Palataan aiempaan esimerkkiimme $z=\sqrt{3}-i$. Selvitimme luvun z itseisarvon $|z|=2$ ja argumentin $\arg(z) = -\pi/6$.

Voidaan siis kirjoittaa napakoordinaattiesitys

$$\sqrt{3}-i = 2\cdot e^{-i\pi/6}.$$

Laskimme myös z^2 ja z^3.

Nyt nämä laskut voidaan tehdä napakoordinaateissa tulon geometrisella tulkinnalla:

$$(\sqrt{3}-i)^2 = (2\cdot e^{-i\pi/6})^2 = 2^2\cdot e^{-2i\pi/6}$$

$$= 4\cdot e^{-i\pi/3} = 4\underbrace{\cos\left(\tfrac{-\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}} + 4i\underbrace{\sin\left(\tfrac{-\pi}{3}\right)}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 2 - i\,2\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}-i)^3 = (2\cdot e^{-i\pi/6})^3 = 2^3\cdot e^{-3i\pi/6}$$

$$= 8\cdot e^{-i\pi/2} = 8\underbrace{\cos\left(\tfrac{-\pi}{2}\right)}_{=0} + 8i\underbrace{\sin\left(\tfrac{-\pi}{2}\right)}_{=-1}$$

$$= -8i.$$

Käyttäisitkö napakoordinaatteja vai karteesisia koordinaatteja (reaali- ja imaginaariosia) jos tehtäväsi olisi laskea

$$(\sqrt{3}-i)^{100} \quad ?$$

KOMPLEKSITASON TOPOLOGIAA

Muun muassa raja-arvojen ja jatkuvuuden määrittelyä varten — sekä useita tärkeitä abstraktimpia päättelyitä varten — tarvitsemme kompleksitasoon **topologian**. Tämä perustuu tason pisteiden etäisyyksien käsitteeseen, metriikkaan

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$d(z, w) = |z - w| = \text{"pisteiden } z \text{ ja } w \text{ välinen etäisyys"}.$$

Metriikan perusominaisuudet ovat seuraavat:

Propositio: Kaikilla $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ on voimassa:

(i): $|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$

(kolmioepäyhtälö)

(ii): $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ (symmetrisyys)

(iii): $|z_1 - z_2| = 0$ jos ja vain jos $z_1 = z_2$.

("erotteluominaisuus")

Metriikka on konstruoitu itseisarvosta eli modulista, joten aloitetaan sitä koskevista aputuloksista.

Johdimme kompleksilukujen tulolle geometrisen tulkinnan ja kaavan napakoordinaateissa:

jos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ja

$$r_1 = |z_1|, \qquad \theta_1 = \arg(z_1)$$
$$r_2 = |z_2|, \qquad \theta_2 = \arg(z_2),$$

niin

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Kaavasta seuraa suoraan erityisesti:

<u>Korollaari</u>: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Suoraan modulin määrittelevästä kaavasta taas nähdään seuraavat:

<u>Lemma</u> Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$$
$$|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|.$$

<u>Tod</u>: Kirjoitetaan $z = x + iy$, missä $x = \mathrm{Re}(z)$ ja $y = \mathrm{Im}(z)$. Silloin esim.

$$|\mathrm{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

ja samaan tapaan näytetään toinen epäyhtälö.

□

Muistutetaan myös havainto $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, jonka avulla näytetään:

<u>Lemma</u> (Kolmioepäyhtälö modulille)
Kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ pätee
$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

<u>Tod:</u> Lasketaan vasemman puolen modulin neliö

$$
\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\
&= \underbrace{z\bar{z}}_{=|z|^2} + \underbrace{z\bar{w} + w\bar{z}}_{=2\cdot\mathrm{Re}(z\bar{w})} + \underbrace{w\bar{w}}_{=|w|^2} \\
&\leq |z|^2 + 2\cdot|\mathrm{Re}(z\bar{w})| + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2\cdot|z\bar{w}| + |w|^2 \quad \leftarrow \text{edellisen Lemman perusteella} \\
&= |z|^2 + 2|z|\cdot|w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}
$$

Ottamalla neliöjuuri (kasvava funktio $\sqrt{\cdot}$ säilyttää epäyhtälön) väite seuraa. □

Metriikan perusominaisuuksista (ii) ja (iii) ovat hyvin helppoja ja (i) seuraa ylläolevasta valinnoilla $z = z_1 - z_2$ ja $w = z_2 - z_3$.

Ylläolevista saadaan myös:

<u>Lemma</u>: $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

<u>Tod</u>: Kirjoitetaan $z = x + iy$ ja sovelletaan kolmioepäyhtälöä: $|z| = |x+iy| \leq |x| + |iy| = |x| + |y|$.
$= |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$ □

Kiekot ja ympyrät

Määritelmä: Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$.

aito epäyhtälö

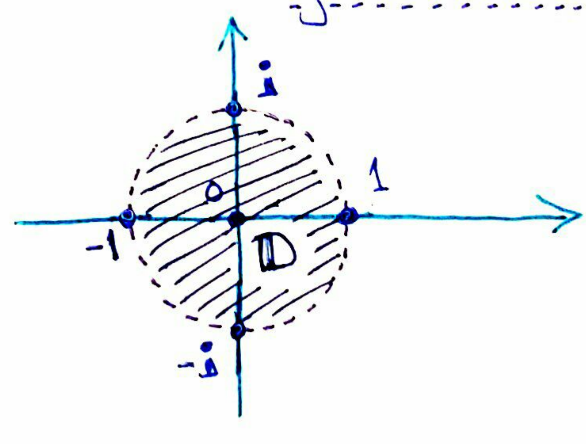
Joukko
$$B(z_0, r) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$$
on z_0-keskinen r-säteinen avoin kiekko.
(Pisteet, jotka ovat lähempänä kuin etäisyydellä r keskipisteestä z_0.)

Joukko
$$S(z_0, r) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r \}$$
on z_0-keskinen r-säteinen ympyrä.
(Pisteet tason etäisyydellä r keskipisteestä z_0.)

yhtälö tai epäyhtälö

Joukko
$$\overline{B}(z_0, r) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \}$$
$$= B(z_0, r) \cup S(z_0, r)$$
on suljettu kiekko.

Origokeskistä 1-säteistä avointa kiekkoa
$$\mathbb{D} := B(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$$
kutsutaan kompleksitason yksikkökiekoksi.



Avoimet ja suljetut joukot

Määritelmät 1.12 ja 1.5 Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ osajoukko.

Piste $z \in A$ on joukon A *sisäpiste*, jos on olemassa jokin $\varepsilon > 0$ siten, että

$$B(z, \varepsilon) \subset A.$$

Piste $z \in \mathbb{C} \setminus A$ on joukon A *ulkopiste*, jos on olemassa jokin $\varepsilon > 0$ siten, että

$$B(z, \varepsilon) \subset \mathbb{C} \setminus A.$$

Piste $z \in \mathbb{C}$ on joukon A *reunapiste*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on voimassa

$$B(z, \varepsilon) \cap A \neq \phi \quad \text{ja} \quad B(z, \varepsilon) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \phi.$$

Kaikkien reunapisteiden joukkoa merkitään ∂A, kaikkien sisäpisteiden joukkoa $\mathrm{int}(A)$ ja kaikkien ulkopisteiden joukkoa $\mathrm{ext}(A)$.

(**Huom:** Saadaan tason ositus

$$\mathbb{C} = \mathrm{int}(A) \cup \partial A \cup \mathrm{ext}(A)$$

kolmeen erilliseen osajoukkoon.)

Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *avoin*, jos sen kaikki pisteet ovat sisäpisteitä: $A = \mathrm{int}(A)$.

Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *suljettu*, jos sen komplementti $\mathbb{C} \setminus A$ on avoin eli jos kaikki komplementin pisteet ovat joukon ulkopisteitä: $\mathbb{C} \setminus A = \mathrm{ext}(A)$.

Avoimet joukot ovat erityisen soveltuvia derivoimista varten.

Esimerkkejä

- Avoin kiekko $B(z_0, r)$ on avoin joukko.

  Jos $z \in B(z_0, r)$, niin $|z - z_0| = s < r$. Valitaan $\varepsilon = r - s > 0$. Jos $w \in B(z, \varepsilon)$, niin $|w - z| < \varepsilon$, ja kolmioepäyhtälön perusteella

  $$|w - z_0| \leq \underbrace{|w - z|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|z - z_0|}_{=s} < \varepsilon + s = r.$$

  Siis myös $w \in B(z_0, r)$. Päättelemme

  $$B(z, \varepsilon) \subset B(z_0, r),$$

  joten z on sisäpiste. Kiekon $B(z_0, r)$ avoimuus seuraa.

- Suljettu kiekko $\overline{B}(z_0, r)$ on suljettu joukko.

  Samaan tapaan — yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi.

- Avoimen kiekon reuna on ympyrä:

  $$\partial B(z_0, r) = S(z_0, r). \qquad \text{(HT)}$$

- Punkteerattu taso $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ on avoin joukko ja sen reuna on $\partial(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \{0\}$ (HT)

- Ylempi puolitaso $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ on avoin joukko ja sen reuna on reaaliakseli $\partial \mathbb{H}^+ = \mathbb{R}$. (HT)

▶ Ympyrä $S(z_0,r)$ on suljettu joukko.

Määritelmän mukaan tämän väitteen osoittamiseksi tulee näyttää, että komplementti $\mathbb{C} \setminus S(z_0,r)$ on avoin joukko.

Kun muistetaan ympyrän määritelmä

$$S(z_0,r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| = r \}$$

saadaan komplementiksi

$$\mathbb{C} \setminus S(z_0,r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| \neq r \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < r \} \cup \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| > r \}.$$

Ensimmäinen osa ylläolevassa joukkojen yhdisteessä on täsmälleen $B(z_0,r)$, joka näytettiin jo avoimeksi. Toinen osa on myös avoin (päättely samaan tapaan). Avointen joukkojen yhdisteet ovat välttämättä avoimia (yhdisteen piste on sisäpiste jo yksittäisessä yhdisteen osassa ja siksi erityisesti koko yhdisteessä), joten $\mathbb{C} \setminus S(z_0,r)$ on näin näytetty avoimeksi ja $S(z_0,r)$ siten suljetuksi.

Kommentti... Pidemmän päälle ylläolevan tyyppiset argumentit tulisivat liian raskaiksi. Tyypillisesti avoimuus tarkistetaan seuraavaa faktaa käyttäen:

"EXTRA"

FAKTA: Jos $f: X \to Y$ on jatkuva funktio ja $U \subset Y$ on avoin osajoukko, niin alkukuva

$$f^{-1}(U) := \{ z \in X \mid f(z) \in U \} \subset X$$

on avoin osajoukko X:ssä.

Voit halutessasi todistaa tämän kunhan olemme määritelleet, mitä jatkuva funktio tarkoittaa...

Raja-arvot ja jatkuvuus

Määr.: Olkoon $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ jono kompleksilukuja $z_n \in \mathbb{C}$. Sanomme, että jonolla on raja-arvo $c \in \mathbb{C}$ ja merkitsemme

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa n_0 siten, että

$$z_n \in B(c,\varepsilon) \quad \text{kun} \quad n \geq n_0 .$$

Lause 3.8: Olkoon $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ kompleksilukujono. Merkitään $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ ja $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$, eli $z_n = x_n + i y_n$ $(x_n, y_n \in \mathbb{R})$. Silloin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(i) $\lim_{n\to\infty} z_n = c$

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{Re}(c)$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = \mathrm{Im}(c)$

(reaalilukujonojen rajat)

Todistus: (i) $\Rightarrow$ (ii): Oletetaan $\lim_{n\to\infty} z_n = c$.
Silloin $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ s.e.

$$|z_n - c| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 .$$

Tästä saamme

$$|x_n - \mathrm{Re}(c)| = |\mathrm{Re}(z_n - c)| \leq |z_n - c| < \varepsilon$$

kun $n \geq n_0$, mikä todistaa väitteen

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{Re}(c).$$

Samaan tapaan $|y_n - \mathrm{Im}(c)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Oletetaan $\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{Re}(c)$

ja $\lim_{n\to\infty} y_n = \mathrm{Im}(c)$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Voidaan valita $n_0^{(x)}$ ja $n_0^{(y)}$ siten, että

$$|x_n - \mathrm{Re}(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\ n \geq n_0^{(x)}$$

$$|y_n - \mathrm{Im}(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\ n \geq n_0^{(y)}.$$

Asetetaan $n_0 := \max(n_0^{(x)}, n_0^{(y)})$.
Kun $n \geq n_0$, molemmat ylläolevista ovat voimassa ja siten

$$\begin{aligned} |z_n - c| &\leq |\mathrm{Re}(z_n - c)| + |\mathrm{Im}(z_n - c)| \\ &= |x_n - \mathrm{Re}(c)| + |y_n - \mathrm{Im}(c)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Siis $\lim_{n\to\infty} z_n = c$ ja väite on todistettu. $\square$

Lause: Jos $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ ovat kompleksilukujonoja, joille $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ ja $\lim_{n\to\infty} w_n = w$, niin

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = z + w \qquad \text{ja}$$

$$\lim_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) = z \cdot w.$$

Sivuutetaan ylläolevan melko suoraviivainen todistus.
(Paras lähestymistapa on yleistyksen kautta: funktiot $(z,w) \mapsto z+w$ ja $(z,w) \mapsto z \cdot w$ ovat jatkuvia $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ja jatkuvat funktiot kunnioittavat raja-arvoja.)

Jonojen lisäksi tulemme tarvitsemaan funktioiden raja-arvoja.

Määr.: Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ ja

$$f : A \to \mathbb{C}$$ funktio.

Sanomme, että funktiolla f on *raja-arvo* $c \in \mathbb{C}$ pisteessä $a \in A$, ja merkitsemme

$$\lim_{z \to a} f(z) = c \qquad \left(\text{tai } \lim_{\substack{z \to a \\ z \in A}} f(z) = c\right)$$

jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(z) - c| < \varepsilon \qquad \text{kun } 0 < |z - a| < \delta .$$

Samaan tapaan kuin jonoille, riittää tarkastella reaali- ja imaginaariosia erikseen. Raja-arvot käyttäytyvät myös hyvin funktioiden summissa ja tuloissa.

Funktioiden jatkuvuus määritellään niiden raja-arvojen avulla.

Määritelmä 1.13 Funktio $f : A \to \mathbb{C}$ on *jatkuva pisteessä* $a \in A$, jos

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a).$$

Funktio f on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Polkuyhtenäisyys

Määr.: Kompleksitason (parametrisoitu) polku on jatkuva kuvaus

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

suljetulta väliltä $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompleksiluvuille.
Polun sanotaan olevan suljettu polku,
(Huom.: Termillä ei ole tekemistä suljetun joukon kanssa.)
jos sen alkupiste $\gamma(a)$ ja loppupiste $\gamma(b)$ ovat samat: $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Polun sanotaan olevan sileä, jos kuvaus $t \mapsto \gamma(t)$ on jatkuvasti derivoituva $[a,b] \longrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Polun sanotaan olevan paloittain sileä, jos on olemassa $m \in \mathbb{N}$ ja $a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{m-1} < s_m = b$ siten, että rajoittumat osaväleille

$$\gamma|_{[s_{j-1}, s_j]} : [s_{j-1}, s_j] \longrightarrow \mathbb{C}$$

ovat jatkuvasti derivoituvia kaikilla $j = 1, 2, \dots, m$.

Määr.: Polun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sanotaan olevan yksinkertainen polku, jos

$$\gamma(s) \neq \gamma(t) \qquad \forall\ a \le s < t \le b.$$

Määr.: Suljetun polun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sanotaan olevan yksinkertainen suljettu polku, jos

$$\gamma(s) \neq \gamma(t) \qquad \forall\ a \le s < t < b.$$

Esimerkkejä

1) *Jana.*

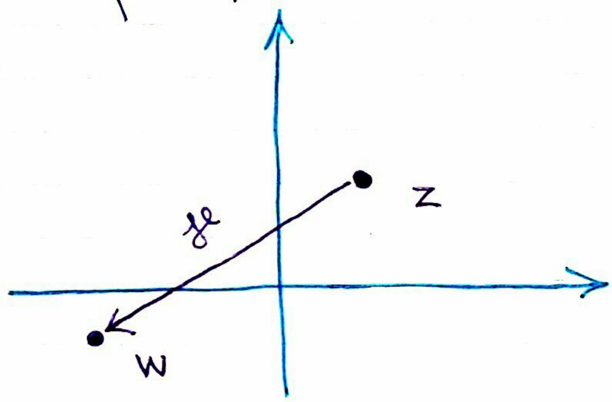
Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$ kaksi pistettä.

Polku $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = z + t \cdot (w - z)$$

alkaa pisteestä $\gamma(0) = z$ ja päättyy pisteeseen $\gamma(1) = w$.

Tämä jana on sileä polku. Jos $z \neq w$, se on yksinkertainen polku, mutta ei ole suljettu polku.



2) *Murtoviiva.*

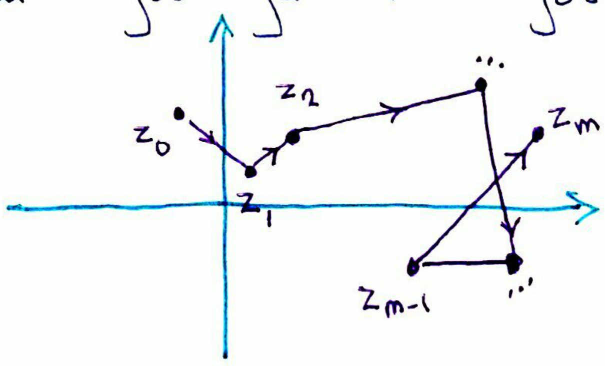
Olkoot $z_0, z_1, z_2, \dots, z_m \in \mathbb{C}$.

Polku $\gamma : [0, m] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = z_{j-1} + (t - j + 1) \cdot z_j$$

kun $t \in [j-1, j]$

on paloittain sileä. Se on suljettu polku jos ja vain jos $z_0 = z_m$.



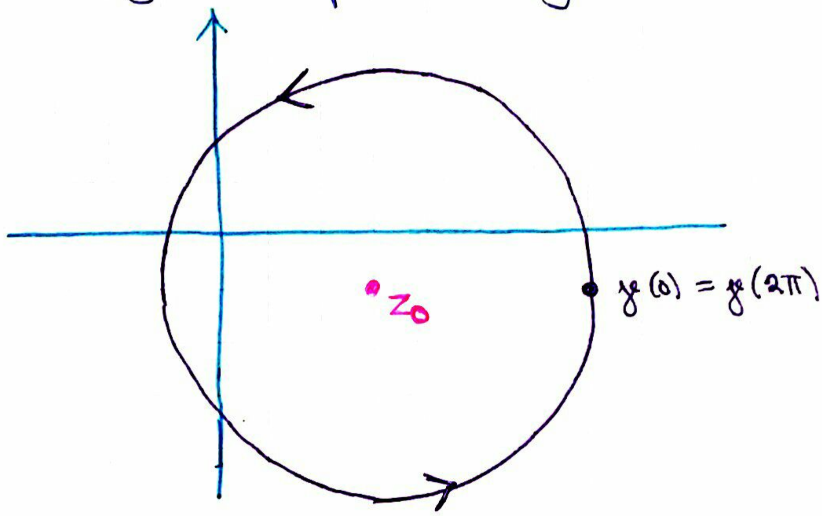
3) Ympyrä.

Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$.

Polku $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$$

on suljettu polku ja sileä.



Määritelmä: Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on polkuyhtenäinen, jos minkä tahansa kahden pisteen $z, w \in A$ välillä on joukossa pysyvä polku $\gamma : [0,1] \longrightarrow A \subset \mathbb{C}$ s.e. $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$.

Polkuyhtenäiset joukot ovat erityisen soveltuvia integrointia varten.

Olemme kompleksianalyysissä erityisen kiinnostuneita joukoista, joissa sekä derivointi että integrointi onnistuu ongelmitta.

Määritelmä 1.10 (kts. myös Lause 1.3)

Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on alue, jos se on avoin ja polkuyhtenäinen.

"EXTRA"

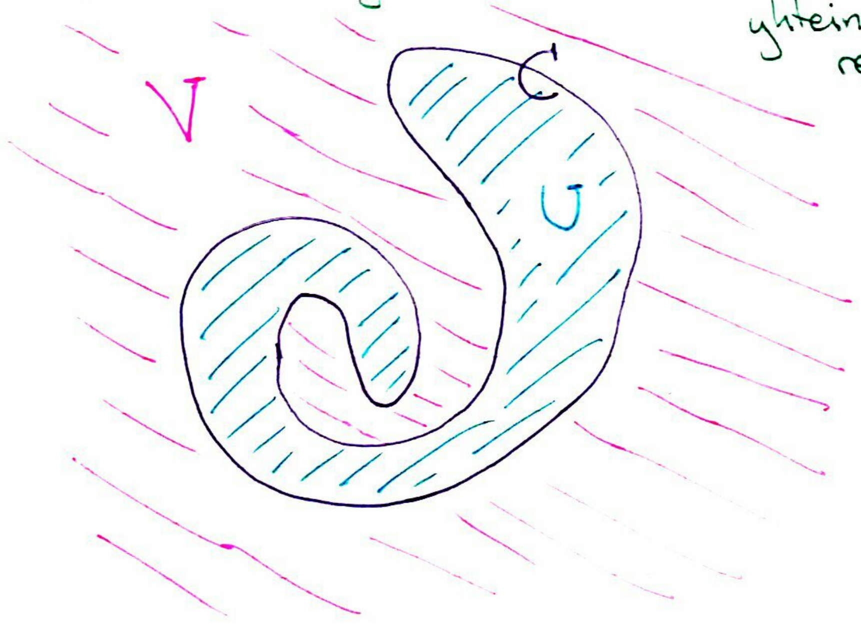
Suljettuja yksinkertaisia polkuja koskee seuraava intuitiivinen tulos — sen todistus ei kuitenkaan ole aivan helppo, emmekä tällä kurssilla todista tai käytä tätä tulosta. Esitämme sen vain havainnollistuksen ja matemaattisen yleissivistyksen vuoksi.

<u>Lause</u> (Jordanin käyrälause)

Jos $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ on yksinkertainen suljettu polku ja $\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\} \subset \mathbb{C}$ sen kuvajoukko tasossa, niin kuvakäyrän Γ komplementti koostuu kahdesta erillisestä alueesta U ja V:

$$\mathbb{C} \setminus \Gamma = U \cup V,$$

siten, että U on rajoitettu ("käyrän sisään jäävä alue") ja V on rajoittamaton ("käyrän ulkopuolelle jäävä alue"). Lisäksi $\partial U = C$ ja $\partial V = C$ on niiden yhteinen reuna.



KOMPLEKSINEN DERIVOITUVUUS

Tarkastellaan seuraavaksi kompleksimuuttujan kompleksiarvoisia funktioita

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

missä funktion määrittelyjoukko $G \subset \mathbb{C}$ on avoin osajoukko. (Jokaisen pisteen ympärillä on tällöin vähän tilaa, jolloin derivaatat sekä ovat mielekkäitä määritellä että kertovat mielekkäästi funktion käyttäytymisestä.)

Tulkitsemalla kompleksilukujen joukko tasoksi $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ saadaan kahden reaalimuuttujan funktio, jonka arvoilla on kaksi reaalista komponenttia:

$$f(x + iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

missä $u, v : G \longrightarrow \mathbb{R}$

ja $G \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ on avoin tason osajoukko.

Siis $u(x,y) := \mathrm{Re}(f(x+iy))$, $v(x,y) := \mathrm{Im}(f(x+iy))$.

Ennen kompleksisen derivaatan määrittelyä palautetaan mieliin kahden reaalimuuttujan funktioiden differentioituvuus.

Reaalinen differentioituvuus

Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ $(G \subset \mathbb{R}^2)$ sanotaan olevan differentioituva pisteessä $(x_0, y_0) \in G$, jos on olemassa lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ siten, että

$$u(x_0+\xi, y_0+\eta) = u(x_0, y_0) + L(\xi, \eta) + \varepsilon(\xi, \eta)$$

missä

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(\xi,\eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0 .$$

(Eli virhetermi ε tulee mitättömän pieneksi suhteessa lineaariseen muutokseen, kun lähestytään tarkasteltavaa pistettä.)

Lineaarikuvausta L sanotaan funktion u differentiaaliksi pisteessä (x_0, y_0) ja merkitään

$$L = du(x_0, y_0)$$

(**Huom:** Y.o. ehto määrää lineaarikuvauksen L yksikäsitteisesti.)

Muistutus: Kuvauksen $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineaarisuus tarkoittaa, että

$$L(\xi+\xi', \eta+\eta') = L(\xi, \eta) + L(\xi', \eta') \quad \forall (\xi,\eta), (\xi',\eta') \in \mathbb{R}^2$$

ja

$$L(\lambda\xi, \lambda\eta) = \lambda \cdot L(\xi, \eta) \quad \forall (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \text{ ja } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ottamalla raja $(\xi,\eta) \to (0,0)$ erikseen molempien akseleiden suunnista

$\left((\xi,0) \xrightarrow[\xi \to 0]{} (0,0) \quad \text{ja} \quad (0,\eta) \xrightarrow[\eta \to 0]{} (0,0) \right)$

nähdään, että funktiolla u on oltova osittaisderivaatat pisteessä (x_0,y_0) ja lineaarikuvauksen $L = du(x_0,y_0)$ matriisi on

$$L = du(x_0,y_0) \underset{\substack{\text{matriisiesitys} \\ \text{standardi-} \\ \text{kannassa}}}{\longleftrightarrow} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} u(x_0,y_0) \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x_0,y_0) \right]}_{\in \mathbb{R}^{1\times 2}}.$$

Esimerkki:

Funktiolla $u(x,y) = x^2 + y^2$

$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

on pisteessä $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ kaavan

$$L(\xi,\eta) = 2x_0\xi + 2y_0\eta$$

antama differentiaali $L = du(x_0,y_0)$, koska

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi,\eta) &:= u(x_0+\xi, y_0+\eta) - u(x_0,y_0) - L(\xi,\eta) \\ &= (x_0+\xi)^2 + (y_0+\eta)^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0\xi - 2y_0\eta \\ &= \xi^2 + \eta^2 \end{aligned}$$

toteuttaa $\displaystyle \lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(\xi,\eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = \lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{\xi^2+\eta^2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0.$

Lemma: Jos $u : G \to \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä $(x_0, y_0) \in G$, se on myös jatkuva pisteessä (x_0, y_0).

Todistus: Lineaarikuvaukselle L pätee

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} L(\xi,\eta) = 0$$

ja virhetermille ε samoin

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \varepsilon(\xi,\eta) = 0.$$

(Määrittelevän ominaisuuden perusteella millä tahansa $c > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e. $|\varepsilon(\xi,\eta)| \leq c \cdot \sqrt{\xi^2+\eta^2}$ kun $(\xi,\eta) \in B_\delta(0,0)$.)

Raja-arvon lineaarisuudesta saadaan silloin

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} u(x_0+\xi, y_0+\eta)$$

$$= \lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \left(u(x_0,y_0) + L(\xi,\eta) + \varepsilon(\xi,\eta) \right)$$

$$= u(x_0,y_0) + 0 + 0 = u(x_0,y_0),$$

eli u on jatkuva pisteessä (x_0,y_0). $\square$

Vektoriarvoisen funktion $f : G \to \mathbb{R}^2$ differentioituvuus pisteessä $(x_0, y_0) \in G$ tarkoittaa molempien komponenttifunktioiden

$$u : G \to \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad v : G \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \big(u(x,y)\ ,\ v(x,y)\big)$$

differentioituvuutta tässä pisteessä, eli

$$u(x_0+\xi, y_0+\eta) = u(x_0,y_0) + L^{(u)}(\xi,\eta) + \varepsilon^{(u)}(\xi,\eta)$$

$$v(x_0+\xi, y_0+\eta) = v(x_0,y_0) + L^{(v)}(\xi,\eta) + \varepsilon^{(v)}(\xi,\eta)$$

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{\varepsilon^{(u)}(\xi,\eta)}{\|(\xi,\eta)\|} = 0 \ , \quad \lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{\varepsilon^{(v)}(\xi,\eta)}{\|(\xi,\eta)\|}$$

(Tason vektorin $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ normia merkitään tässä $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.)

Kokoamalla komponenttien differentiaalit ja virhetermit vektoriarvoisiksi differentiaaliksi ja virhetermiksi

$$L(\xi,\eta) := \big(L^{(u)}(\xi,\eta)\ ,\ L^{(v)}(\xi,\eta)\big)$$

$$\varepsilon(\xi,\eta) := \big(\varepsilon^{(u)}(\xi,\eta)\ ,\ \varepsilon^{(v)}(\xi,\eta)\big)$$

voidaan kirjoittaa

$$f(x_0+\xi, y_0+\eta) = f(x_0,y_0) + L(\xi,\eta) + \varepsilon(\xi,\eta)$$

missä $\displaystyle\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{\|\varepsilon(\xi,\eta)\|}{\|(\xi,\eta)\|} = 0$ ja $L = df(x_0,y_0)$ on lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jonka matriisi on

$$L = df(x_0, y_0) \xleftrightarrow[\text{standardi-kannassa}]{\text{matriisiesitys}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial y} v(x_0, y_0) \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}}.$$

Esimerkki: Funktio $z \longmapsto \bar{z}$ vastaa kahden reaalimuuttujan vektoriarvoista funktiota

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (x, -y),$$

jonka komponenttifunktiot ovat

$$u(x, y) = x \qquad \text{ja} \qquad v(x, y) = -y.$$

Funktio f on selvästi (reaalisessa mielessä) differentioituva ja sen differentiaali missä tahansa pisteessä $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

määräämä lineaarikuvaus

$$L(\xi, \eta) = (\xi, -\eta).$$

Kompleksinen derivaatta

Määritellään nyt kompleksimuuttujan kompleksiarvoisen funktion

$$f : G \to \mathbb{C} \qquad (G \subset \mathbb{C})$$

kompleksinen derivaatta kompleksisen erotusosamäärän raja-arvona.

Määr. 1.15 Funktiolla $f : G \to \mathbb{C}$ on (kompleksinen) derivaatta $f'(z_0)$ pisteessä $z_0 \in G$, jos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Toinen lauseke derivaatalle saadaan kirjoittamalla $h = z - z_0$, jolloin

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

(Huom.: Yllä h on kompleksiluku ja raja-arvon on oltava olemassa kaikista suunnista origoa lähestyttäessä.)

Esimerkki: Funktiolla $f(z) = z^2$ $(f : \mathbb{C} \to \mathbb{C})$ on derivaatta jokaisessa pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} &= \frac{(z_0+h)^2 - z_0^2}{h} \\
&= \frac{z_0^2 + 2hz_0 + h^2 - z_0^2}{h} \\
&= 2z_0 + h \xrightarrow[h \to 0]{} 2z_0 .
\end{aligned}$$

Siis $f'(z_0) = 2z_0$.

Esimerkki: Funktiolla $f(z) = \bar{z}$ $(f : \mathbb{C} \to \mathbb{C})$ ei ole derivaattaa missään pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$. Reaalisesta suunnasta pistettä $z_0 = x_0 + iy_0$ lähestyttäessä $(h = \xi \in \mathbb{R})$ nimittäin

$$\frac{f(z_0+\xi) - f(z_0)}{\xi} = \frac{(x_0 + \xi - iy_0) - (x_0 - iy_0)}{\xi}$$

$$= \frac{\xi}{\xi} = 1 \xrightarrow[\xi \to 0]{} 1,$$

kun taas imaginaarisesta suunnasta $(h = i\eta)$

$$\frac{f(z_0+i\eta) - f(z_0)}{i\eta} = \frac{(x_0 - i\cdot(y_0+\eta)) - (x_0 - iy_0)}{i\eta}$$

$$= \frac{-i\eta}{i\eta} = -1 \xrightarrow[\eta \to 0]{} -1.$$

Raja-arvoa $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ ei siis ole olemassa (se ei voi olla sekä $+1$ että -1).

Huom: Aiemman esimerkin perusteella $f(z) = \bar{z}$ on kuitenkin reaalisessa mielessä differentioituva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Huomataan siis, ettei reaalinen differentioituvuus ole riittävä ehto kompleksisen derivaatan olemassaololle.

Seuraavaksi nähdään, että se on välttämätön ehto.

Propositio Jos funktiolla $f : G \to \mathbb{C}$

$$f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$$

on pisteessä $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ kompleksinen derivaatta $f'(z_0)$, niin se on myös kahden reaalimuuttujan vektoriarvoisena funktiona reaalisessa mielessä differentioituva pisteessä (x_0, y_0) ja komponenttifunktioiden osittaisderivaatat toteuttavat Cauchy–Riemann yhtälöt

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y} v(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x_0,y_0) = -\frac{\partial}{\partial y} u(x_0,y_0).$$

Todistus: Oletetaan, että $f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ on olemassa ja kirjoitetaan $f'(z_0) = a + ib$, $a,b \in \mathbb{R}$. Kirjoitetaan myös $h = \xi + i\eta$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ ja määritetään virhetermi

$$\varepsilon(\xi,\eta) := f(z_0+\xi+i\eta) - f(z_0) - (\xi+i\eta)\cdot f'(z_0).$$

Silloin virhetermille saadaan

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{\|\varepsilon(\xi,\eta)\|}{\|(\xi,\eta)\|}$$

$$= \lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{|f(z_0+\xi+i\eta) - f(z_0) - (\xi+i\eta) f'(z_0)|}{|\xi+i\eta|}$$

$$= \lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \left| \frac{f(z_0+\xi+i\eta) - f(z_0)}{\xi+i\eta} - f'(z_0) \right| = 0$$

kompleksisen derivaatan määritelmän perusteella. Tämä näyttää, että f on reaalisessa mielessä differentioituva ja sen differentiaali on lineaarikuvaus

$$(\xi, \eta) \mapsto L(\xi, \eta) = (a \cdot \xi - b\eta,\ a \cdot \eta + b\xi)$$

$$\left(\begin{array}{l} \underline{\text{Huom}}: (\xi + i\eta) \cdot f'(z_0) \\ \quad = (\xi + i\eta) \cdot (a + ib) = \xi a - \eta b + i(\eta a + \xi b) \end{array} \right)$$

eli matriisimuodossa $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Vertaamalla osittaisderivaatoilla ilmaistuun differentiaaliin

$$(\xi, \eta) \mapsto L(\xi, \eta)$$

$$= \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \xi + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \eta,\ \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \xi + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \eta \right)$$

eli matriisimuodossa $\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$

saadaan Cauchy–Riemann yhtälöt

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = a = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = b = -\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

$\square$

<u>Havainto:</u> Kun kompleksinen derivaatta $f'(z_0) = a + ib$ on olemassa, funktion f differentiaali pisteessä z_0 on $\mathbb{C}$-lineaarinen kuvaus

$$\xi + i\eta \longmapsto (a+ib)(\xi + i\eta)$$

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} .$$

Tämä on vahvempi ehto kuin kuvauksen

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \eta \\ \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \eta \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}$-lineaarisuus. Lisäehto on täsmälleen Cauchy-Riemann yhtälöt osittaisderivaatoille.

<u>Geometrinen tulkinta:</u> Kompleksisella derivaatalla on seuraava geometrinen tulkinta. Kirjoitetaan

$$f'(z_0) = a + ib = \rho \cdot e^{i\phi}$$

missä $\rho = |f'(z_0)|$, $\phi = \arg(f'(z_0))$.

Silloin funktion f differentiaali pisteessä z_0 on lineaarikuvaus

$$\xi + i\eta \longmapsto \rho \cdot e^{i\phi}(\xi + i\eta) ,$$

jonka vaikutus on geometrisesti yhdistelmä kahdesta operaatiosta:

- skaalaus tekijällä $\rho = |f'(z_0)| \geq 0$
- kierto kulman $\phi = \arg(f'(z_0)) \in \mathbb{R}$ verran.

<u>Esimerkki</u>: Aiemmassa esimerkissä todettiin funktion $f(z) = z^2$ olevan kompleksisessa mielessä derivoituva kaikkialla. Laskemalla

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= (x+iy)^2 \\ &= x^2 + 2ixy + i^2 \cdot y^2 \\ &= x^2 - y^2 + i\,2xy \end{aligned}$$

löydetään komponenttifunktiot

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \quad , \quad v(x,y) = 2xy .$$

Laskemalla osittaisderivaatat

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2y$$

voitaisiin suoraankin todeta Cauchy-Riemann -yhtälöiden olevan voimassa kaikkialla.

<u>Esimerkki</u>: Määritellään "kompleksinen eksponenttifunktio"

$$f(x+iy) = e^x \cdot \cos(y) + i \cdot e^x \cdot \sin(y) ,$$

jolloin komponenttifunktiot ovat

$$u(x,y) = e^x \cdot \cos(y) \quad , \quad v(x,y) = e^x \cdot \sin(y) .$$

Voidaan taas laskea osittaisderivaatat

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^x \cdot \cos(y) \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = e^x \cdot \cos(y)$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = e^x \cdot \sin(y) \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -e^x \cdot \sin(y) .$$

Cauchy-Riemann yhtälöt ovat siis voimassa kaikkialla.

Edellisessä propositiossa todettiin, että kompleksisen derivaatan olemassaolosta seuraa Cauchy-Riemann yhtälöt. Käänteinen implikaatio on:

Propositio: Jos funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on kahden reaalimuuttujan funktiona differentioituva pisteessä $z_0 = x_0 + i y_0$ ja komponentti-funktiot

$$u(x,y) := \mathrm{Re}(f(x+iy)), \quad v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$$

toteuttavat tässä pisteessä Cauchy-Riemann-yhtälöt

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y} v(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x_0,y_0) = -\frac{\partial}{\partial y} u(x_0,y_0),$$

niin funktiolla f on pisteessä $z_0 = x_0 + i y_0$ kompleksinen derivaatta, joka saadaan millä tahansa seuraavista kaavoista:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \frac{\partial}{\partial x} u(x_0,y_0) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x_0,y_0) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} v(x_0,y_0) - i \frac{\partial}{\partial y} u(x_0,y_0) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} u(x_0,y_0) - i \frac{\partial}{\partial y} u(x_0,y_0) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} v(x_0,y_0) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

Eri kaavojen yhtäsuuruus yllä seuraa suoraan Cauchy-Riemann-yhtälöistä. Todistus on muutenkin melko suoraviivainen, mutta sivuutamme tässä yksityiskohdat.

Funktion analyyttisuus

Derivaatan olemassaolo yksittäisessä pisteessä ei vielä ole erityisen mielenkiintoinen ominaisuus funktioteorian kannalta. Hedelmällisempi lähtökohta on:

Määritelmä 1.16: Avoimessa joukossa $G \subset \mathbb{C}$ määritelty funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on *analyyttinen*, jos sillä on kompleksinen derivaatta jokaisessa pisteessä $z \in G$. (Funktion f sanotaan olevan *analyyttinen pisteessä* z_0, jos on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että funktiolla on kompleksinen derivaatta kaikissa kiekon $B(z_0, \varepsilon)$ pisteissä.)

Esimerkki: Kompleksinen eksponenttifunktio

$$f(x+iy) = e^x \cdot \cos(y) + i \cdot e^x \cdot \sin(y)$$

on analyyttinen funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Esimerkki: Funktio $f(z) = |z|^2$ on reaalisessa mielessä differentioituva koko tasossa (kts. aiempi esimerkki $(x,y) \mapsto x^2+y^2$). Sen komponenttifunktioiden

$$u(x,y) = x^2+y^2 \qquad v(x,y) = 0$$

osittaisderivaatat

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2y$$

toteuttavat C-R-yhtälöt vain origossa.

Funktiolla $f(z) = |z|^2$ on siis kompleksinen derivaatta origossa. Se ei kuitenkaan ole analyyttinen origossa (eikä missään muuallakaan).

Lause 1.5: Analyyttinen funktio $f: G \to \mathbb{C}$ on jatkuva.

Tod: Analyyttisyydestä seuraa kompleksinen derivoituvuus (määritelmä!), josta seuraa reaalinen differentioituvuus (aiempi propositio), josta edelleen seuraa jatkuvuus (aiempi lemma). $\square$

Yhdistämällä aiemmat propositiot saadaan analyyttisyydelle seuraava karakterisaatio.

Lause 1.7: Funktio $f: G \to \mathbb{C}$ on analyyttinen jos ja vain jos sen komponenttifunktiot

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy)) \quad , \quad v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$$

ovat differentioituvia kaikissa pisteissä $z \in G$ ja niiden osittaisderivaatat toteuttavat Cauchy-Riemann -yhtälöt.

Yhtenäisissä avoimissa joukoissa (eli alueissa) saadaan myös tuttu vakiofunktion karakterisaatio:

Lause 1.6: Olkoon G alue. Silloin $f'(z) = 0 \ \forall z \in G$ jos ja vain jos f on vakiofunktio.

Todistus Vakiofunktion $f(z) = c$ kompleksinen derivaatta on selvästi kaikkialla nolla. Kääntäen, jos kompleksinen derivaatta on kaikkialla nolla, ovat osittaisderivaatatkin nollia ja f on silloin vakio yhtenäisessä joukossa (Diff. int. kurssit). $\square$

ANALYYTTISISTÄ FUNKTIOISTA

Palautetaan mieleen edelliseltä luennolta funktioteorian (eli kompleksianalyysin) keskeisin käsite : analyyttiset funktiot.

Avoimessa joukossa $G \subset \mathbb{C}$ määritelty funktio

$$f : G \to \mathbb{C}$$

on (määritelmän mukaan) analyyttinen, jos sillä on jokaisessa pisteessä $z \in G$ kompleksinen derivaatta

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} .$$

Yhtäpitävästi (Lauseen 1.7 perusteella) f on analyyttinen, jos ja vain jos sen komponenttifunktiot

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy)) \quad \text{ja} \quad v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$$

ovat differentioituvia $G \to \mathbb{R}$ ja toteuttavat Cauchy-Riemann -yhtälöt

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)$$

ja tällöin derivaatalle saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned} f'(x+iy) &= \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) - i \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - i \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) . \end{aligned}$$

Harmoniset funktiot

Määr. 1.17 Funktio $u : G \to \mathbb{R}$ on harmoninen, jos sillä on jatkuvat toisen kertaluvun osittaisderivaatat ja jos niille pätee

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in G.$$

Harmonisuudella on läheinen yhteys analyyttisyyteen.

Lause 1.8 Jos analyyttisellä funktiolla $f : G \to \mathbb{C}$ on jatkuvat toisen kertaluvun osittaisderivaatat,* niin $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$ ja $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$ ovat harmonisia funktioita.

* Huomautus: Itseasiassa analyyttisellä funktiolla on välttämättä kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat, mutta todistamme tämän vasta myöhemmin kurssilla.

Todistus: Analyyttisen funktion reaali- ja imaginaariosat toteuttavat C-R-yhtälöt

$$\boxed{CR1}: \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial y} v \qquad \boxed{CR2}: \frac{\partial}{\partial x} v = -\frac{\partial}{\partial y} u.$$

Ottamalla vaikkapa jälkimmäisestä yhtälöstä vielä osittaisderivaatta x:n suhteen, saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} v &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} v\right) \overset{\boxed{CR2}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial}{\partial y} u\right) \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} u\right) \overset{\boxed{CR1}}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} v\right) \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial y^2} v ,
\end{aligned}$$

missä vaihdoimme osittaisderivaattojen järjestystä (toisen kertaluvun osittaisderivaattojen jatkuvuuden perusteella järjestyksellä ei ole väliä, kts. Diff. Int. kurssit).

Ylläolevasta nähdään, että $\frac{\partial^2}{\partial x^2} v + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v = 0$, joten v on harmoninen.

Funktio u käsitellään samaan tapaan. $\square$

Yhteys harmonisten ja analyyttisten funktioiden välillä toimii myös toiseen suuntaan — ainakin lokaalisti (avoimissa kiekoissa).

<u>Lause 1.9</u> Olkoon $u : B(z_0, r) \to \mathbb{R}$ harmoninen funktio. Tällöin on olemassa funktio $v : B(z_0, r) \to \mathbb{R}$ (n.k. harmoninen konjugaattifunktio) siten, että $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ on analyyttinen $B(z_0, r) \to \mathbb{C}$.

Sivuutetaan tämän lauseen todistus ja näytetään sen sijaan esimerkillä, miten harmoninen konjugaattifunktio löydetään. Todistuksen idea yleisessäkin tapauksessa on sama kuin seuraavassa esimerkissä.

<u>Esimerkki</u>: Olkoon $u(x,y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3$.
Miten löydetään sellainen funktio v, että $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ on analyyttinen?

Varmistetaan ensin, että u on harmoninen — muutoin se ei voi olla analyyttisen funktion reaaliosa. Lasketaan

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 2xy - 0 = 2xy$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = -2y.$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = 0.}$$

Funktio u on siis harmoninen.

Jos jokin funktio v olisi sellainen, että $f = u + iv$ on analyyttinen, olisi oltava

$\boxed{CR1}$: $\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v$, $\boxed{CR2}$: $\frac{\partial}{\partial x}v = -\frac{\partial}{\partial y}u$.

Käytetään jälkimmäistä C-R yhtälöä $\boxed{CR2}$ ja aiemmin laskettua u:n osittaisderivaattaa:

$$\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -x^2 + y^2.$$

Integroidaan muuttujan x suhteen (kiinnitetyllä y):

$$v(x,y) = \int(-x^2+y^2)\,dx + C(y)$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C(y),$$

missä $C(y)$ on (mahdollisesti y:stä riippuva) integroimisvakio.

Integroimisvakio on vielä tässä vaiheessa tuntematon y:n funktio. Lasketaan nyt osittaisderivaatta y:n suhteen

$$\frac{\partial}{\partial y} v(x,y) = 0 + 2xy + C'(y)$$

ja verrataan tätä ensimmäiseen C-R-yhtälöön ja aiemmin laskettuun u:n osittaisderivaattaan

$$\frac{\partial}{\partial y} v(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = 2xy \, .$$

Nähdään, että $C'(y) = 0$ eli funktio C on vakio $C(y) = a \in \mathbb{R}$.

Yhteenvetona, v on välttämättä muotoa

$$v(x,y) = -\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + a \, .$$

Käänteen, jokainen tätä muotoa oleva funktio toteuttaa u:n kanssa C-R-yhtälöt, joten saadaan analyyttinen funktio

$$f(x+iy) = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + i\left(-\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + a\right).$$

Derivointisääntöjä

Kompleksinen derivaatta noudattaa useita tuttuja derivoimissääntöjä (todistus jätetään harjoitukseksi):

Propositio

(i) Jos $f, g : G \to \mathbb{C}$ ja kompleksiset derivaatat $f'(z_0)$ ja $g'(z_0)$ ovat olemassa pisteessä $z_0 \in G$, niin myös funktioiden summalla on derivaatta

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

(ii) Jos $f : G \to \mathbb{C}$ ja $f'(z_0)$ on olemassa ja $c \in \mathbb{C}$ on vakio, niin

$$(c \cdot f)'(z_0) = c \cdot f'(z_0).$$

(iii) Jos $f, g : G \to \mathbb{C}$ ja $f'(z_0)$ ja $g'(z_0)$ ovat olemassa, niin

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0).$$

(iv) Jos $f : G \to \mathbb{C}$ ja $f(z) \neq 0 \ \forall z \in G$ ja $f'(z_0)$ on olemassa, niin myös funktiolla $\frac{1}{f}$ on kompleksinen derivaatta

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = \frac{-f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

Kohdat (iii) ja (iv) yhdistämällä saadaan

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(z_0) = \frac{g'(z_0) \cdot f(z_0) - g(z_0) \cdot f'(z_0)}{f(z_0)^2}$$

jos $f'(z_0)$ ja $g'(z_0)$ ovat olemassa ja $f \neq 0$.

Polynomit: Selvästi $f(z) = z$ on analyyttinen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ja $f'(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Kohdasta (iii) saadaan funktiolle $f_2(z) = z^2 = f(z) \cdot f(z)$ derivaatta

$$f_2'(z) = f'(z) \cdot f(z) + f(z) \cdot f'(z) = 1 \cdot z + z \cdot 1 = 2z$$

ja induktiivisesti monomifunktiolle $f_n(z) = z^n$

$$f_n'(z) = n \cdot z^{n-1}.$$

Monomeista lineaarikombinaationa saadaan yleinen polynomifunktio

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$
$$= \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot z^j$$

$$(c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C})$$

ja edelleen kohdista (i) ja (ii) sen derivaataksi

$$P'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \dots + n \cdot c_n \cdot z^{n-1}$$
$$= \sum_{j=0}^{n} j \cdot c_j \cdot z^{j-1}.$$

Polynomifunktiot $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ovat siis analyyttisiä.

Rationaalifunktiot

Olkoot $P(z) = \sum_{j=0}^{n} p_j \cdot z^j$ ja $Q(z) = \sum_{j=0}^{m} q_j z^j$ polynomifunktioita

(kertoimet $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}$, $p_n \neq 0$
$q_0, q_1, \dots, q_m \in \mathbb{C}$, $q_m \neq 0$).

Jos Q ei ole vakiopolynomi nolla, on sillä astetta m olevana polynomina korkeintaan m nollakohtaa.

- Tämä seuraa polynomien jakoalgoritmista, kts. "Algebran perusrakenteet" -kurssi.
- Myöhemmin todistamme, että nollakohtia on tasan m, jos ne lasketaan kertalukunsa mukaisesti (n.k. "algebran peruslause").

Merkitään Q:n eri nollakohtia $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k \in \mathbb{C}$.

Silloin osamääränä määritelty rationaalifunktio

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

on hyvin määritelty joukossa $\mathbb{C} \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ ja proposition kaavojen perusteella sillä on kompleksiset derivaatat tässä joukossa. Siis rationaalifunktio

$$R : \mathbb{C} \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

on analyyttinen.

(Huomaa, että joukko $\mathbb{C} \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ on avoin.)

Tutuista derivoimissäännöistä pätee myös ketjusääntö:

<u>Propositio</u>: Jos $f : G \to \tilde{G} \subset \mathbb{C}$ ja $g : \tilde{G} \to \mathbb{C}$ ovat sellaiset, että derivaatta $f'(z_0)$ on olemassa pisteessä $z_0 \in G$ ja pisteessä $w_0 = f(z_0) \in \tilde{G}$ on olemassa derivaatta $g'(w_0)$, niin yhdistetyllä funktiolla $g \circ f$

$$(g \circ f)(z) = g(f(z))$$

on derivaatta

$$(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g'(f(z_0))$$

Suoraviivainen todistus sivuutetaan tässä.

Käänteisfunktioiden derivaattaa koskee seuraava tulos.

<u>Propositio</u>: Jos funktiolla f on jossakin pisteen z_0 ympäristössä jatkuva käänteisfunktio f^{-1} ja derivaatta $f'(z_0) \neq 0$ on olemassa, niin käänteisfunktiolla f^{-1} on derivaatta pisteessä $f(z_0)$ ja

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

<u>Huom</u>: Osoitetaan, että analyyttisillä funktioilla f on ylläolevassa mielessä "lokaali käänteisfunktio" kaikissa sellaisissa pisteissä z_0, joissa derivaatta ei häviä, $f'(z_0) \neq 0$.

<u>Todistus</u>: Oletetaan, että U on sellainen pisteen z_0 ympäristö, että funktiolla $f: U \to V$ on käänteisfunktio $f^{-1}: V \to U$, joka on jatkuva pisteessä $w_0 = f(z_0) \in V$.

Kun $k \in \mathbb{C}$ ja $|k|$ on riittävän pieni, on $w_0 + k \in V$ ja käänteisfunktion arvo voidaan kirjoittaa muodossa

$$f^{-1}(w_0+k) = z_0 + h(k) \in U,$$

missä $h(k) := f^{-1}(w_0+k) - z_0$ riippuu k:sta. Käänteisfunktion f^{-1} jatkuvuudesta saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{k \to 0} h(k) &= \lim_{k \to 0} \left(f^{-1}(w_0+k) \right) - z_0 \\ &= f^{-1}(w_0) - z_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten käänteisfunktion erotusosamäärän raja-arvoa

$$\lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(w_0+k) - f^{-1}(w_0)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{z_0 + h(k) - z_0}{w_0 + k - w_0}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{h(k)}{f(z_0+h(k)) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

derivaatan $f'(z_0)$ määritelmän perusteella ja huomioiden, että jatkuva operaatio $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ kunnioittaa raja-arvoa. $\square$

Kompleksiset neliöjuuret

Muistutetaan ensin reaalinen tapaus: kaikilla epänegatiivisilla $a \geq 0$ on olemassa epänegatiivinen neliöjuuri $\sqrt{a} \geq 0$, joka toteuttaa $(\sqrt{a})^2 = a$ ja sen vastaluku $-\sqrt{a} \leq 0$ toteuttaa myös $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Onko kompleksiluvulle $w \in \mathbb{C}$ mahdollista määritellä neliöjuuri $\sqrt{w}$?

Pyritään ratkaisemaan yhtälö

$$z^2 = w$$

(eli löytämään funktiolle $f(z) = z^2$ käänteis-funktio).

Napakoordinaateissa voidaan kirjoittaa

$$w = \rho \cdot e^{i\phi},$$

missä

$$\rho = |w| \geq 0$$

ja $\phi = \arg(w)$ on määritelty 2π:n monin-kertaa vaille (jos $w \neq 0$) ehdoista

$$\cos(\phi) = \frac{\mathrm{Re}(w)}{|w|}, \quad \sin(\phi) = \frac{\mathrm{Im}(w)}{|w|}.$$

Etsitään ratkaisuakin napakoordinaateissa kirjoittamalla $z = r \cdot e^{i\theta}$, missä $r \geq 0$ ja $\theta \in \mathbb{R}$.

Nyt
$$z^2 = (r \cdot e^{i\theta})^2 = r^2 \cdot e^{i2\theta},$$
joten yhtälö $z^2 = w$ on yhtäpitävä yhtälön
$$r^2 \cdot e^{i2\theta} = \varrho \cdot e^{i\phi}$$
kanssa. Moduli $r = |z| \geq 0$ voidaan ratkaista yhtälöstä $r^2 = \varrho$ epänegatiivisen reaaliluvun yksikäsitteisenä epänegatiivisena neliöjuurena
$$r = \sqrt{\varrho}.$$
Tapauksessa $w = 0$ (jolloin $|z| = \sqrt{|w|} = \sqrt{0} = 0$) ainoa yhtälön $z^2 = w$ ratkaisu on $z = 0$ (kuten oltaisiin voitu päätellä siitäkin, ettei kompleksilukujen kunnassa ole nollantekijöitä).

Tapauksessa $w \neq 0$ ratkaisun z modulin on oltava positiivinen $r = |z| = \sqrt{|w|} > 0$ ja argumentiksi θ kelpaa mikä tahansa reaaliluku, joka toteuttaa yhtäpitävästi
$$e^{i2\theta} = e^{i\phi}$$
$$\iff \cos(2\theta) = \cos(\phi) \quad \text{ja} \quad \sin(2\theta) = \sin(\phi)$$
$$\iff 2\theta = \phi + 2\pi m \quad \text{jollakin } m \in \mathbb{Z}$$
$$\iff \theta = \tfrac{1}{2}\phi + \pi m \quad \text{jollakin } m \in \mathbb{Z}.$$
Parilliset m antavat ratkaisuksi $z = \sqrt{\varrho} \cdot e^{i\phi/2}$ ja parittomat m tämän vastaluvun
$$z = \sqrt{\varrho}\, e^{i(\phi/2 + \pi)} = \sqrt{\varrho} \cos\left(\tfrac{\phi}{2} + \pi\right) + i\sqrt{\varrho} \sin\left(\tfrac{\phi}{2} + \pi\right)$$
$$= -\sqrt{\varrho} \cos\left(\tfrac{\phi}{2}\right) - i\sqrt{\varrho} \sin\left(\tfrac{\phi}{2}\right) = -\sqrt{\varrho}\, e^{i\phi/2}.$$

On näytetty:

Lause Yhtälöllä $z^2 = w$ on

(a) yksi juuri $z = 0$, jos $w = 0$;

(b) kaksi juurta

$$z = \pm \sqrt{|w|}\, e^{i \arg(w)/2},$$

jos $w \neq 0$.

Yleisemmin, jos $n \in \mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, yhtälö $z^n = w$ voidaan ratkaista samaan tapaan napakoordinaateissa ($r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi}$ $\iff$ $r = \sqrt[n]{\rho}$ ja jos $\rho > 0$ niin

$n\theta = \phi + 2\pi m$ jollakin $m \in \mathbb{Z}$ eli

$\theta = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2\pi m}{n}$)

kompleksisen juuren $\sqrt[n]{\cdot}$ määrittelemisyritykseksi.

Lause 2.1: Yhtälöllä $z^n = w$ on

(a) yksi juuri $z = 0$, jos $w = 0$

(b) n eri kompleksista juurta

$$z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i(\arg(w)/n + 2\pi m/n)}$$

$$= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\arg(w)}{n} + \frac{2\pi m}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\arg(w)}{n} + \frac{2\pi m}{n}\right)\right)$$

missä $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, jos $w \neq 0$.

Kun $n \geq 2$, ei siis ole yksikäsitteistä tapaa määritellä juurifunktiota $\sqrt[n]{\cdot}$, vaan joitakin valintoja on tehtävä. Tällaisia valintoja kutsutaan "moniarvoisen funktion $\sqrt[n]{\cdot}$ haaran valinnoiksi," ja valinnat koskevat sekä määrittelyjoukkoa että yhden ratkaisuista poimimista.

Tarkastellaan esimerkkejä neliöjuurifunktion haaran valinnoista.

Nollasta eroavalle kompleksiluvulle $w \neq 0$ on aina mahdollista valita argumentti ϕ esimerkiksi väliltä $(-\pi, +\pi]$,

$$-\pi < \phi \leq +\pi .$$

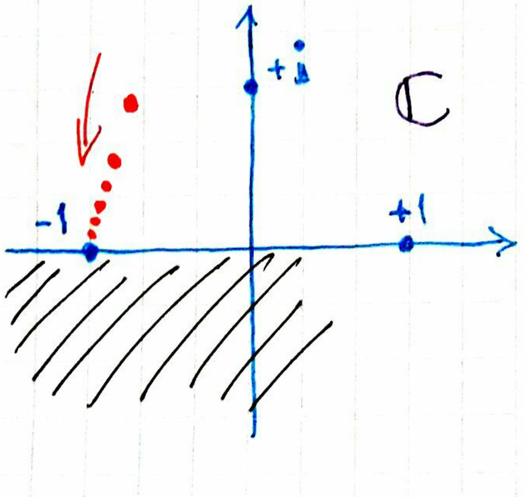
Silloin luvun $w = \rho e^{i\phi}$ neliöjuurifunktioksi voitaisiin valita

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(\rho e^{i\phi}) = \sqrt{\rho} \cdot e^{i\phi/2} .$$

Tosiaan silloin $g(w)^2 = w$, joten g on funktion $f(z) = z^2$ käänteisfunktio koko kompleksitasossa, mutta tässä kuten kaikissa muissakin valinnoissa on ongelmana epäjatkuvuus...

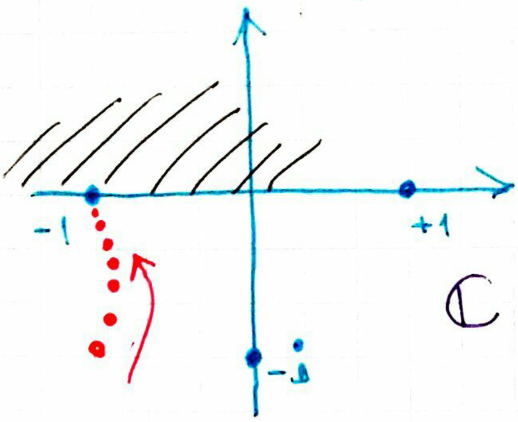
Esimerkiksi
$$\begin{aligned} g(-1) &= g(1 \cdot e^{+i\pi}) \\ &= \sqrt{1} \cdot e^{+i\pi/2} \\ &= 1 \cdot \Big(\underbrace{\cos\big(\tfrac{+\pi}{2}\big)}_{=0} + i \cdot \underbrace{\sin\big(\tfrac{+\pi}{2}\big)}_{=+1} \Big) \\ &= +i \end{aligned}$$

ja ylemmän puolitason suunnasta pistettä -1 lähestyttäessä funktion raja-arvo on haluttu:



Jos $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on jono s.e.
$$\lim_{n \to \infty} w_n = -1 \quad \text{ja} \quad \operatorname{Im}(w_n) \geq 0,$$
niin $w_n = \rho_n \cdot e^{i\phi_n}$, missä
$$\rho_n \longrightarrow 1, \qquad \phi_n \longrightarrow +\pi,$$
joten $g(w_n) = \sqrt{\rho_n}\, e^{i\phi_n/2} \longrightarrow +i$.

Alemman puolitason suunnasta nähdään epäjatkuvuus:



Jos $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jono s.e. $\lim_{n\to\infty} w_n = -1$ ja $\operatorname{Im}(w_n) < 0$, niin $w_n = \rho_n e^{i\phi_n}$, missä $-\pi < \phi_n \leq 0$ ja $\rho_n \to 1$, $\phi_n \to -\pi$, joten

$$g(w_n) = \sqrt{\rho_n}\, e^{i\phi_n/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{1}\cdot e^{-i\pi/2} = -i.$$

Nähdään, että funktio g ei ole jatkuva pisteessä -1 eikä itseasiassa muuallakaan negatiivisella reaaliakselilla: $\forall a > 0$

$$\lim_{\eta\to 0^+} g(-a+i\eta) = +i\sqrt{a} \neq -i\sqrt{a} = \lim_{\eta\to 0^-} g(-a+i\eta).$$

Tehdään vielä havainto koskien funktion g arvoja. Koska $-\pi < \phi \leq +\pi$, on

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\phi}{2} \leq +\frac{\pi}{2}$$

ja siten

$$g(w) = g(\rho\cdot e^{i\phi}) = \sqrt{\rho}\Big(\underbrace{\cos\left(\tfrac{\phi}{2}\right)}_{\geq 0} + i\cdot\sin\left(\tfrac{\phi}{2}\right)\Big)$$

koska $\frac{\phi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

eli $\operatorname{Re}(g(w)) \geq 0$. Siis "neliöjuuri" $g(w)$ on tullut valituksi aina oikeanpuoleisesta osasta kompleksitasoa.

(Myös vasemmanpuoleisessa osassa oleva $-g(w)$ toteuttaisi $(-g(w))^2 = g(w)^2 = w$.)

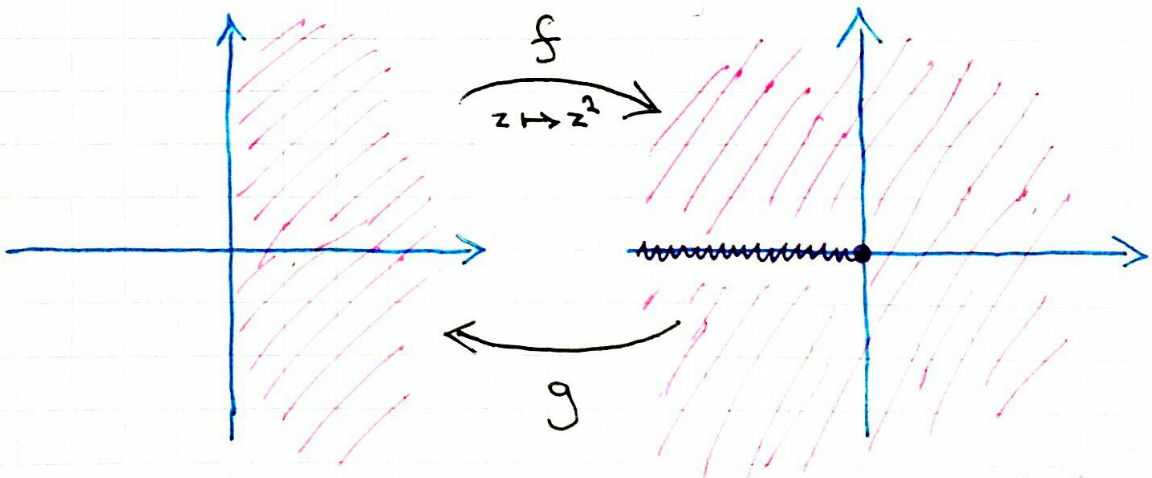
Funktion g suurin ongelma koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$ on epäjatkuvuus negatiivisella reaaliakselilla $(-\infty, 0) \subset \mathbb{C}$. Jos rajoitutaan epäpositiivisen reaaliakselin komplementtiin tasossa, saadaan

$$g : \underbrace{\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}_{= \{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg(w) \neq +\pi\}} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

Tämä on avoimessa joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ määritelty jatkuva funktio, joka on analyyttisen funktion

$$f : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$
$$f(z) = z^2$$

käänteisfunktio.



$\mathrm{Re}(z) > 0$ $\qquad$ $\arg(w) \neq +\pi$

Aiemman proposition perusteella tämä jatkuva analyyttisen funktion käänteisfunktio on itsekin analyyttinen ja koska $f'(z) = 2z$ on g:n derivaatta pisteessä $w = z^2 = f(z)$

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{2z} = \frac{1}{2g(w)}.$$

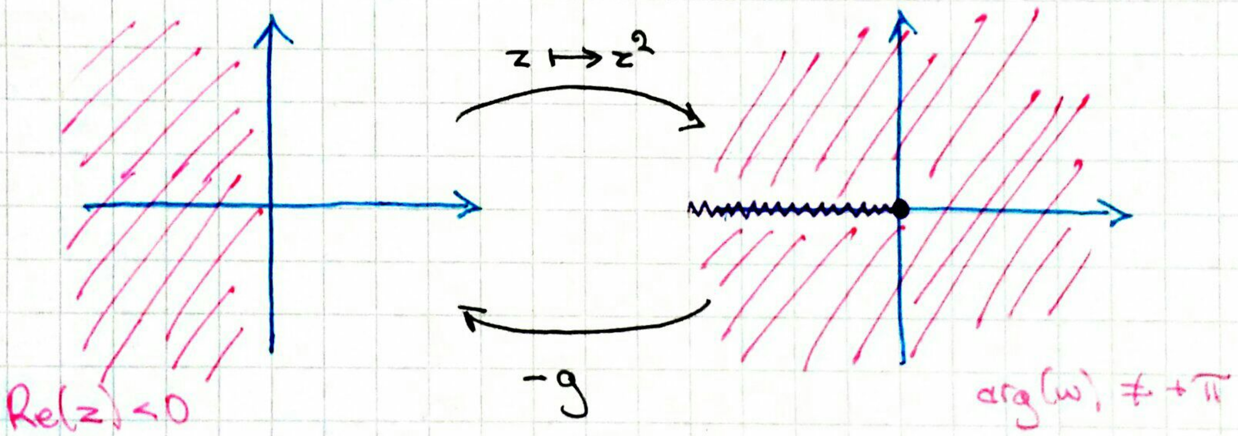
Siis: " $\frac{d}{dw}\sqrt{w} = \frac{1}{2\sqrt{w}}$ "

Tällä g ei kuitenkaan saatu

- kuvaukselle $z \mapsto z^2$ käänteisfunktiota vasemmanpuoleisessa kompleksitason osassa $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$
- negatiivisten reaalilukujen $x < 0$ kompleksisia neliöjuuria
- ...

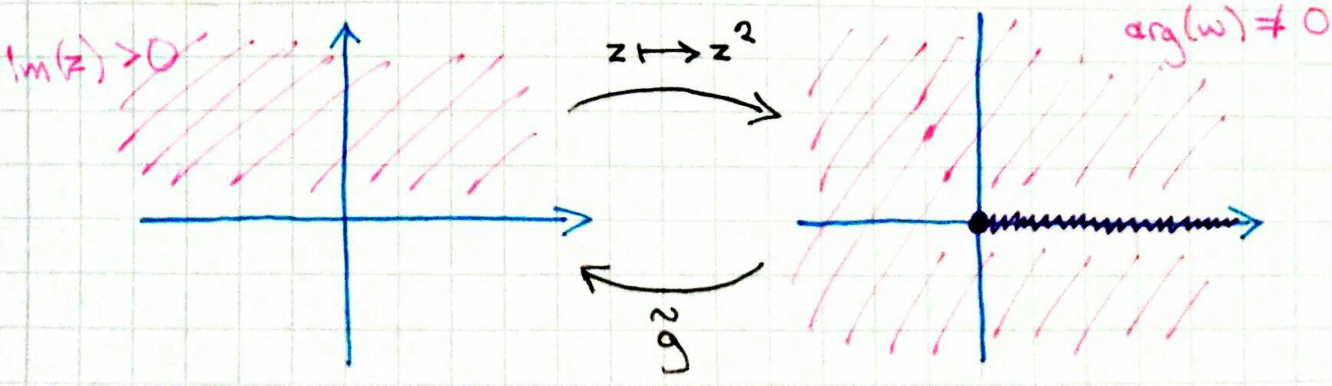
Siksi usein tehdään muita haaran valintoja — esimerkiksi:

$$w \longmapsto -g(w)$$
$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$$



tai valinnalla $0 < \arg(w) < 2\pi$ epänegatiivisen reaaliakselin komplementissa määritelty

$$\tilde{g}(w) = \tilde{g}(|w| e^{i \arg(w)}) = \sqrt{|w|} \cdot e^{i \arg(w)/2}$$



tms., tms. OLE HUOLELLINEN HAARAN VALINTOJEN KANSSA!

KOMPLEKSISET POTENSSISARJAT

Olemme määritelleet kompleksianalyysin eli funktioteorian keskeisimmän käsitteen, analyyttiset funktiot. Meillä on jo joitakin esimerkkejäkin analyyttisistä funktioista:

- polynomifunktiot

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \quad \text{kertoimet})$$

- rationaalifunktiot

$$R : \mathbb{C} \setminus \{\omega_1, \ldots, \omega_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \text{missä}$$

P ja Q ovat polynomifunktioita ja $\omega_1, \ldots, \omega_k$ ovat Q:n nollakohdat

- juurifunktioiden haarat

esim. $z \longmapsto \sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i \arg(z)/2}$

$$-\pi < \arg(z) < \pi$$

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \{ w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(w) > 0 \}$$

Tällä luennolla tarkastelemme potenssisarjojen määrittelemiä funktioita. Potenssisarjat ovat yleinen ja systemaattinen menetelmä analyyttisten funktioiden konstruoimiseksi.

Äärettömät sarjat

Määritelmä Olkoot $c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{C}$ kompleksilukuja. Lauseketta

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$$

kutsutaan (äärettömäksi) sarjaksi ja lausekkeita

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} c_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_{N-1} + c_N \qquad (N \in \mathbb{N})$$

sen osasummiksi. (Lukuja c_n sanotaan sarjan termeiksi.)

Määritelmä 3.5: Jos äärettömän sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ osasummien jonolla on raja-arvo

$$\lim_{N \to \infty} S_N = s \in \mathbb{C},$$

niin sarjan sanotaan suppenevan ja merkitään

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s.$$

Jos osasummilla ei ole raja-arvoa, niin sarjan sanotaan hajaantuvan.

Huom.: Äärellisen monen termin muuttaminen ei vaikuta siihen suppeneeko sarja vai hajaantuuko se (summan arvoon muutos toki vaikuttaa). Tämä havainto on usein hyödyllinen suppenemistarkasteluissa — vain sarjan "hännällä" on merkitystä. Täsmällisemmin tämä voidaan muotoilla seuraavasti: millä tahansa n_0 sarjat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ja $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n$ joko molemmat suppenevat tai molemmat hajaantuvat.

Jos termit kirjoitetaan reaali- ja imaginaariosiensa avulla $c_n = a_n + i b_n$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R})$, niin

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} c_n = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) + i \cdot \left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right).$$

Lauseen 3.8. perusteella nähdään sitten, että kompleksiterminen sarja suppenee jos ja vain jos sen termien reaali- ja imaginaariosista muodostetut reaaliset sarjat suppenevat ja tällöin

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) + i \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Raja-arvon ja äärellisten (osa)summien lineaarisuudesta seuraa myös:

Lemma:

(i) Jos sarjat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n'$ suppenevat, niin myös sarja $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n + c_n')$ suppenee ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n + c_n') = \sum_{n=0}^{\infty} c_n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n'.$$

(ii) Jos sarja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ suppenee ja $\lambda \in \mathbb{C}$, niin myös sarja $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot c_n)$ suppenee ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot c_n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Esimerkki (Geometrinen sarja).

Olkoon $z \in \mathbb{C}$. Tarkastellaan geometrista sarjaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n ,$$

jonka termit ovat $c_n = z^n$.

Osasummat ovat

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^N .$$

Havaitaan, että

$$(1-z) \cdot S_N = (1-z)(1 + z + z^2 + \dots + z^N)$$

$$= 1 - z + (z - z^2) + (z^2 - z^3) + \dots + (z^N - z^{N+1})$$

$$= 1 - z^{N+1} ,$$

joten jos $z \neq 1$, saadaan

$$S_N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} .$$

Jos $|z| < 1$, niin $|z^{N+1}| = |z|^{N+1} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$, jolloin

$$\lim_{N \to \infty} S_N = \frac{1-0}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

ja geometrinen sarja suppenee

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad (\text{jos } |z| < 1).$$

Jos $|z| \geq 1$, niin geometrinen sarja hajaantuu seuraavan havainnon perusteella.

Lause 3.11: Jos sarja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Todistus: Oletetaan sarjan suppeneminen, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s$. Silloin $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0$ s.e.

$$|S_N - s| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\ N \geq N_0 .$$

Erityisesti kolmioepäyhtälön perusteella kaikilla $N \geq N_0 + 1$ saadaan

$$\begin{aligned} |c_N| &= |S_N - S_{N-1}| \\ &= |(S_N - s) - (S_{N-1} - s)| \\ &\leq |S_N - s| + |S_{N-1} - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Siis $\lim_{N\to\infty} c_N = 0$. $\square$

Lause 3.12: (Cauchyn kriteeri sarjoille)
Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ suppenee jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa n_0 siten, että

$$\left| \sum_{n=m}^{M} c_n \right| < \varepsilon \qquad \text{kun } M \geq m \geq n_0 .$$

Hahmotelma: Ylläoleva ehto on yhtäpitävä sen kanssa, että osasummien jono $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono, joten ehto on välttämätön suppenemiselle. Ehto on myös riittävä, koska sen ollessa voimassa reaali- ja imaginaariosista muodostetut osasummat ovat reaalisia Cauchy jonoja ja siten suppenevat. $\square$

Määritelmä 3.6 Sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sanotaan *suppenevan itseisesti*, jos sen termien moduleista (eli itseisarvoista) muodostettu sarja $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ suppenee.

Lause 3.13: Jos sarja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ suppenee itseisesti, niin se suppenee ja lisäksi pätee kolmioepäyhtälö sarjoille:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| .$$

Todistus: Itseisesti suppenevalle sarjalle kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että kun $M \geq m \geq n_0$, on

$$\sum_{n=m}^{M} |c_n| < \varepsilon .$$

Silloin tavallisesta kolmioepäyhtälöstä saadaan

$$\left|\sum_{n=m}^{M} c_n\right| \leq \sum_{n=m}^{M} |c_n| < \varepsilon ,$$

joten sarja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ suppenee Cauchyn kriteerin perusteella. Lisäksi tavallinen kolmioepäyhtälö antaa

$$|S_N| = \left|\sum_{n=0}^{N} c_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |c_n| ,$$

joten rajalla $N \to \infty$ saadaan

itseisarvon ottaminen on jatkuva funktio

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right| = \left|\lim_{N\to\infty} S_N\right| = \lim_{N\to\infty} |S_N|$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |c_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|. \quad \square$$

Esimerkki: Olkoot $u_0, u_1, u_2, \ldots \in \mathbb{C}$ yksikköympyrän pisteitä, $|u_n| = 1$ $\forall n$.

Silloin sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}$$
suppenee itseisesti, koska sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{u_n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{suppenee.}$$
Siis sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}$ suppenee.

Esimerkki: Sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{n}$ suppenee, mutta ei suppene itseisesti. Sen itseisarvoista muodostettu sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$
on harmoninen sarja, joka hajaantuu (siis $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{n}$ ei suppene itseisesti).

Sen reaaliosista muodostetun sarjan kaikki termit ovat nollia ja imaginaariosista muodostettu sarja on
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots,$$
joka suppenee (ei itseisesti) alternoivana sarjana, jonka termit lähestyvät nollaa (siis $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{n}$ suppenee Lauseen 3.8 perusteella).

Lemma (D'Alembertin suhdetesti yleisille sarjoille).

Jos $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ on ääretön sarja, jonka peräkkäisten termien modulien suhteilla on raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lambda,$$

niin voidaan päätellä:

(i) jos $\lambda < 1$, niin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ suppenee itseisesti;

(ii) jos $\lambda > 1$, niin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ hajaantuu.

Huom.: Tapauksessa $\lambda = 1$ ei suppenemisesta tai hajaantumisesta voida suhdetestillä päätellä mitään. Tarkempi Raaben testi on tällöin usein hyödyllinen (ei käsitellä tällä kurssilla).

Tod: (i) Oletetaan $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lambda < 1$.

Valitaan riittävän pieni $\varepsilon > 0$ siten, että $\lambda + \varepsilon < 1$ ja sitten raja-arvon määritelmän mukaan löydetään n_0 siten, että

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < \lambda + \varepsilon < 1 \qquad \forall n \geq n_0.$$

Induktiolla saadaan $|c_n| \leq |c_{n_0}| \cdot (\lambda+\varepsilon)^{n-n_0}$, joten sarjan hännälle saadaan estimaatti

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |c_n| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |c_{n_0}| \cdot (\lambda+\varepsilon)^{n-n_0} = |c_{n_0}| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\underbrace{\lambda+\varepsilon}_{<1})^k$$

joka on suppeneva geometrinen sarja.

Siis $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ suppenee itseisesti.

(ii) Oletuksesta $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lambda > 1$ seuraa (päättely kuten yllä) etteivät termit lähesty nollaa, joten $\sum c_n$ ei suppene. $\square$

Potenssisarjat

Määritelmä Olkoot $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{C}$ ja $z_0 \in \mathbb{C}$.

Sarjoja
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \quad , \qquad (\star)$$
missä $z \in \mathbb{C}$, sanotaan pisteen z_0 ympärillä kehitetyiksi potenssisarjoiksi kertoimilla $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Havainto: Potenssisarja $(\star)$ suppenee ainakin kun $z = z_0$, koska $a_n \cdot (z_0 - z_0)^n = a_n 0^n = 0$ kaikilla $n > 0$. Kun $n = 0$, noudatetaan jatkuvuuteen perustuvaa konventiota
$$(z_0 - z_0)^0 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^0 = \lim_{z \to z_0} 1 = 1,$$
joten
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 - z_0)^n = a_0 \cdot 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = a_0 .$$

Lause 3.12 (Abelin lause)

Jos potenssisarja $(\star)$ suppenee pisteessä $z = z_1 \in \mathbb{C}$, niin se suppenee itseisesti kaikilla $z \in B(z_0, r)$, missä $r = |z_1 - z_0|$.

Todistus: Oletetaan, että sarja
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z_1 - z_0)^n \qquad \text{suppenee.}$$
Erityisesti sen termien on mentävä nollaan Lauseen 3.11 perusteella:
$$\lim_{n \to \infty} a_n (z_1 - z_0)^n = 0,$$

eli

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left| a_n (z_1 - z_0)^n \right| = \lim_{n\to\infty} |a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} |a_n| \cdot r^n \quad .$$

Erityisesti edelleen tästä seuraa, että y.o. jono on rajoitettu: jollakin $M > 0$ pätee

$$|a_n| \cdot r^n \leq M \qquad \forall n = 0,1,2,\ldots \quad .$$

Jos nyt $z \in B(z_0, r)$ eli $|z - z_0| < r$, niin potenssisarja ⊛ todetaan itseisesti suppenevaksi seuraavalla laskulla:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot (z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z - z_0|^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_n| \cdot r^n}_{\leq M} \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{r}\right)^n$$

suppeneva geometrinen sarja

$$\leq M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{|z - z_0|}{r}}_{<1 \text{ koska } |z - z_0| < r}\Big)^n < \infty \quad .$$

$\square$

Seurauksena Abelin lauseesta saadaan:

<u>Korollaari</u> Jos potenssisarja ⊛ ei suppene itseisesti pisteessä $z = z_2 \in \mathbb{C}$, niin se hajaantuu kaikissa pisteissä z_1, joilla $|z_1 - z_0| > |z_2 - z_0|$.

<u>Tod</u>: Suppeneminen pisteessä z_1 ja hajaantuminen pisteessä z_2, jolle $|z_2 - z_0| < |z_1 - z_0|$ olisi ristiriidassa Abelin lauseen kanssa. $\square$

Määritelmä: Potenssisarjan ⊛ suppenemissäde on

$$R = \sup \left\{ |z-z_0| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ suppenee} \right\}.$$

Huom: On kolme eri mahdollisuutta:

(i) $R = 0$, jos ⊛ suppenee ainoastaan pisteessä $z = z_0$

(ii) $R \in (0, \infty)$

(iii) $R = +\infty$.

Abelin lauseesta ja sen korollaarista saadaan:

- sarja ⊛ suppenee, jos $|z-z_0| < R$
- sarja ⊛ hajaantuu, jos $|z-z_0| > R$

Huom: Jos $|z-z_0| = R$, ei ylläolevista voida vielä päätellä mitään sarjan ⊛ suppenemisesta tai hajaantumisesta.

Määritelmä Potenssisarjan ⊛ suppenemiskiekko on suurin avoin kompleksitason $\mathbb{C}$ osajoukko, jossa ⊛ suppenee.

Siis suppenemiskiekko on

- $B(z_0, R) \subset \mathbb{C}$, jos $0 < R < +\infty$
- tyhjä joukko $\emptyset \subset \mathbb{C}$, jos $R = 0$
- koko taso $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}$, jos $R = +\infty$.

Suhdetestiä voidaan soveltaa potenssisarjojen suppenemissäteen selvittämiseen, jos potenssisarjan kerrointen modulien suhteilla on raja-arvo.

Lause 3.21 (D'Alembertin suhdetesti potenssisarjoille).
Jos potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ peräkkäisten kerrointen modulien suhteella on raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho ,$$

niin potenssisarjan suppenemissäde on $R=\rho$.

Todistus: Oletetaan $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho$.

Jos $z \in \mathbb{C}$ on sellainen, että $|z-z_0| < \rho$, niin sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ termeille $c_n = a_n \cdot (z-z_0)^n$ saadaan

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{|a_{n+1}| \cdot |z-z_0|^{n+1}}{|a_n| \cdot |z-z_0|^n}$$

$$= \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |z-z_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\rho} \cdot |z-z_0| < 1,$$

joten suhdetestin perusteella sarja suppenee.
Tästä seuraa $R \geq \rho$.

Jos $z \in \mathbb{C}$ on sellainen, että $|z-z_0| > \rho$, niin termeille saadaan vastaavasti

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z-z_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\rho} \cdot |z-z_0| > 1,$$

joten suhdetestin perusteella sarja hajaantuu.
Tästä seuraa $R \leq \rho$.

Yhdistämällä y.o. epäyhtälöt saadaan väite $R=\rho$.

$\square$

<u>Esimerkki:</u> Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} z^n$.

Sovelletaan sarjaan suhdetestiä: lasketaan kerrointen $a_n = \frac{3^n}{n}$ ja $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+1}$ suhteen raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^n}{n}\right| \cdot \left|\frac{n+1}{3^{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1 + 1/n}{1}\right) = \frac{1}{3}.$$

Sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n} z^n$ suppenemissäde on siis $R = \frac{1}{3}$ ja suppenemiskiekko $B(0, \frac{1}{3})$.

<u>Esimerkki:</u> Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot z^n$.

Sovelletaan sarjaan suhdetestiä:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)} \cdot \cancel{(n-2)} \cdot \ldots \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(n+1) \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)} \cdot \cancel{(n-2)} \cdot \ldots \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ suppenemissäde on siis $R = 0$ ja suppenemiskiekko tyhjä joukko $\emptyset$.

<u>Esimerkki</u> Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

Suhdetestiä varten lasketaan kuten yllä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \Big/ \frac{1}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ suppenemissäde on siis $R = +\infty$ ja suppenemiskiekko $\mathbb{C}$.

Lause 3.20 (Hadamardin kaava)

Potenssisarjan ⊛ suppenemissäde saadaan kaavasta

$$R = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}}$$

(missä tulkitaan tarvittaessa $\frac{1}{0} = +\infty$ ja $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Huom: Reaalilukujonon limsup ("limes superior" eli "yläraja-arvo") on aina olemassa — se on määritelty kaavalla

$$\limsup_n x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n$$

$$= \inf_k \sup_{n\geq k} x_n$$

ja on joko reaaliluku tai $+\infty$ tai $-\infty$.

Todistus Merkitään $L := \limsup_n |a_n|^{1/n}$ ja käsitellään tässä tapaus $0 < L < +\infty$ — tapaukset $L = 0$ $(R = +\infty)$ ja $L = +\infty$ $(R = 0)$ käsiteltäisiin samaan tapaan.

Oletetaan, että $z \in \mathbb{C}$ on sellainen, että $|z - z_0| < \frac{1}{L}$ ja näytetään, että sarja ⊛ suppenee. Valitaan ensin riittävän pieni $\varepsilon > 0$ siten, että

$$|z - z_0| \cdot (L + \varepsilon) < 1.$$

Määritelmän mukaan on olemassa n_0 siten, että $|a_n|^{1/n} \leq L + \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_0$.

Silloin kaikilla $n \geq n_0$ saadaan

$$\begin{aligned}|a_n \cdot (z-z_0)^n| &= |a_n| \cdot |z-z_0|^n \\ &\leq (L+\varepsilon)^n \cdot |z-z_0|^n \\ &= \big((L+\varepsilon)\cdot|z-z_0|\big)^n,\end{aligned}$$

joten sarjan häntä n_0:ista alkaen suppenee itseisesti

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n \cdot (z-z_0)^n| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \big(\underbrace{(L+\varepsilon)\cdot|z-z_0|}_{<1}\big)^n < \infty .$$

suppeneva geometrinen sarja

Siis potenssisarja ($\star$) suppenee sellaisissa pisteissä z, joille pätee $|z-z_0| < \frac{1}{L}$. Suppenemissäteelle saadaan $R \geq \frac{1}{L}$.

Jos taas $z \in \mathbb{C}$ on sellainen, että $|z-z_0| > \frac{1}{L}$, niin riittävän pienellä $\varepsilon > 0$ on $|z-z_0| \cdot (L-\varepsilon) > 1$.

Määritelmän mukaan löytyy osajono $n_1, n_2, n_3, \ldots$ indeksejä siten, että $|a_{n_j}|^{1/n_j} \geq L-\varepsilon$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots$.

Siis sarjassa ($\star$) on termejä $a_{n_j} \cdot (z-z_0)^{n_j}$, joille

$$\begin{aligned}|a_{n_j} \cdot (z-z_0)^{n_j}| &= |a_{n_j}| \cdot |z-z_0|^{n_j} \\ &\geq (L-\varepsilon)^{n_j} \cdot |z-z_0|^{n_j} = \big(\underbrace{(L-\varepsilon)\cdot|z-z_0|}_{>1}\big)^{n_j} > 1\end{aligned}$$

joten termit eivät mene nollaan. Sarja ($\star$) ei voi supeta. Saadaan $R \leq \frac{1}{L}$. $\square$

Potenssisarjan derivoiminen

Tavoitteenamme on näyttää, että potenssisarja määrittelee analyyttisen funktion.
Sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ kompleksiseksi derivaataksi ainoa järkevä ehdokas on termeittäin derivoitu sarja

$$(\star)' \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot (z-z_0)^n,$$

(vrt. esim. polynomifunktion derivaatta)

joka sekin on potenssisarja. On silti vielä osoitettava, että tämä sarja suppenee siellä, missä derivaattaa tarvitaan ja että derivaatta tosiaan on olemassa ja termeittäin derivoidun sarjan antama.

Tulemme todistamaan seuraavan

Lause 3.23: Potenssisarjan $(\star)$ määrittelemällä funktiolla $z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ on jokaisessa suppenemiskiekkonsa pisteessä kompleksinen derivaatta, joka on sarjan

$$(\star)' : \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-z_0)^n$$

antama, ja sarjoilla $(\star)$ ja $(\star)'$ on sama suppenemissäde. Erityisesti potenssisarjan määrittelemä funktio on analyyttinen suppenemiskiekossa.

Potenssisarjan derivoiminen

Tavoitteenamme on näyttää, että potenssisarja määrittelee analyyttisen funktion. Sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ kompleksiseksi derivaataksi ainoa järkevä ehdokas on termeittäin derivoitu sarja $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot z^n$ (vrt. polynomifunktion derivaatta). Pitää silti vielä osoittaa, että tämäkin sarja suppenee ja että kompleksinen derivaatta todella on olemassa ja tämän sarjan antama.

Aloitetaan termeittäin derivoidun sarjan suppenemissäteestä ja suppenemiskiekosta.

Lemma Potenssisarjoilla $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ on sama suppenemissäde.

Tod: Merkitään $R = 1/\limsup_n |a_n|^{1/n}$ ensimmäisen potenssisarjan suppenemissädettä ja

$$R' = 1/\limsup_n \left((n+1)|a_{n+1}|\right)^{1/n}$$

toisen suppenemissädettä. Tavoitteena on osoittaa $R' = R$.

Osoitetaan ensin $R' \geq R$.

Olkoon $z \neq 0$ sellainen, että $|z| < R$.
Valitaan riittävän pieni $\varepsilon > 0$ siten, että

$$\rho := |z| \cdot \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right) < 1 .$$

Silloin on olemassa n_0 siten, että

$$|a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R} + \varepsilon \qquad \text{kun} \quad n \geq n_0 .$$

Toisen sarjan termejä voidaan silloin arvioida seuraavasti:

$$\left|(n+1) a_{n+1} z^n\right| = \frac{1}{|z|} (n+1) \cdot |a_{n+1}| \cdot |z|^{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{|z|} (n+1) \Big(\underbrace{\left(\tfrac{1}{R} + \varepsilon\right)|z|}_{= \rho < 1}\Big)^{n+1} \leq \frac{1}{|z|} \cdot (n+1) \rho^{n+1} .$$

kun $n \geq n_0$

Suhdetestillä

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{|z|}(n+2)\rho^{n+2}}{\frac{1}{|z|}(n+1)\rho^{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \rho\right) = \rho < 1 ,$$

joten sarja $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|z|}(n+1)\rho^{n+1}$ suppenee ja siten myös $\sum_{n=n_0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ suppenevat. Saadaan $R' \geq R$.

Osoitetaan, että $R' \leq R$.
Jos $|z| < R'$, niin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ suppenee itseisesti. Silloin

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^n$$

$$= |a_0| + \sum_{m=0}^{\infty} |a_{m+1}| \cdot |z|^{m+1}$$

$$\leq |a_0| + |z| \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) |a_{m+1}| \cdot |z|^m}_{< \infty} < \infty ,$$

joten $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenee itseisesti ja $R \geq R'$. □

Todistetaan sitten päätulos potenssisarjojen määrittelemistä funktioista.

Lause 3.23 Potenssisarjan määrittelemä funktio

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$$

on analyyttinen potenssisarjan suppenemiskiekossa $B(z_0,R)$. (tulkinta: $\dots = \emptyset$ jos $R=0$ ja $\dots = \mathbb{C}$ jos $R=\infty$)

Sen derivaatta on termeittäin derivoidun potenssisarjan määräämä funktio

$$f'(z) = g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z-z_0)^{n-1}.$$

Todistus: Muuttujanvaihdolla $(w = z - z_0)$ voidaan olettaa, että $z_0 = 0$, joten tehdään näin notaation keventämiseksi. Tarkastellaan siis funktioita

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$$

yhteisessä suppenemiskiekossaan $B(0,R)$.

Kun $N \in \mathbb{N}$, merkitään alkuperäisen sarjan osasummia ja jäännöstermiö

$$S_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n z^n, \quad T_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n.$$

Kun $|z| < R$, on $f(z) = S_N(z) + T_N(z)$.

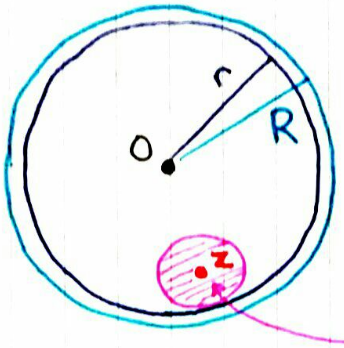
Osasumma $S_N(z)$ on polynomi, jonka derivaatta

$$S_N'(z) = \sum_{n=1}^{N} n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$$

on sarjan $g(z)$ osasumma.

Lasketaan funktion f derivaatta pisteessä $z \in B(0,R)$. Silloin $|z| < R$, joten voidaan valita r siten, että $|z| < r < R$ ja erotusosamäärässä riittää tarkastella pieniä muuttujan lisäyksiä $h \in \mathbb{C}$, joille

$$|h| < r - |z| .$$



$$B(z, r-|z|) \subset \overline{B}(0,r) \subset B(0,R)$$

valitaan $z+h$ riittävän lähellä pistettä z

suljettu r-säteinen osakiekko, jossa suppeneminen on tasaista

koko suppenemiskiekko

Verrataan erotusosamäärää väitettyyn derivaatan arvoon $g(z)$ ja ilmaistaan erotus kolmessa osassa

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z)$$

$$= \left(\frac{S_N(z+h) - S_N(z)}{h} - S_N'(z) \right) \qquad (\mathrm{I})$$

$$+ \left(S_N'(z) - g(z) \right) \qquad (\mathrm{II})$$

$$+ \left(\frac{T_N(z+h) - T_N(z)}{h} \right). \qquad (\mathrm{III})$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Näytetään, että kaikki kolme ylläolevaa termiä saadaan pieniksi kun h on pieni (ja N on ensin valittu tarpeeksi suureksi).

Termissä (III) käytetään identiteettiä
$(w-z)^n = (w-z)\cdot(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1})$
ja lasketaan

$$\left|\frac{T_N(z+h)-T_N(z)}{h}\right| = \left|\frac{1}{h}\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \underbrace{\left((z+h)^n - z^n\right)}_{=(w-z)\sum_{j=0}^{n-1} w^j z^{n-1-j},\ \text{missä } w=z+h}\right|$$

$$\leq \frac{1}{\cancel{|h|}}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|a_n|\cdot \cancel{|h|}\cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}}_{n \text{ termiä}} \underbrace{|z+h|}_{<r}{}^{j}\cdot \underbrace{|z|}_{<r}{}^{n-1-j}\right)$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\cdot n\cdot r^{n-1}.$$

Koska $r<R$, on tämä lauseke suppenevan sarjan "häntä", ja on olemassa N_1 siten, että

$$\text{(III)}: \quad \left|\frac{T_N(z+h)-T_N(z)}{h}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{kun } n \geq N_1 .$$

Termissä (II) on sarjan $g(z)$ ja sen osasumman $S_N'(z)$ erotus, joten sarjan $g(z)$ suppenemisen perusteella on olemassa N_2 siten, että

$$\text{(II)}: \quad \left|S_N'(z) - g(z)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{kun } n \geq N_2 .$$

Oletetaan siten, että $N \geq N_0 := \max(N_1, N_2)$.
Termi (I) on polynomin S_N derivaatan ja erotusosamäärän erotus ja koska polynomit ovat derivoituvia, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$(\mathrm{I}): \left| \frac{S_N(z+h) - S_N(z)}{h} - S_N'(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{kun } |h| < \delta.$$

Yhdistämällä kolmen termin arviot, kun $N \geq N_0 := \max(N_1, N_2)$ ja $|h| < \delta$, saadaan kolmioepäyhtälöllä

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| &\leq |(\mathrm{I})| + |(\mathrm{II})| + |(\mathrm{III})| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Siis $\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z)$ eli $f'(z) = g(z)$. □

Korollaari Potenssisarjan määrittelemällä funktiolla

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

on suppenemiskiekossa $B(z_0, R)$ kaikkien kertalukujen derivaatat.

Tod: Lauseesta 3.23 seuraa, että ensimmäinen derivaatta on olemassa ja potenssisarjan määrittelemä, joten siihen ja edelleen sen derivaattoihin voidaan induktiivisesti soveltaa Lausetta 3.23. □

Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ derivaatat pisteessä z_0 liittyvät sarjan kertoimiin yksinkertaisella tavalla:

$$f(z) = a_0 + a_1 \cdot (z-z_0) + a_2 \cdot (z-z_0)^2 + a_3 \cdot (z-z_0)^3 + \dots$$
$$f'(z) = 0 + 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot (z-z_0) + 3 \cdot a_3 \cdot (z-z_0)^2 + \dots$$
$$f''(z) = 0 + 0 + 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot (z-z_0) + \dots$$

jne.

$$\Longrightarrow f(z_0) = a_0, \quad f'(z_0) = a_1, \quad f''(z_0) = 2a_2, \dots, \quad f^{(n)}(z_0) = n! \cdot a_n.$$

Koska kertoimet $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ voidaan päätellä funktion $f(z)$ derivaatoista, saadaan erityisesti:

Lause (Yksikäsitteisyyslause) Jos funktio $f(z)$ voidaan epätyhjässä avoimessa kiekossa $B(z_0, r)$ esittää kahdella tavalla potenssisarjana

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (z-z_0)^n,$$

niin $a_n = b_n$ kaikilla $n = 0, 1, 2, \dots$.

Tod: $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = b_n$. $\square$

Lauseesta on vahvempikin versio, jossa oletus sarjojen arvojen yhtäsuuruudesta tarvitaan vain joukossa, jolle z_0 on kasaantumispiste.

Lause 3.25 Olkoot $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ja $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ kaksi potenssisarjaa, joilla on positiiviset suppenemissäteet. Jos on olemassa jono $z_1, z_2, z_3, \dots$ kompleksilukuja siten, että $z_k \neq z_0$ $\forall k = 1, 2, 3, \dots$, ja $z_k \to z_0$ kun $k \to \infty$ ja $f_1(z_k) = f_2(z_k)$ $\forall k = 1, 2, 3, \dots$, niin silloin $a_n = b_n$ $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

Kompleksinen eksponenttifunktio

Aiemman esimerkin perusteella potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ suppenemissäde on $R = +\infty$, joten se määrittelee koko kompleksitasossa analyyttisen funktion

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n .$$

Potenssisarjaa voi derivoida termeittäin, jolloin kompleksisen eksponenttifunktion derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \qquad \left(\begin{matrix}\text{muuttujan} \\ \text{vaihto}\end{matrix} \quad m = n-1\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m \quad = \exp(z) . \end{aligned}$$

Kompleksinen eksponenttifunktio siis toteuttaa tutun differentiaaliyhtälön $\exp' = \exp$ (koko kompleksitasossa).

Differentiaalilaskennassa reaalisen eksponenttifunktion sarjakehitelmä on samojen kerrointen määräämä ja kaikkialla reaaliakselilla suppeneva, joten kompleksinen eksponenttifunktio yhtyy reaaliseen osajoukossa $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$\exp(x) = e^x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} .$$

Muistutetaan mieliin myös reaalisten trigonometristen funktioiden kaikkialla suppenevat Taylor-sarjat

$$\cos(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \theta^{2m}$$

$$\sin(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \theta^{2m+1} .$$

Vertaamalla näitä ja kompleksista eksponenttifunktiota imaginaariakselilla, huomataan

$$\exp(i\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{(i\theta)^n}_{= i^n \cdot \theta^n = \begin{cases} \theta^n & \text{jos } n=4k \\ i\theta^n & \text{jos } n=4k+1 \\ -\theta^n & \text{jos } n=4k+2 \\ -i\theta^n & \text{jos } n=4k+3 \end{cases}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} \theta^{4k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} \theta^{4k+2}$$

$$+ i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!} \theta^{4k+1} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)!} \theta^{4k+3}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \theta^{2m} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \theta^{2m+1}$$

$$= \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta) .$$

Siis aiemmin napakoordinaatteja varten määrittelemämme notaatio $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ on konsistentti kompleksisen eksponenttifunktion kanssa ja jatkossa käytämme notaatioita

$$\exp(z) = e^{z} , \qquad z \in \mathbb{C} ,$$

ilman sekaannuksen vaaraa.

Kompleksisella eksponenttifunktiolla on myös tuttu ominaisuus $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

Tämän todistamiseksi määritelmästä lähtien tulee tutkia äärettömien sarjojen tuloja.

<u>Harjoitus</u> (Cauchy tulo)

Jos kompleksiset sarjat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ suppenevat ja ainakin toinen sarjoista suppenee itseisesti, niin

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot b_{m-k}\right).$$

Soveltamalla y.o. Cauchy tuloa eksponenttifunktion määritteleviin (itseisesti suppeneviin) sarjoihin, saadaan kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
e^z \cdot e^w &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{m-k}}{(m-k)!}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} z^k w^{m-k}}_{= (z+w)^m \quad \text{(binomikaava)}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (z+w)^m \\
&= e^{z+w}.
\end{aligned}$$

Nyt voidaan erityisesti kirjoittaa reaali- ja imaginaariosien avulla $(x, y \in \mathbb{R})$

$$\exp(x+iy) = \exp(x)\cdot\exp(iy)$$
$$= e^x \cdot (\cos(y) + i\cdot\sin(y))$$
$$= e^x\cdot\cos(y) + i\cdot e^x\cdot\sin(y).$$

Siis:

$$|\exp(x+iy)| = e^x \quad \text{ja}$$
$$\arg(\exp(x+iy)) \equiv y \pmod{2\pi}.$$

Trigonometriset funktiot

Kompleksiset trigonometriset funktiot sin ja cos määritellään eksponenttifunktion avulla

$$\cos(z) := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$
$$\sin(z) := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

(Rajoittumat reaaliakselille ovat silloin reaaliset trigonometriset funktiot

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta)) + (\underbrace{\cos(-\theta)}_{\cos(\theta)} + i\cdot\underbrace{\sin(-\theta)}_{-\sin(\theta)})\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\cdot\cos(\theta) + 0i\cdot\sin(\theta)\right)$$
$$\sin(\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta)) - (\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta))\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(0\cdot\cos(\theta) + 2i\cdot\sin(\theta)\right)$$

Logaritmifunktion haarat

Onko kompleksisella eksponenttifunktiolla käänteisfunktiota, kompleksista logaritmifunktiota?

Kompleksiluvun $w \in \mathbb{C}$ logaritmin määrittelemiseksi pyritään ratkaisemaan yhtälö

$$\exp(z) = w.$$

Koska $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)} > 0$, ei yhtälöllä ole yhtään ratkaisua $z \in \mathbb{C}$ siinä tapauksessa että $w = 0$. Tarkastellaan siis ainoastaan tapauksia $w \neq 0$, jolloin voidaan kirjoittaa napakoordinaateissa

$$w = \varrho \cdot e^{i\phi} \qquad \begin{aligned} \varrho &= |w| > 0 \\ \phi &= \arg(w) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vertaamalla napakoordinaateissa ilmaistuun eksponenttifunktion arvoon pisteessä $z = x + iy$

$$\exp(x+iy) = e^x \cdot e^{iy}$$

nähdään, että yhtälön $\exp(z) = w \neq 0$ ratkaisut ovat $z = x + iy$, missä

$$\begin{cases} e^x = \varrho := |w| & \text{eli} \quad x = \log|w| \\ y = \phi + 2\pi m & \text{jollakin } m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(Ratkaisuja on äärettömän monta, kun $w \neq 0$. Ne eroavat toisistaan luvun $2\pi i$ monikerroilla.)

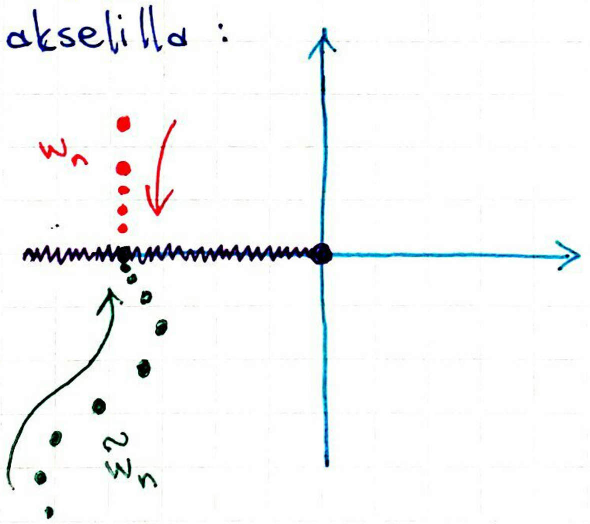
Ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, joten on taas tehtävä "haaran" valintoja. Kuten neliöjuurenkin kanssa, koko kompleksitasossa jatkuvaa käänteisfunktiota eksponenttifunktiolle ei ole mahdollista määritellä, joten eri yhteyksissä ja eri tarkoituksiin tehdään erilaisia haaran valintoja.

Valitsemalla argumentti väliltä $(-\pi, +\pi]$ saadaan eräs haara:

(kun $w = |w| \cdot e^{i\arg(w)} \neq 0$,
missä $-\pi < \arg(w) \leq +\pi$)

$$\mathrm{Log}(w) := \log|w| + i \cdot \arg(w)$$
$$\in \{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) \leq +\pi \}.$$

Epäjatkuvuus nähdään negatiivisella reaaliakselilla:



Oletetaan $(a > 0)$

$w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -a$

$\mathrm{Im}(w_n) > 0$

eli $\arg(w_n) \in (0, \pi)$

$\tilde{w}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -a$

$\mathrm{Im}(\tilde{w}_n) < 0$

eli $\arg(\tilde{w}_n) \in (-\pi, 0)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Log}(w_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\log|w_n| + i \arg(w_n) \right) = \log a + i\pi$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Log}(\tilde{w}_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\log|\tilde{w}_n| + i \arg(\tilde{w}_n) \right) = \log a - i\pi.$$

Joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tämä funktio Log on kuitenkin jatkuva, ja koska se toteuttaa

$$
\begin{aligned}
&\exp\big(\mathrm{Log}(w)\big) \\
&= \exp\big(\log|w| + i \cdot \arg(w)\big) \\
&= e^{\log|w|} \cdot e^{i \arg(w)} \\
&= |w| \cdot e^{i \arg(w)} \\
&= w,
\end{aligned}
$$

saadaan käänteisfunktion derivaattaa koskevasta propositiosta (ja ominaisuudesta $\exp' = \exp$) kun $z = \mathrm{Log}(w)$:

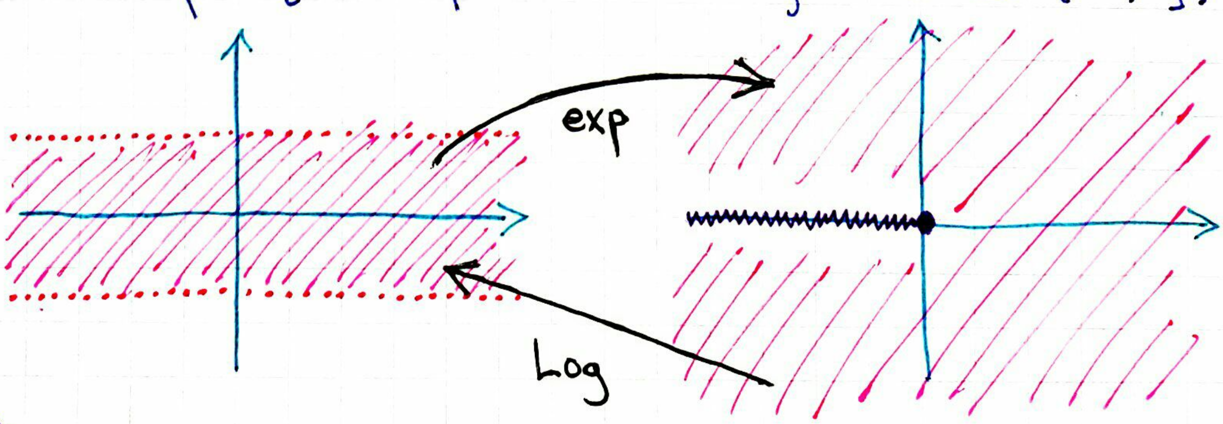
$$\mathrm{Log}'(w) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{w} .$$

Siis

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) < +\pi \}$$

on analyyttinen käänteisfunktio eksponenttifunktion rajoittumalle vaakasuoraan liuskaan

$$\exp : \{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) < +\pi \} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] .$$



MUITAKIN HAARAN VALINTOJA ON USEIN TARPEEN TEHDÄ !

INTEGROINTI

Määrittelemme seuraavaksi integrointiin liittyviä käsitteitä. Integrointi on keskeinen työkalu ja käsite kompleksianalyysin päätulosten taustalla.

Tällä luennolla määritellään:

1.) Reaaliakselin välillä $[a,b]$ määritellyn jatkuvan kompleksiarvoisen funktion

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

integraali välin yli:

$$\int_a^b f(t)\, dt .$$

2.) Kompleksitason joukossa $G \subset \mathbb{C}$ määritellyn jatkuvan kompleksiarvoisen funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

viivaintegraali (säännöllistä tai paloittain säännöllistä) polkua $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ pitkin

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

sekä vastaava viivaintegraali kaarenpituuden suhteen

$$\int_\gamma f(z) \cdot |dz|$$

3.) Alueessa $G \subset \mathbb{C}$ määritellyn funktion $f : G \to \mathbb{C}$ integraalifunktio $F : G \to \mathbb{C}$.

(Tutkimme erityisesti millä ehdoilla funktiolla f on olemassa integraalifunktio.)

Kompleksiarvoisen funktion integraali

Olkoon $[a,b] \subset \mathbb{R}$ suljettu reaaliakselin väli ja

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

tällä välillä määritelty jatkuva kompleksiarvoinen funktio. Kirjoitetaan

$$u(t) = \mathrm{Re}\,(f(t)) \quad \text{ja} \quad v(t) = \mathrm{Im}\,(f(t)) \quad \text{kun } t \in [a,b]$$

jolloin $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvia reaaliarvoisia funktioita ja $f(t) = u(t) + i \cdot v(t)$.

Määritelmä 3.1 Jatkuvan kompleksiarvoisen reaalimuuttujan funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ integraali on

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b u(t)\, dt + i \cdot \int_a^b v(t)\, dt .$$

(Toisin sanoen

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\, dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(t))\, dt \quad \text{ja}$$

$$\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\, dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}\,(f(t))\, dt .\text{)}$$

Näin määritelty integraali on $\mathbb{C}$-lineaarinen.

Lause 3.1 (Integraalin $\mathbb{C}$-lineaarisuus)

(a): Jos $f_1, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ovat jatkuvia, niin

$$\int_a^b (f_1(t) + f_2(t))\, dt = \int_a^b f_1(t)\, dt + \int_a^b f_2(t)\, dt .$$

⋮

(b) Jos $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ on jatkuva, niin
$$\int_a^b (\lambda \cdot f(t))\, dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\, dt .$$

<u>Todistus</u> Kohta (a) seuraa suoraan reaalisten integraalien $\mathbb{R}$-lineaarisuudesta tarkastelemalla reaali- ja imaginaariosia erikseen.

Kohtaa (b) varten kirjoitetaan $f(t) = u(t) + i\, v(t)$ ja $\lambda = \xi + i\eta$. Reaaliosia varten lasketaan

$\xi, \eta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\lambda \cdot f(t)) &= \mathrm{Re}\left[(\xi + i\eta)\cdot(u(t) + i\, v(t))\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\xi \cdot u(t) - \eta \cdot v(t) + i(\xi \cdot v(t) + \eta \cdot u(t))\right] \\
&= \xi \cdot u(t) - \eta \cdot v(t),
\end{aligned}$$

josta saadaan
$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left[\int_a^b (\lambda \cdot f(t))\, dt\right] &= \int_a^b \mathrm{Re}(\lambda \cdot f(t))\, dt \\
&= \int_a^b (\xi \cdot u(t) - \eta \cdot v(t))\, dt \\
&\overset{\circledast}{=} \xi \cdot \int_a^b u(t)\, dt - \eta \cdot \int_a^b v(t)\, dt .
\end{aligned}$$

$\circledast$ reaalisen integraalin $\mathbb{R}$-lineaarisuus.

Toisaalta
$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left[\lambda \cdot \int_a^b f(t)\, dt\right] &= \mathrm{Re}\left[(\xi + i\eta)\left(\int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt\right)\right] \\
&= \xi \cdot \int_a^b u(t)\, dt - \eta \cdot \int_a^b v(t)\, dt ,
\end{aligned}$$

joten saatiin $\mathrm{Re}\left[\int_a^b (\lambda \cdot f(t))\, dt\right] = \mathrm{Re}\left[\lambda \cdot \int_a^b f(t)\, dt\right]$.

Samaan tapaan näytetään imaginaariosien yhtäsuuruus, ja näistä yhdessä saadaan
$$\int_a^b (\lambda \cdot f(t))\, dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\, dt .$$

$\square$

Merkitään derivaattoja reaalisen parametrin $t \in [a,b]$ suhteen pisteellä funktion päällä, esim.

$$f : [a,b] \to \mathbb{C} \qquad f(t) = u(t) + i \cdot v(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) := \frac{d}{dt} f(t) &= \frac{d}{dt} u(t) + i \frac{d}{dt} v(t) \\ &= \dot{u}(t) + i \cdot \dot{v}(t). \end{aligned}$$

Tavallista derivaattapilkkua käytetään kompleksitason avoimessa osajoukossa määritellyn funktion kompleksiselle derivaatalle.

Reaalisten integraalien analyysin peruslauseesta saadaan derivaatan integrointikaava:

$$\int_a^b \dot{f}(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

Viivaintegraalit kompleksitasossa

Määritelmä: Parametrisoitu polku

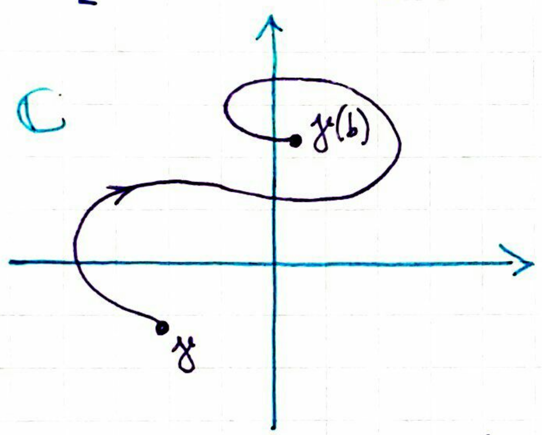
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

on <u>säännöllinen</u>, jos

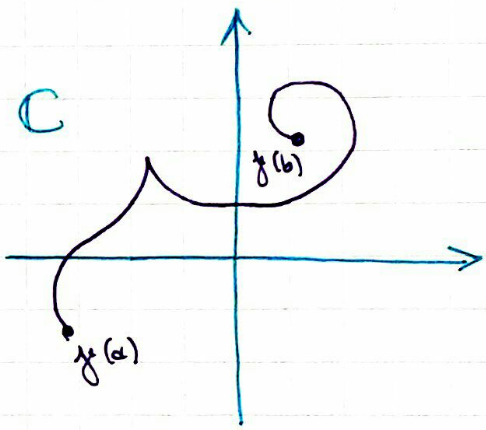
(i) $\forall t \in [a,b]$ derivaatta $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t) \in \mathbb{C}$ on olemassa (päätepisteissä toispuoleiset derivaatat)

(ii) derivaatta $\dot{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva

(iii) $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$.



(säännöllinen polku: tangenttivektori $\dot{\gamma}(t)$ hyvin määritelty, jatkuva, nollasta eroava)



(esimerkki ei-säännöllisestä polusta)

Olkoon nyt $G \subset \mathbb{C}$ alue, $\gamma : [a,b] \to G$ säännöllinen polku alueessa G, ja $f : G \to \mathbb{C}$ jatkuva kompleksiarvoinen funktio alueessa G.

Määritelmä 3.2 Jatkuvan kompleksiarvoisen kompleksimuuttujan funktion $f : G \to \mathbb{C}$ <u>viivaintegraali</u> säännöllistä polkua $\gamma : [a,b] \to G$ pitkin on

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt .$$

Huom: Oikea puoli on välillä $[a,b]$ määritellyn jatkuvan kompleksiarvoisen funktion

$$t \longmapsto f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$$

integraali.

Notaation idea: Pisteet z ovat polulla,

$z = \gamma(t) \in G$ ja funktio $f : G \to \mathbb{C}$

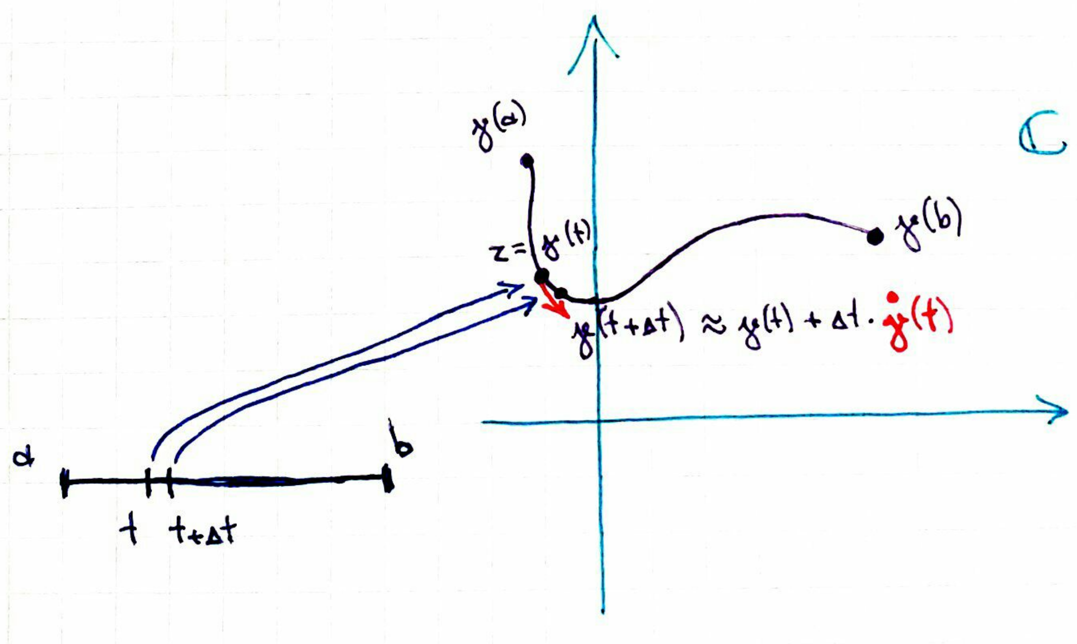
on siis määritelty tällaisessa pisteessä,

$$f(z) = f(\gamma(t)).$$

Differentiaali dz vastaa pientä muutosta pisteen z sijainnissa polkua pitkin tangenttivektorin suuntaan

$$\text{"} dz = \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\text{tangentti-vektori}} \cdot \underbrace{dt}_{\text{parametrin } t \text{ pieni lisäys}} . \text{"}$$

Ylläolevat kaavat toivottavasti havainnollistavat määritelmän ja notaation ideaa.
Niillä on myös täsmällinen merkitys differentiaaleina, mutta jätämme siihen tutustumisen kunkin oman kiinnostuksen varaan.



Propositio: Jos $f(z) = u(z) + i \cdot v(z)$ $\quad (u,v : G \to \mathbb{R})$

ja $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ $\quad (x,y : [a,b] \to \mathbb{R})$,

niin

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \Big(u(\gamma(t))\,\dot{x}(t) - v(\gamma(t))\,\dot{y}(t) \Big)\,dt$$
$$+ i \cdot \int_a^b \Big(v(\gamma(t))\,\dot{x}(t) + u(\gamma(t))\,\dot{y}(t) \Big)\,dt$$

Notaation muistisääntö:

$$\text{"} dz = dx + i\,dy \text{"} \qquad \text{ja}$$

$$\text{"} f(z)\,dz = \big(u(z) + i\,v(z)\big)\big(dx + i \cdot dy\big)$$
$$= \big(u(z)\,dx - v(z)\,dy\big) + i \cdot \big(v(z)\,dx + u(z)\,dy\big) \text{"}$$

ja "$dx = \dot{x}(t)\,dt$", "$dy = \dot{y}(t)\,dt$"!

Proposition todistus: Määritelmästä lähtien lasketaan

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{\substack{= u(\gamma(t)) \\ + i \cdot v(\gamma(t))}} \; \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\substack{= \dot{x}(t) \\ + i \cdot \dot{y}(t)}} \,dt$$

$$= \int_a^b \Big(u(\gamma(t))\,\dot{x}(t) - v(\gamma(t))\,\dot{y}(t) + i\,v(\gamma(t))\,\dot{x}(t) + i\,u(\gamma(t))\,\dot{y}(t) \Big)\,dt$$

kompleksiarvoisen funktion integraalin määritelmä

$$= \int_a^b \Big(u(\gamma(t))\,\dot{x}(t) - v(\gamma(t))\,\dot{y}(t) \Big)\,dt$$
$$+ i \cdot \int_a^b \Big(v(\gamma(t))\,\dot{x}(t) - u(\gamma(t))\,\dot{y}(t) \Big)\,dt. \qquad \square$$

Määritelmä 3.3 Jatkuvan kompleksiarvoisen kompleksimuuttujan funktion $f : G \to \mathbb{C}$ integraali kaarenpituuden suhteen säännöllistä polkua $\gamma : [a,b] \to G$ pitkin on

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\dot{\gamma}(t)|\,dt.$$

Polun γ pituus on (valitaan $f(z) \equiv 1$)

$$\ell(\gamma) := \int_\gamma 1 \cdot |dz| = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt.$$

Notaation idea: Jos $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$, niin kuten aiemmin tulkitsemme

$$\text{"}dz = \underbrace{\dot{\gamma}(t)}\,dt = \underbrace{(\dot{x}(t) + i\cdot\dot{y}(t))}\,dt\text{"}$$

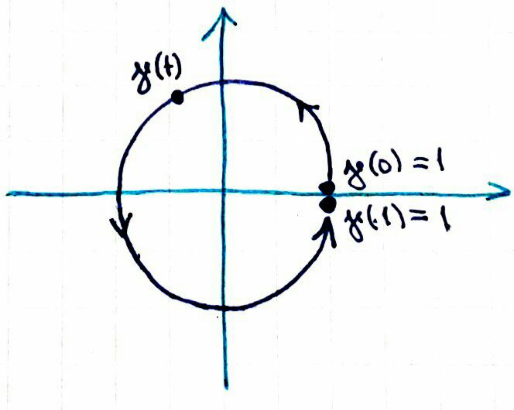
tangentti-vektori

ja

$$\text{"}|dz| = \underbrace{|\dot{\gamma}(t)|}\,dt = \underbrace{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} \cdot dt.\text{"}$$

tangentti-vektorin pituus

Esimerkki Polku $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{i2\pi t}$, parametrisoi yksikköympyrän positiiviseen kiertosuuntaan (vastapäivään).



Polun derivaatta on

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} e^{i2\pi t} = \frac{d}{dt}\left(\cos(2\pi t) + i \cdot \sin(2\pi t)\right)$$

$$= -2\pi \cdot \sin(2\pi t) + i \cdot 2\pi \cdot \cos(2\pi t)$$

$$= i \cdot 2\pi \cdot \left(\cos(2\pi t) + i \cdot \sin(2\pi t)\right)$$

$$= i \cdot 2\pi \cdot e^{i2\pi t},$$

joten polun pituudeksi saadaan y.o. määritelmällä

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot |dz| = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left| i \cdot 2\pi \cdot e^{i2\pi t} \right|}_{= |i| \cdot 2\pi \cdot |e^{i2\pi t}| = 2\pi} dt$$

$$= 2\pi \int_0^1 dt$$

$$= 2\pi .$$

Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ $\left(f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \right)$ viivaintegraaliksi tätä polkua pitkin saadaan

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 e^{-i2\pi t} \cdot \left(i \cdot 2\pi e^{i2\pi t} \right) dt$$

$$= \int_0^1 i \cdot 2\pi \cdot dt$$

$$= 2\pi \cdot i .$$

Kompleksisille viivaintegraaleille on voimassa seuraava "kolmioepäyhtälö".

Lause 3.4

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)| \cdot |dz| .$$

Todistus: Jos $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, niin väite on selvä, joten voidaan olettaa $\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0$.

Merkitään $\phi = \arg\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right)$.

Mille tahansa kompleksiluvulle $w \neq 0$ pätee $|w| = e^{-i\cdot \arg(w)} \cdot w$ (koska $w = |w| e^{i \arg(w)}$), joten saadaan

$$\begin{aligned}
\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| &= e^{-i\phi} \int_\gamma f(z)\,dz \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{-i\phi} \int_\gamma f(z)\,dz \right) \qquad \text{(koska moduli on reaalinen)} \\
&= \operatorname{Re}\left[e^{-i\phi} \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt \right] \\
&= \int_a^b \underbrace{\operatorname{Re}\left(e^{-i\phi} \cdot f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \right)}_{\leq \left| e^{-i\phi} f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t) \right| = |f(\gamma(t))| \cdot |\dot{\gamma}(t)|} dt \\
&\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\dot{\gamma}(t)| \cdot dt \\
&= \int_\gamma |f(z)| \cdot |dz| .
\end{aligned}$$

□

Erityisen käyttökelpoinen erikoistapaus ylläolevasta on:

Lause 3.5: Jos $|f(z)| \leq M$ kaikilla z polulla γ, niin

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq M \cdot \ell(\gamma) .$$

Viivaintegraalit ovat $\mathbb{C}$-lineaarisia.

Propositio (Lause 3.3. (1-2)) Olkoon $\gamma : [a,b] \to G \subset \mathbb{C}$ säännöllinen polku.

(a): Jos $f_1, f_2 : G \to \mathbb{C}$ ovat jatkuvia, niin

$$\int_\gamma (f_1(z) + f_2(z))\, dz = \int_\gamma f_1(z)\, dz + \int_\gamma f_2(z)\, dz$$

ja

$$\int_\gamma (f_1(z) + f_2(z))\, |dz| = \int_\gamma f_1(z)\, |dz| + \int_\gamma f_2(z)\, |dz|.$$

(b) Jos $f : G \to \mathbb{C}$ on jatkuva ja $\lambda \in \mathbb{C}$, niin

$$\int_\gamma (\lambda \cdot f(z))\, dz = \lambda \cdot \int_\gamma f(z)\, dz$$

ja

$$\int_\gamma (\lambda \cdot f(z))\, |dz| = \lambda \cdot \int_\gamma f(z)\, |dz|.$$

Todistus palautuu Lauseeseen 3.1.

Parametrisoidulla polulla $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ on erityisesti luonnollinen suunnistus: piste $\gamma(a)$ on polun alkupiste ja $\gamma(b)$ sen päätepiste ja polun pisteiden kautta kuljetaan parametrisaation määräämässä järjestyksessä.

Voidaan määritellä myös vastakkainen ("peruuttaen etenevä") parametrisoitu polku

$$\overleftarrow{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}$$

$$\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t),$$

jonka alkupiste on $\overleftarrow{\gamma}(a) = \gamma(b)$ ja päätepiste $\overleftarrow{\gamma}(b) = \gamma(a)$.

Propositio (Lause 3.3.(3))

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz \quad \text{ja}$$

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)\, |dz| = \int_{\gamma} f(z)\, |dz| .$$

Huom: Polun suunnistuksen kääntäminen muuttaa viivaintegraalin merkin, mutta pitää viivaintegraalin kaarenpituuden suhteen ennallaan.

Jätetään suoraviivainen todistus harjoitukseksi.

Keskeinen viivaintegraalien ominaisuus on, että ne eivät riipu parametrisaation valinnasta, kuhan suunnistus säilytetään.

Lause (Lause 3.3.(5))

Olkoot $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ja $\tilde{\gamma} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ kaksi säännöllistä polkua siten, että

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s(t)) \qquad \forall t \in [a,b],$$

missä $s : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ on kasvava jatkuvasti derivoituva bijektio. (s on "suunnistuksen säilyttävä uudelleenparametrisointi")

Silloin jatkuville funktioille $f : G \to \mathbb{C}$, jotka on määritelty näillä poluilla pätee

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz .$$

Todistus: Ketjusäännöllä saadaan

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(s(t))$$
$$= \dot{s}(t)\cdot \dot{\tilde{\gamma}}(s(t)) .$$

Erityisesti $\dot{s}(t) \neq 0$, koska γ on säännöllinen.
Lasketaan viivaintegraali polkua γ pitkin:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt$$
$$= \int_a^b f(\tilde{\gamma}(s(t)))\cdot \dot{\tilde{\gamma}}(s(t))\cdot \dot{s}(t)\, dt .$$
$$= \int_\alpha^\beta f(\tilde{\gamma}(s))\cdot \dot{\tilde{\gamma}}(s)\, ds \qquad \left(\begin{array}{l}\text{muuttujan-}\\ \text{vaihto} \quad s = s(t)\end{array}\right)$$
$$= \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz,$$

missä teimme muuttujanvaihdon ja huomasimme $s(a) = \alpha$, $s(b) = \beta$, koska s on kasvava bijektio. $\square$

Ylläolevat tulokset yleistyvät seuraavaan tapaan myös poluille, jotka ovat vain paloittain säännöllisiä.

<u>Määritelmä</u> Polku $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ on paloittain säännöllinen, jos on olemassa $m \in \mathbb{N}$ ja

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1} < a_m = b$$

siten, että rajoittumat

$$\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \left(\gamma_k(t) := \gamma(t) \right)$$

ovat säännölliset kaikilla $k = 1, 2, \dots, m$.

Funktion f viivaintegraali paloittain säännöllistä polkua pitkin määritellään summana säännöllisistä paloista

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz .$$

<u>Huom</u>: Säännöllinenkin polku $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ on paloittain säännöllinen. Millä tahansa jaolla

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = b$$

pätee

$$\int_a^b f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt ,$$

joten ylläoleva viivaintegraalin

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

määritelmä on sopusoinnussa aiemman määritelmän kanssa (viivaintegraali ei riipu siitä tulkitsemmeko säännöllisen polun säännölliseksi vai paloittain säännölliseksi).

Paloittain säännöllisiä polkuja voi "liimata yhteen" eli konkatenoida:

jos $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$

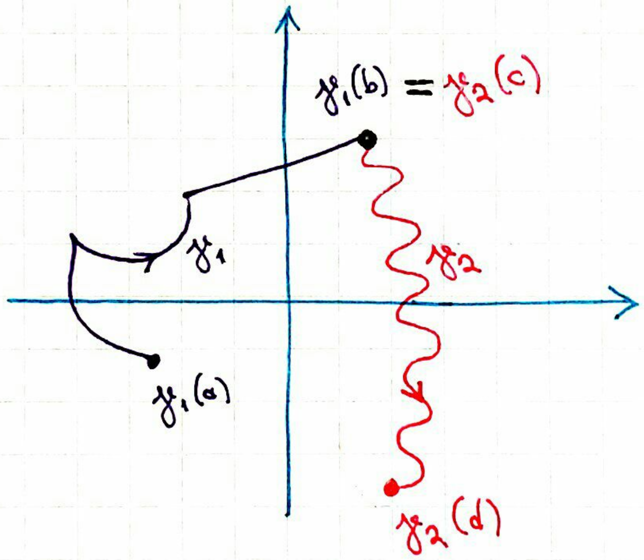
ja $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ ovat paloittain

säännöllisiä ja $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, niin konkatenaatio

$$\gamma_1\gamma_2 : [0, b-a+d-c] \to \mathbb{C}$$

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(a+t) & \text{, kun } 0 \le t \le b-a \\ \gamma_2(c+t-(b-a)) & \text{, kun } b-a \le t \le b-a+d-c \end{cases}$$

on paloittain säännöllinen polku



(polkujen konkatenaatio)

Paloittain säännöllisille poluille pätee edelleen mm.

- $$\int_\gamma (\lambda_1 \cdot f_2(z) + \lambda_2 \cdot f_2(z))\, dz = \lambda_1 \cdot \int_\gamma f_1(z)\, dz + \lambda_2 \cdot \int_\gamma f_2(z)\, dz$$
  $$(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})$$
- $$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$$
- viivaintegraali pysyy ennallaan suunnistuksen säilyttävässä uudelleenparametrisoinnissa
- jne.

Integraalifunktion olemassaolosta

Määritelmä 3.4 Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ alue ja $f : G \to \mathbb{C}$ funktio. Funktio $F : G \to \mathbb{C}$ on funktion f integraalifunktio alueessa G, jos F on analyyttinen ja pätee

$$F'(z) = f(z) \qquad \forall z \in G.$$

Lause 3.6: Jos funktiolla f on integraalifunktio alueessa G, niin integraalifunktio on vakiota vaille yksikäsitteinen.

Tod.: Havaitaan ensin, että jos F on funktion f integraalifunktio ja $c \in \mathbb{C}$ on vakio, niin funktio

$$\tilde{F}(z) = F(z) + c$$

toteuttaa myös $\tilde{F}'(z) = F'(z) = f(z)$, joten sekin on funktion f integraalifunktio.

Toisaalta, jos F_1 ja F_2 ovat kaksi funktion f integraalifunktiota, eli $F_1'(z) = f(z)$ ja $F_2'(z) = f(z)$, niin näiden erotuksen derivaatta on

$$(F_1 - F_2)'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

Koska $G \subset \mathbb{C}$ on alue (avoin ja yhtenäinen), tästä seuraa, että $F_1 - F_2$ on vakiofunktio. Siis $F_1(z) - F_2(z) = c \in \mathbb{C} \quad \forall z \in G$ eli $F_1(z) = F_2(z) + c$. $\square$

Esimerkkejä

(i): Olkoon $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Potenssifunktiolla $f(z) = z^n$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on koko kompleksitasossa integraalifunktio

$$F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1} + c \,,$$

koska $F'(z) = z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

(ii): Olkoon $n \in \{-2, -3, -4, \ldots\}$.

Potenssifunktiolla $f(z) = z^n$, $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ on punkteeratussa tasossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ integraalifunktio

$$F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1} + c \,,$$

koska $F'(z) = z^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(Huom: Alla tulemme näkemään, että funktiolla $f(z) = z^{-1} = \frac{1}{z}$, $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ei ole punkteeratussa tasossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ integraalifunktiota.)

(iii): Eksponenttifunktiolla $f(z) = \exp(z)$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on koko kompleksitasossa integraalifunktio

$$F(z) = \exp(z) + c \,,$$

koska $F'(z) = \exp(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Huomautus 3.5: Integraalifunktio on välttämättä jatkuva, koska se on (määritelmän mukaan) analyyttinen.

<u>Propositio</u>: Jos jatkuvalla funktiolla $f : G \to \mathbb{C}$ on integraalifunktio $F : G \to \mathbb{C}$ ja $\gamma : [a,b] \longrightarrow G$ on paloittain säännöllinen polku pisteestä $z_1 = \gamma(a)$ pisteeseen $z_2 = \gamma(b)$, niin viivaintegraalille pätee

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1).$$

<u>Tod.</u>: Oletetaan ensin, että $\gamma : [a,b] \to G$ on säännöllinen. Koska $F'(z) = f(z)$, saadaan ketjusäännöllä

$$\frac{d}{dt}\big(F(\gamma(t))\big) = \dot\gamma(t) \cdot F'(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t).$$

Lasketaan viivaintegraali tätä käyttäen:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\big(F(\gamma(t))\big)\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1).$$

Jos polku $\gamma : [a,b] \to G$ on paloittain säännöllinen, eli joillakin

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1} < a_m = b$$

rajoittumat $\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \to G$ ovat säännölliset, niin käyttäen ylläolevaa säännöllisille osille saadaan

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^m \big(F(\gamma(a_k)) - F(\gamma(a_{k-1})) \big) = F(\gamma(a_m)) - F(\gamma(a_0)) = F(z_2) - F(z_1). \qquad \square$$

Polun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sanotaan olevan umpinainen, jos sen alkupiste ja päätepiste ovat samat, eli $\gamma(a) = \gamma(b)$. Integroinnissa polun umpinaisuutta usein korostetaan merkitsemällä viivaintegraalia

$$\underbrace{\oint_\gamma f(z)\,dz}_{\text{Notaatio viivaintegraalille umpinaista polkua pitkin.}} := \int_\gamma f(z)\,dz .$$

<u>Korollaari</u> Jos jatkuvalla funktiolla $f : G \to \mathbb{C}$ on integraalifunktio, niin sen viivaintegraalit paloittain säännöllisiä umpinaisia polkuja pitkin häviävät:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \text{kaikilla umpinaisilla } \gamma : [a,b] \to G.$$

<u>Tod</u>: Integraalifunktion $F : G \to \mathbb{C}$ avulla voidaan edellisen proposition perusteella laskea

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}_{\substack{\text{koska } \gamma(b)=\gamma(a), \\ \text{termit menevät} \\ \text{vastakkain.}}} = 0 .$$

$\square$

<u>Esimerkki</u>: Polku $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{i2\pi t}$, on umpinainen, koska $\gamma(0) = 1$ ja $\gamma(1) = e^{i2\pi} = 1$. Aiemmin laskettiin funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ viiva-integraaliksi

$$\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0 ,$$

joten funktiolla $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ei voi olla integraalifunktiota joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Integraalifunktion olemassaolosta

Muistutus: Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ integraalifunktio alueessa G on analyyttinen funktio $F: G \to \mathbb{C}$, jolle pätee $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in G$.

(Integraalifunktiota kutsutaan kirjallisuudessa myös antiderivaataksi tai primitiiviksi.)

Osoitimme integraalifunktioiden ja viivaintegraalien välillä olevan seuraavan yhteyden:

Propositio: Jos jatkuvalla funktiolla $f: G \to \mathbb{C}$ on alueessa G integraalifunktio $F: G \to \mathbb{C}$, niin viivaintegraalin arvo riippuu vain (paloittain säännöllisen) integroimispolun $\gamma: [a,b] \to G$ alku- ja loppupisteistä $z_1 = \gamma(a)$ ja $z_2 = \gamma(b)$:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Erityisesti umpinaisille poluille, eli poluille γ joiden alku- ja loppupisteet ovat samat

$$z_1 = z_2 \quad \text{eli} \quad \gamma(a) = \gamma(b)$$

tästä saatiin seuraus:

Korollaari: Jos funktiolla $f: G \to \mathbb{C}$ on alueessa G integraalifunktio, niin kaikille alueen G umpinaisille (paloittain säännöllisille) poluille γ pätee

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

On siis saatu kaksi välttämätöntä ehtoa integraalifunkion olemassaololle:

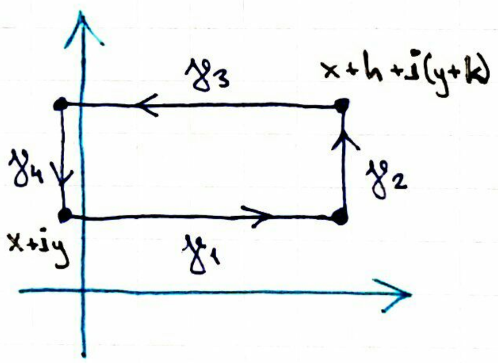
- viivaintegraali $\int_\gamma f(z)\,dz$ riippuu vain polun γ päätepisteistä z_1 ja z_2
- umpinaisille poluille γ pätee $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Aiemman esimerkin mukaan funktio

$$f(z) = \frac{1}{z} \qquad f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

ei toteuta jälkimmäistä näistä välttämättömistä ehdoista, joten sillä ei voi olla integraalifunktiota alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (punkteerattu taso).

Toinen esimerkki koko tasossa $\mathbb{C}$ on seuraava.



Esim: Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = \bar{z}, \qquad f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

Tarkastellaan paloittain säännöllistä polkua γ joka on konkatenaatio

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$$

neljästä janasta, jotka muodostavat suorakaiteen sivut

$$[x+iy,\ x+h+iy]: \quad \gamma_1(t) = x+iy+th \quad (t \in [0,1])$$

$$[x+h+iy,\ x+h+i(y+k)]: \quad \gamma_2(t) = x+h+iy+itk \quad (t \in [0,1])$$

$$[x+h+i(y+k),\ x+i(y+k)]: \quad \gamma_3(t) = x+h+i(y+k)-th \quad (t \in [0,1])$$

$$[x+i(y+k),\ x+iy]: \quad \gamma_4(t) = x+i(y+k)-itk \quad (t \in [0,1]).$$

Funktion $z \mapsto \bar{z}$ integraali yleisellä janalla $[w_1, w_2]$: $\gamma_{[w_1,w_2]}(t) = w_1 + (w_2 - w_1)t$, $t \in [0,1]$

on

$$\int_{\gamma_{[w_1,w_2]}} \bar{z} \cdot dz = \int_0^1 \overline{\gamma_{[w_1,w_2]}(t)} \cdot \dot{\gamma}_{[w_1,w_2]}(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \overline{(w_1 + (w_2-w_1)t)} \cdot (w_2 - w_1)\, dt$$

$$= \bar{w}_1 (w_2 - w_1) \underbrace{\int_0^1 dt}_{=1} + (\bar{w}_2 - \bar{w}_1)(w_2 - w_1) \underbrace{\int_0^1 t \cdot dt}_{=1/2}$$

$$= \bar{w}_1 (w_2 - w_1) + \frac{1}{2} (\bar{w}_2 - \bar{w}_1)(w_2 - w_1)$$

$$= (w_2 - w_1) \frac{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}{2} .$$

Koko paloittain säännöllisellä umpinaisella polulla $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ viivaintegraaliksi saadaan:

$$\oint_\gamma \bar{z} \cdot dz = \int_{\gamma_1} \bar{z} \cdot dz + \int_{\gamma_2} \bar{z} \cdot dz + \int_{\gamma_3} \bar{z} \cdot dz + \int_{\gamma_4} \bar{z} \cdot dz$$

$$= h \cdot \left(x - iy + \frac{h}{2}\right) + ik \cdot \left(x + h - iy - i\frac{k}{2}\right)$$
$$- h \cdot \left(x - iy - ik + \frac{h}{2}\right) - ik\left(x - iy - i\frac{k}{2}\right)$$

$$= 2i \cdot hk \quad \neq 0 .$$

(Tulos on $2i$ kertaa ympäröidyn suorakaiteen pinta-ala. Yleisemminkin osoittautuu, että jos γ on umpinainen polku, joka ympäröi alueen G positiiviseen kiertosuuntaan, niin viivaintegraali $\oint_\gamma \bar{z} \cdot dz$ on $2i$ kertaa alueen G pinta-ala.)

Erityisesti, funktiolla $f(z) = \bar{z}$ ei voi olla integraalifunktiota kompleksitasossa $\mathbb{C}$, koska ylläoleva välttämätön ehto ei ole voimassa.

Ylläolevat kaksi välttämätöntä ehtoa ovat itseasiassa keskenään yhtäpitäviä.

<u>Lemma</u> Funktiolle $f: G \to \mathbb{C}$ alueessa $G \subset \mathbb{C}$ seuraavat ovat yhtäpitäviä

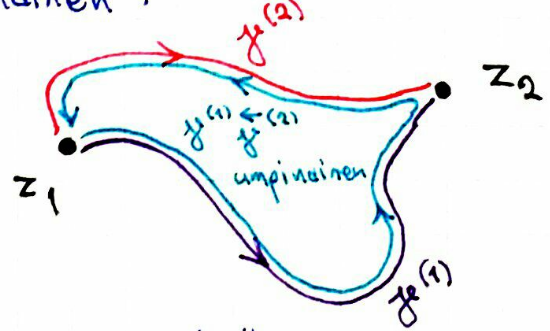
(i) viivaintegraali $\int_\gamma f(z)\,dz$ riippuu vain paloittain säännöllisen polun $\gamma : [a,b] \to G$ päätepisteistä $z_1 := \gamma(a)$ ja $z_2 := \gamma(b)$.

(ii) kaikille umpinaisille poluille $\gamma : [a,b] \to G$ viivaintegraali häviää: $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

<u>Todistus</u>: On osoitettava implikaatiot molempiin suuntiin.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Oletetaan, että $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ kaikilla umpinaisilla poluilla γ.

Olkoot sitten $\gamma^{(1)}$ ja $\gamma^{(2)}$ kaksi polkua, joilla on sama alkupiste z_1 ja loppupiste z_2. Huomataan, että polku $\gamma = \gamma^{(1)} \overleftarrow{\gamma}^{(2)}$ joka saadaan konkatenoimalla polkuun $\gamma^{(1)}$ polun $\gamma^{(2)}$ vastakkaissuuntainen polku $\overleftarrow{\gamma}^{(2)}$, on umpinainen:



Oletuksen perusteella

$$0 = \oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_{\gamma^{(1)} \overleftarrow{\gamma}^{(2)}} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\gamma^{(1)}} f(z)\,dz - \int_{\gamma^{(2)}} f(z)\,dz .$$

Siis $\int_{\gamma^{(1)}} f(z)\,dz = \int_{\gamma^{(2)}} f(z)\,dz$, joten ominaisuus (i) on voimassa.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Oletetaan, että viivaintegraalit riippuvat vain päätepisteistä.

Jos $\gamma : [a,b] \to G$ on umpinainen polku, niin valitsemalla mikä tahansa $c \in (a,b)$ ja tarkastelemalla osapolkua (alusta keskelle)

$$\gamma^{(1)} : [a,c] \to G$$

ja osapolun (keskeltä loppuun)

$$\gamma^{(2)} : [c,b] \to G$$

vastakkaista polkua $\overleftarrow{\gamma}^{(2)}$ saadaan polut $\gamma^{(1)}$ ja $\overleftarrow{\gamma}^{(2)}$, joilla on samat päätepisteet ja siis

$$\int_{\gamma^{(1)}} f(z)\,dz = \int_{\overleftarrow{\gamma}^{(2)}} f(z)\,dz .$$

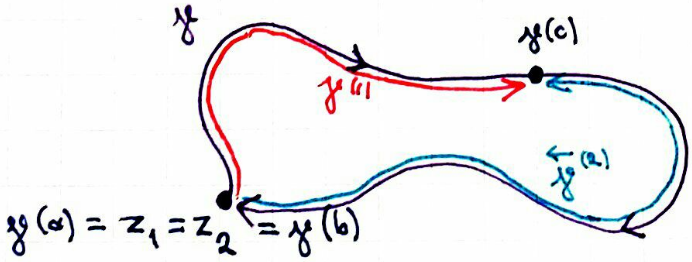
Koko umpinaista polkua $\gamma = \gamma^{(1)}\gamma^{(2)}$ pitkin laskettu viivaintegraali on silloin

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\gamma^{(1)}} f(z)\,dz + \int_{\gamma^{(2)}} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\gamma^{(1)}} f(z)\,dz - \int_{\overleftarrow{\gamma}^{(2)}} f(z)\,dz = 0.$$

Siis ominaisuus (ii) on voimassa. $\square$



Ylläolevat välttämättömät ehdot integraalifunktion olemassaololle ovat itseasiassa myös riittävät ehdot:

<u>Lemma</u> Jos alueessa $G \subset \mathbb{C}$ määritellyn jatkuvan funktion $f: G \to \mathbb{C}$ viivaintegraalit $\int_\gamma f(z)\,dz$ riippuvat vain polun γ päätepisteistä, niin funktiolla f on integraalifunktio alueessa G.

<u>Todistus</u>: Oletetaan, että $\int_\gamma f(z)\,dz$ riippuu vain alku- ja loppupisteistä $\gamma(a)$ ja $\gamma(b)$.

Valitaan jokin piste $w_0 \in G$ ja määritellään funktio $F: G \to \mathbb{C}$ siten, että arvoksi pisteessä $w \in G$ asetetaan viivaintegraali

$$F(w) := \int_{\gamma_w} f(z)\,dz ,$$

missä polun γ_w alkupiste on w_0 ja päätepiste w (tällainen polku pisteiden välillä on olemassa yhtenäisyyden perusteella). Oletuksen mukaan arvo ei riipu siitä, mikä polku γ_w valitaan, joten $F: G \to \mathbb{C}$ on hyvin määritelty.

Haluamme seuraavaksi osoittaa, että $F'(w) = f(w)$, eli että F on funktion f integraalifunktio.

Kiinnitetään tarkasteltava piste $w \in G$ ja kiinnitetään myös polun valinta γ_w pisteestä w_0 pisteeseen w.

Avoimuuden perusteella on olemassa $r > 0$ siten, että $B(w,r) \subset G$. Laskemme funktion F erotusosamääriä

$$\frac{F(w+h) - F(w)}{h}$$

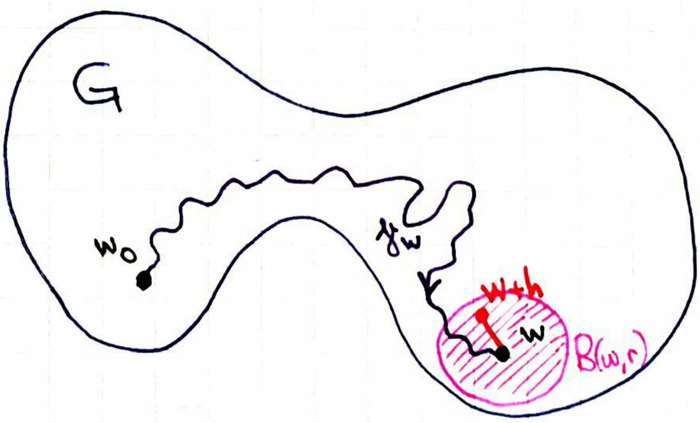
kun $|h| < r$, jolloin $w+h \in B(w,r) \subset G$.

Olkoon η_h janan $[w, w+h]$ parametrisointi

$$\eta_h(t) = w + th \qquad (t \in [0,1]).$$

Konkatenoitu polku $\gamma = \gamma_w \eta_h$ lähtee pisteestä w_0 ja päättyy pisteeseen $w+h$, joten

$$\begin{aligned} F(w+h) &= \int_{\gamma_w \eta_h} f(z)\,dz \\ &= \int_{\gamma_w} f(z)\,dz + \int_{\eta_h} f(z)\,dz \\ &= F(w) + \int_{\eta_h} f(z)\,dz . \end{aligned}$$



Siis erotusosamäärä on

$$\frac{F(w+h) - F(w)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\eta_h} f(z)\,dz .$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Funktion f jatkuvuuden perusteella on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon \qquad \text{kun} \quad |z - w| < \delta.$$

Oletetaan, että $|h| < \delta$, jolloin kaikille janan η_h pisteille $\eta_h(t)$ $(t \in [0,1])$

$$|\eta_h(t) - w| = |w + th - w| = |th| < \delta,$$

joten $|f(\eta_h(t)) - f(w)| < \varepsilon$. Silloin

$$\left| \frac{F(w+h) - F(w)}{h} - f(w) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_{\eta_h} f(z)\,dz - f(w) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_0^1 f(\eta_h(t)) \underbrace{\dot{\eta}_h(t)}_{=h}\,dt - f(w) \right|$$

$$= \left| \int_0^1 \big(f(\eta_h(t)) - f(w) \big)\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{|f(\eta_h(t)) - f(w)|}_{< \varepsilon}\,dt < \varepsilon.$$

Tämä osoittaa, että

$$F'(w) = \lim_{h \to 0} \frac{F(w+h) - F(w)}{h} = f(w),$$

joten F on funktion f integraalifunktio.

$\square$

Ylläolevat tulokset voidaan yhdistää integraalifunktion olemassaolon karakterisoivaksi lauseeksi.

Lause 3.7 Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ alue ja $f : G \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) Funktion f viivaintegraalit $\int_\gamma f(z)dz$ riippuvat vain alueen G polun γ päätepisteistä.

(ii) Kaikilla umpinaisilla alueen G poluilla pätee $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

(iii) Funktiolla f on alueessa G integraalifunktio.

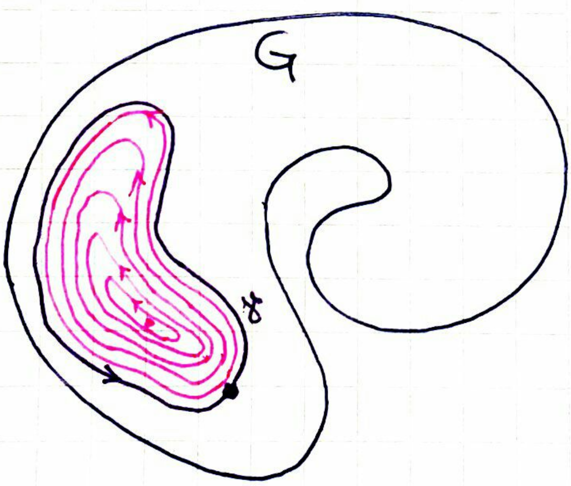
CAUCHYN INTEGRAALILAUSE

Tavoitteenamme on seuraavaksi osoittaa, että jos $f : G \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, niin

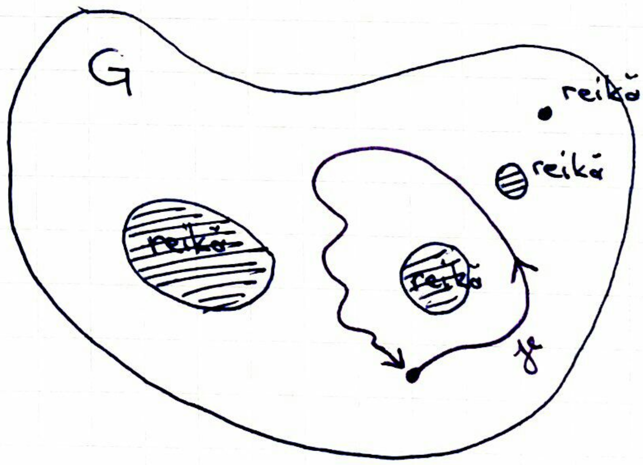
$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

kaikilla sellaisilla umpinaisilla poluilla γ, jotka voidaan "jatkuvasti deformoimalla kutistaa yhteen alueen G pisteeseen" (nk. nollahomotooppisilla umpinaisilla poluilla γ).

Alueita, joissa kaikki umpinaiset polut voidaan näin "kutistaa" sanotaan yhdesti yhtenäisiksi. Ainoa mahdollinen este tällaiselle "kutistamiselle" olisi sellainen "reikä" alueessa, jonka umpinainen polku voi kiertää, tehden jatkuvasta kutistamisesta mahdotonta. Alue G on siis yhdesti yhtenäinen, jos siinä ei ole "reikiä".



(yhdesti yhtenäinen alue G ja nollahomotooppisen polun "kutistaminen")



(ei yhdesti yhtenäinen alue G, ja umpinainen polku, jota ei voi "kutistaa")

Erityisesti tulemme siis päättelemään, että yhdesti yhtenäisissä alueissa G analyyttisellä funktiolla $f: G \to \mathbb{C}$ on integraalifunktio, koska y.o. ehto karakterisoi integraalifunktion olemassaolon.

Kaksi aiempaa vastaesimerkkiämme integraalifunktioiden olemassaolosta näyttävät molempien oletusten tarpeellisuuden:

- Funktiolla $f(z) = \frac{1}{z}$, $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, ei ole integraalifunktiota. Funktio f on kyllä analyyttinen, mutta punkteerattu taso $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ei ole yhdesti yhtenäinen alue (origon poistaminen aiheuttaa "reiän").

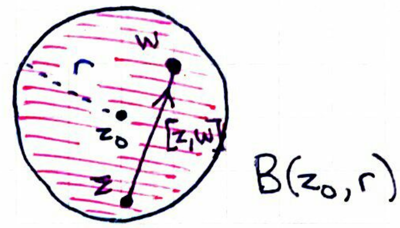
- Funktiolla $f(z) = \bar{z}$, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ei ole integraalifunktiota. Alue $\mathbb{C}$ on kyllä yhdesti yhtenäinen, mutta funktio f ei ole analyyttinen.

Yhdesti yhtenäisyys on alueen G puhtaasti topologinen ominaisuus, joka riittäisi polkujen kutistamista varten. Konkreettisuuden vuoksi (ja välttääksemme olettamasta taustatietoja topologiasta) teemme kuitenkin tässä vahvempia geometrisia oletuksia alueesta G: oletamme sen konveksisuuden (tai tähtimäisyyden).

Määritelmä 4.2 Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *konveksi*, jos kaikilla pistepareilla $z, w \in A$ pätee, että pisteiden välinen jana sisältyy joukkoon, eli $[z,w] \subset A$.

Esim.

- Kiekko $B(z_0, r)$ on konveksi.



- Ylempi puolitaso $\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \}$ on konveksi.

- Koko taso $\mathbb{C}$ on konveksi.
- Suorakaide $[a,b] \times [c,d]$

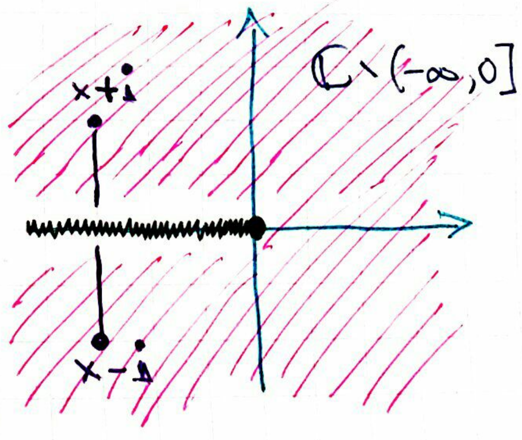
$$= \{ z \in \mathbb{C} \mid a \le \mathrm{Re}(z) \le b \,, \; c \le \mathrm{Im}(z) \le d \}$$

on konveksi.

(Konveksit joukot ovat automaattisesti yhdesti yhtenäisiä — "kutistuksen" voi suorittaa janoja pitkin.)

- Joukko $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ei ole konveksi. Esimerkiksi jos $x \le 0$, niin pisteiden $x+i, x-i \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ välisen janan keskipiste $x \in (-\infty, 0]$ ei ole joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

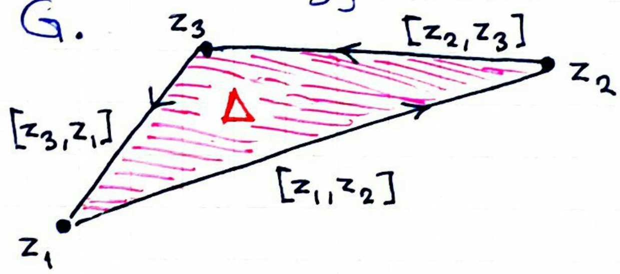
(Joukko $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ on kuitenkin yhdesti yhtenäinen. Konveksisuus on siis aidosti vahvempi oletus kuin yhdesti yhtenäisyys.)



- Punkteerattu taso $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ei ole konveksi. Esimerkiksi pisteiden $-1, +1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ välisen janan keskipiste 0 ei sisälly joukkoon.

(Punkteerattu taso $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ei ole edes yhdesti yhtenäinen — origon poistaminen luo "reiän".)

Konvekseissa alueissa $G \subset \mathbb{C}$ Cauchyn integraalilauseen todistusta helpottaa se, että jos $z_1, z_2, z_3 \in G$ ovat mitkä tahansa kolme alueen pistettä, niin se tason kolmio Δ, jonka kärkipisteet nämä ovat, sisältyy kokonaisuudessaan alueeseen G.



$$\Delta = \left\{ r \cdot z_1 + s \cdot z_2 + t \cdot z_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq r, s, t \leq 1 \\ r + s + t = 1 \end{array} \right\}$$

(suljettu kolmio tasossa, $\Delta \subset \mathbb{C}$)

Kolmion Δ reuna $\partial \Delta$ muodostaa umpinaisen paloittain säännöllisen(*) polun, joka saadaan janojen $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$ ja $[z_3, z_1]$ konkatenaationa.

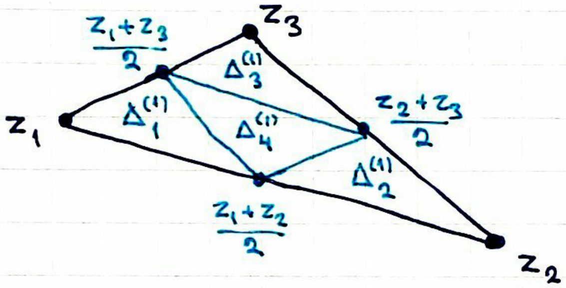
((*) Polun säännöllisyyttä varten oletetaan, että z_1, z_2, z_3 ovat eri pisteet.)

Lause 4.2 (Goursat'n lemma)

Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ alue, $\Delta \subset G$ suljettu kolmio ja $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Tällöin pätee $\oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Todistus: Merkitään $I(\Delta) = \oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz$.

Jaetaan kolmio Δ neljään yhtenevään pienempään kolmioon $\Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}, \Delta_3^{(1)}, \Delta_4^{(1)}$ puolittamalla sivut.



Positiiviseen kiertosuuntaan otettujen viivaintegraalien summassa

$$\oint_{\partial\Delta_1^{(1)}} f(z)\,dz + \oint_{\partial\Delta_2^{(1)}} f(z)\,dz + \oint_{\partial\Delta_3^{(1)}} f(z)\,dz + \oint_{\partial\Delta_4^{(1)}} f(z)\,dz$$

kaikki alkuperäisen kolmion Δ sisäpuolella olevat janat esiintyvät kahdesti, vastakkaisilla suunnistuksilla, ja menevät siten vastakkain. Jäljelle jää vain alkuperäisen kolmion reunan muodostavat janat, joten saadaan

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= \oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz \\ &= \oint_{\partial\Delta_1^{(1)}} f(z)\,dz + \oint_{\partial\Delta_2^{(1)}} f(z)\,dz + \oint_{\partial\Delta_3^{(1)}} f(z)\,dz + \oint_{\partial\Delta_4^{(1)}} f(z)\,dz \\ &= \sum_{j=1}^{4} I(\Delta_j^{(1)}), \end{aligned}$$

missä $I(\Delta_j^{(1)}) := \oint_{\partial\Delta_j^{(1)}} f(z)\,dz$.

Kolmioepäyhtälön perusteella
$$|I(\Delta)| \leq \sum_{j=1}^{4} |I(\Delta_j^{(1)})| ,$$
joten valitsemalla indeksi $j_1 \in \{1,2,3,4\}$ jolla kontribuutio $|I(\Delta_j^{(1)})|$ on suurin, saadaan
$$|I(\Delta_{j_1}^{(1)})| \geq \frac{1}{4} \cdot |I(\Delta)| .$$

Jaetaan sitten edelleen kolmio $\Delta_{j_1}^{(1)}$ samoin neljään yhtenevään vielä piempään osaan $\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_3^{(2)}, \Delta_4^{(2)}$ ja päätellään samoin
$$|I(\Delta_{j_1}^{(1)})| \leq \sum_{j=1}^{4} |I(\Delta_j^{(2)})| ,$$
missä $I(\Delta_j^{(2)}) = \oint_{\partial \Delta_j^{(2)}} f(z)\, dz$. Voidaan jälleen valita indeksi $j_2 \in \{1,2,3,4\}$ siten, että
$$|I(\Delta_{j_2}^{(2)})| \geq \frac{1}{4} \cdot |I(\Delta_{j_1}^{(1)})| \geq \frac{1}{16} \cdot |I(\Delta)| .$$

Jatketaan induktiivisesti — löydetään jono kolmioita $\Delta_{j_1}^{(1)}, \Delta_{j_2}^{(2)}, \Delta_{j_3}^{(3)}, \ldots$ siten, että

- $\Delta \supset \Delta_{j_1}^{(1)} \supset \Delta_{j_2}^{(2)} \supset \Delta_{j_3}^{(3)} \supset \ldots$
- $|I(\Delta_{j_n}^{(n)})| \geq 4^{-n} \cdot |I(\Delta)|$
- $\ell(\partial \Delta_{j_n}^{(n)}) = 2^{-n} \cdot \ell(\partial \Delta)$.

Koska kolmiot $\Delta_{j_n}^{(n)}$ ovat epätyhjiä kompakteja joukkoja ja muodostavat vähenevän joukkojonon $\Delta_{j_1}^{(1)} \supset \Delta_{j_2}^{(2)} \supset \Delta_{j_3}^{(3)} \supset \ldots$, on niiden leikkaus epätyhjä (kts. Cantorin lause, Lause 4.1), ja voidaan valita piste $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{j_n}^{(n)}$ leikkauksesta.

Käytetään nyt funktion f analyyttisyyttä: derivaatta $f'(z_0)$ pisteessä z_0 on olemassa, joten voidaan kirjoittaa

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\cdot f'(z_0) + |z-z_0|\cdot \epsilon(z),$$

missä $\lim_{z\to z_0} \epsilon(z) = 0$.

Ylläolevaa funktion f esitystä käyttäen voidaan viivaintegraali minkä tahansa kolmion $\tilde{\Delta} \subset G$ reunaa $\partial\tilde{\Delta}$ pitkin lausua muodossa

$$I(\tilde{\Delta}) = \oint_{\partial\tilde{\Delta}} f(z)\,dz$$

$$= f(z_0)\cdot \underbrace{\oint_{\partial\tilde{\Delta}} 1\cdot dz}_{=0\ \circledast} + f'(z_0)\cdot \underbrace{\oint_{\partial\tilde{\Delta}} (z-z_0)\cdot dz}_{=0\ \circledast} + \oint_{\partial\tilde{\Delta}} |z-z_0|\epsilon(z)\,dz$$

$$= \oint_{\partial\tilde{\Delta}} |z-z_0|\cdot \epsilon(z)\,dz$$

$\circledast$ Kaksi ensimmäistä viivaintegraalia umpinaisen polun $\partial\tilde{\Delta}$ yli häviävät, koska funktioilla $z \mapsto 1$ ja $z \mapsto (z-z_0)$ on integraalifunktiot (polynomeille integraalifunktion olemassaolo selvää).

Voidaan siis estimoida

$$|I(\tilde{\Delta})| = \left| \oint_{\partial\tilde{\Delta}} |z-z_0|\cdot \epsilon(z)\,dz \right|$$

$$\leq \ell(\partial\tilde{\Delta}) \cdot \sup_{z\in\partial\tilde{\Delta}} \big(|z-z_0|\cdot|\epsilon(z)|\big).$$

Käytetään tätä erityisesti kolmioille $\tilde{\Delta} = \Delta^{(n)}_{j_n}$.

Merkitään $S_n = \sup_{z\in\partial\Delta^{(n)}_{j_n}} |\epsilon(z)|$.

Huomataan myös, että kun $z \in \Delta^{(n)}_{j_n}$, on $|z-z_0| \leq \ell(\partial\Delta^{(n)}_{j_n}) = 2^{-n}\cdot \ell(\partial\Delta)$ ja että $\quad S_n = \sup_{z\in\Delta_{j_n}^{(n)}} |\epsilon(z)| \longrightarrow 0$ kun $n\to\infty$.

Saadaan siis:

$$\left|I(\Delta_{j_n}^{(n)})\right| \le \ell(\partial\Delta_{j_n}^{(n)}) \cdot \sup_{z\in\partial\Delta_{j_n}^{(n)}} \left(|z-z_0|\cdot|\epsilon(z)|\right)$$

$$\le \ell(\partial\Delta_{j_n}^{(n)})^2 \cdot S_n \quad = 2^{-2n}\cdot \ell(\partial\Delta)^2 \cdot S_n.$$

Yhdistämällä tämä estimaatti aiempaan saadaan

$$|I(\Delta)| \le 4^n \cdot |I(\Delta_{j_n}^{(n)})| \le \ell(\partial\Delta)^2 \cdot S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Siis $I(\Delta) = 0$ ja väite on todistettu. $\square$

Goursat'n lemman mukaan siis ainakin analyyttisten funktioiden integraalit alueeseen sisältyvien kolmioiden (umpinaisia) reunapolkuja pitkin häviävät.

Sen sijaan, että todistaisimme saman suoraan yleisemmille nollahomotooppisille umpinaisille poluille γ, käytämme tätä erikoistapausta integraalifunktion konstruoimiseksi konvekseissa alueissa.

<u>Lause 4.3</u> (Cauchyn integraalilause konvekseille alueille)

Jos $G\subset\mathbb{C}$ on konveksi alue ja $f: G\to\mathbb{C}$ analyyttinen funktio, niin kaikille alueen G umpinaisille poluille γ pätee

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

<u>Todistus</u>: Väite seuraa Lauseen 3.7 karakterisaatiosta, jos osoitetaan, että funktiolla f on integraalifunktio.

Valitaan $z_0 \in G$. Kun $w \in G$, sisältyy jana $[z_0, w]$ alueeseen G konveksisuuden nojalla. Asetetaan

$$F(w) = \int_{[z_0,w]} f(z)\,dz .$$

Nyt jos $h \in \mathbb{C}$ on sellainen, että $w+h \in G$, niin pisteiden z_0, w, $w+h$ virittämä kolmio Δ sisältyy konveksiin alueeseen G, joten Goursat'n lemman perusteella

$$0 = \oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz$$

$$= \underbrace{\int_{[z_0,w]} f(z)\,dz}_{= F(w)} + \int_{[w,w+h]} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{[w+h,z_0]} f(z)\,dz}_{= -F(w+h)} ,$$

joten saadaan

$$F(w+h) - F(w) = \int_{[w,w+h]} f(z)\,dz .$$

Samaan tapaan kuin aiemmin, tästä seuraa

$$F'(w) = \lim_{h\to 0} \frac{F(w+h)-F(w)}{h} = f(w),$$

joten F on funktion f integraalifunktio.

$\square$

<u>Huom</u>: Sama todistus toimii, jos konveksisuusoletus korvataan oletuksella alueen G tähtimäisyydestä:

$\exists z^* \in G$ s.e. $\forall z \in G$: $[z^*, z] \subset G$

Silloin pitää vain valita $z_0 = z^*$ todistuksessa ja tarkastella riittävän pieniä h.

ANALYYTTISTEN FUNKTIOIDEN INTEGRAALIESITYKSET

Tällä luennolla johdamme analyyttisille funktioille integraaliesityksen, "Cauchyn integraalikaavan"

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta},$$

missä umpinainen polku γ kiertää pisteen z kerran positiiviseen kiertosuuntaan (vastapäivään) ja funktio f on analyyttinen alueessa, joka sisältää polun γ sekä sen ympäröimät alueet.

Ylläoleva "Cauchyn integraalikaava" on keskeisin yksittäinen kompleksianalyysin tulos — pääosin siksi, että sen seurauksena saadaan huomattava määrä muita tärkeitä tuloksia (vieläpä monessa tapauksessa hyvin vaivattomasti), mm.:

- integraaliesitykset kaikkien kertalukujen derivaatoille
- Taylorin sarjat analyyttisille funktioille
- keskiarvo-ominaisuus ja maksimiperiaate
- Liouvillen lause
- algebran peruslause
- analyyttisen jatkamisen menetelmä (+)
- avoimen kuvauksen lause analyyttisille funktioille
- Laurentin sarjat
- erikoispisteiden luokittelu
- residylaskenta
- ...

Optimaaliset oletukset Cauchyn integraalikaavassa olisivat jälleen topologiset. Konkreettisuuden vuoksi todistamme kaavan kuitenkin vain vahvemman geometrisen oletuksen pätiessä.

Määritelmä Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on tähtimäinen, jos on olemassa $z^* \in A$ siten, että kaikilla $z \in A$ jana $[z^*, z]$ sisältyy joukkoon A, $[z^*, z] \subset A$.

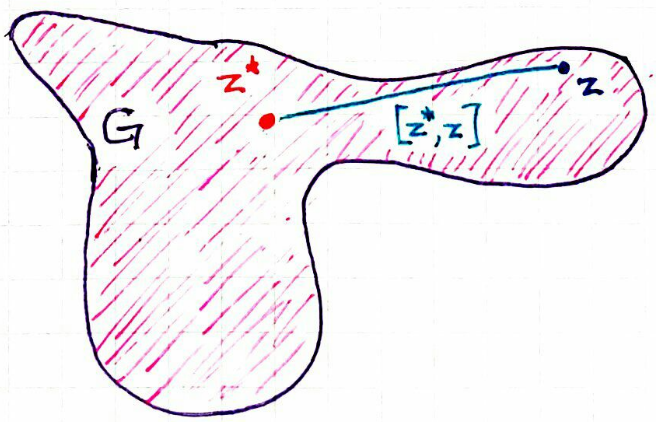
Goursat'n lemmasta seuraa helposti Cauchyn integraalilause tähtimäisille alueille:

Lause (Vahvennettu versio Lauseesta 4.3.) Jos $G \subset \mathbb{C}$ on tähtimäinen alue ja $f : G \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio, niin kaikille alueen G umpinaisille poluille γ pätee

$$\oint_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Todistus: Lauseen 3.7. perusteella riittää osoittaa, että funktiolla f on integraalifunktio alueessa G.

Tähtimäisyyden perusteella voidaan valita $z^* \in G$ siten, että $\forall z \in G : [z^*, z] \subset G$.



Määritellään $F: G \to \mathbb{C}$ integroimalla janoja pitkin

$$F(z) := \int_{[z^*,z]} f(\zeta)\,d\zeta\,, \qquad \text{kun} \quad z \in G.$$

Kiinnitetään $z \in G$. Jana $[z^*, z] \subset G$ kompakti, joten jatkuva funktio

$$\zeta \longmapsto \operatorname{dist}(\zeta, \partial G) := \inf\{|\zeta - w| \mid w \in \partial G\}$$

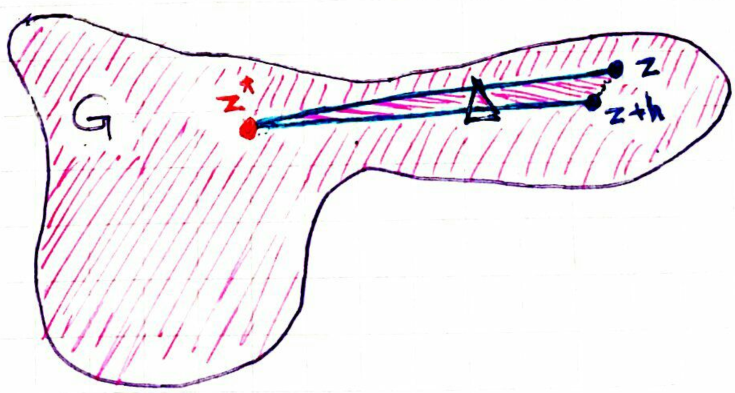
saavuttaa miniminsä janalla. Joukon G avoimuuden perusteella tämä minimi on välttämättä aidosti positiivinen,

$$r = \min_{\zeta \in [z^*,z]} \left(\operatorname{dist}(\zeta, \partial G)\right) > 0.$$

Janan $[z^*, z]$ ympärillä alueessa G on siis hieman tilaa, joten tarpeeksi kapeat kolmiot janan lähellä mahtuvat alueeseen ja pääsemme käyttämään Goursat'n lemmaa.

Olkoon $h \in \mathbb{C}$ tarpeeksi pieni: $|h| < r$. Silloin kolmio Δ, jonka kärkipisteet ovat $z^*, z, z+h$ sisältyy alueeseen G, joten Goursat'n lemman nojalla

$$\begin{aligned}
0 &= \oint_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta \\
&= \int_{[z^*,z]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z+h,z^*]} f(\zeta)\,d\zeta \\
&= F(z) + \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - F(z+h).
\end{aligned}$$



Funktion F erotusosamääräksi saadaan näin

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta .$$

Analyyttinen funktio on myös jatkuva, joten annetulla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$ kun $|\zeta - z| < \delta$. Kun $|h| < \delta$, saadaan

$$\left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - f(z) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(\zeta)-f(z))\,d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\cdot \int_{[z,z+h]} \underbrace{|f(\zeta)-f(z)|}_{<\varepsilon}\cdot|d\zeta| \leq \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\varepsilon = \varepsilon .$$

polun pituus $|h|$

Siis $F'(z) = f(z)$, joten F on funktion f integraalifunktio ja väite on todistettu. $\square$

<u>Esimerkki</u> Olkoon $r > 1$. Funktio $f(z) = \frac{1}{z-r}$ on analyyttinen kiekossa $B(0,r)$.

Polku
$$\gamma(t) = e^{it} \qquad (t \in [0, 2\pi])$$
parametrisoi yksikköympyrän $\partial B(0,1) \subset B(0,r)$ kaaren positiiviseen kiertosuuntaan.

Cauchyn integraalilauseen mukaan pätee

$$
\begin{aligned}
0 &= \oint_\gamma f(\zeta)\, d\zeta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - r}\, \dot{\gamma}(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it} - r}\, i e^{it}\, dt \\
&= i \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(e^{-it} - r)\, e^{it}}{|e^{it} - r|^2}\, dt \\
&= i \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 - r \cdot e^{it}}{|e^{it} - r|^2}\, dt \\
&= i \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 - r \cdot \cos(t) - i\, r \sin(t)}{(\cos(t) - r)^2 + \sin(t)^2}\, dt \\
&= i \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 - r \cdot \cos(t) + i \cdot r \cdot \sin(t)}{\cos(t)^2 - 2r \cdot \cos(t) + r^2 + \sin(t)^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cdot \sin(t)}{1 - 2r \cdot \cos(t) + r^2} + i\, \frac{1 - r \cdot \cos(t)}{1 - 2r \cdot \cos(t) + r^2} \right) dt .
\end{aligned}
$$

Tarkastelemalla ylläolevan integraalin reaali- ja imaginaariosia saadaan reaalisia integraaleja koskevat tulokset, esim.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - r \cdot \cos(t)}{1 - 2r \cdot \cos(t) + r^2}\, dt = 0 .$$

CAUCHYN INTEGRAALIKAAVA

Lause (Cauchyn integraalikaava)

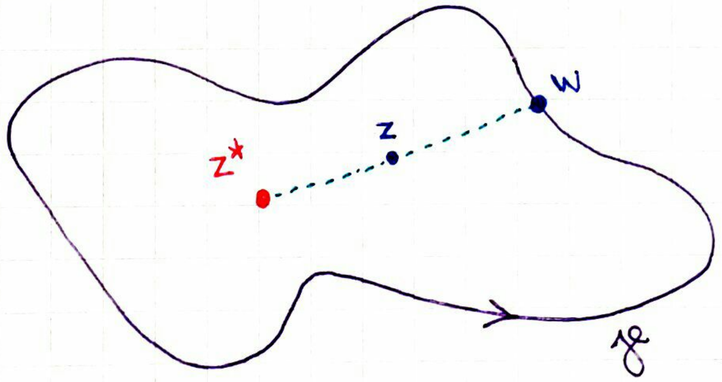
Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio alueessa $G \subset \mathbb{C}$ ja $\gamma : [a,b] \to G$ umpinainen polku, joka kiertää tähtimäisen osa-alueen $U \subset G$ reunan ∂U positiiviseen kiertosuuntaan. Silloin kaikilla $z \in U$ pätee

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi .$$

Todistus: Olkoon $z^* \in U$ sellainen, että

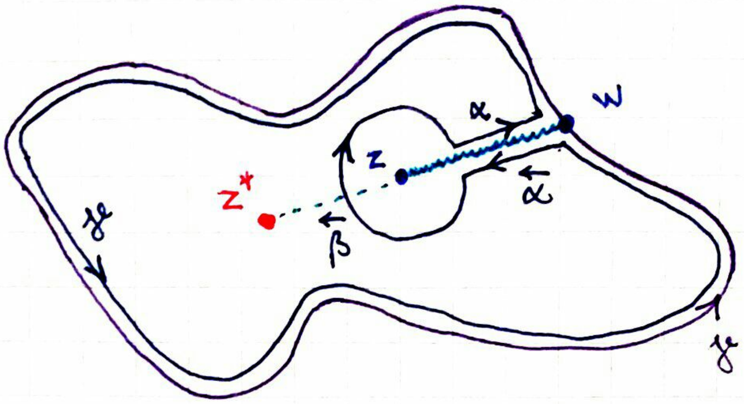
$\forall z \in U : [z^*, z] \subset U$.

Kiinnitetään $z \in U$. Olkoon $w \in \partial U$ se reunan ∂U piste, joka on pisteestä z^* lähtevällä z:n kautta kulkevalla puolisuoralla:



(jos $z = z^*$, voidaan valita mikä tahansa $w \in \partial U$).

Olkoon $\varepsilon > 0$. Funktion f jatkuvuuden ja alueen U avoimuuden perusteella voidaan valita $\delta > 0$ siten, että $\overline{B}(z, \delta) \subset U$ ja $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$ kun $\xi \in \overline{B}(z, \delta)$.



Muodostetaan paloittain säännöllinen polku $\tilde{\gamma}$ konkatenaationa seuraavista osista:

- negatiivisesti suunnistettu ympyrän $\partial B(z,\delta)$ kaari $\overleftarrow{\beta}$ lähtien siitä ympyrän pisteestä, joka sijaitsee janalla $[z,w]$ ja päättyen samaan pisteeseen
- jana α ympyrältä $\partial B(z,\delta)$ pisteeseen $w \in \partial U$ pitkin janaa $[z,w]$
- reunan ∂U parametrisoiva polku γ lähtien pisteestä w ja päättyen siihen
- janan α vastakkaiseen suuntaan kulkeva polku $\overleftarrow{\alpha}$ pisteestä $w \in \partial U$ ympyrälle $\partial B(z,\delta)$.

Polku $\tilde{\gamma} = \overleftarrow{\beta}\alpha\gamma\overleftarrow{\alpha}$ on umpinainen. Se pysyy tähtimäisen alueen $U \setminus [z,w]$ sulkeumassa siten, että Cauchyn integraalilauseen johtopäätös alueessa $U \setminus [z,w]$ analyyttiselle funktiolle

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

on voimassa (tarkat perustelut sivuutetaan tässä). Johtopäätös on, että integraali polkua $\tilde{\gamma}$ pitkin häviää:

$$0 = \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

$$= \oint_{\overleftarrow{\beta}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \cancel{\int_{\alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi} + \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \cancel{\int_{\overleftarrow{\alpha}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}$$

$$= - \underbrace{\oint_{\beta} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}_{} + \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi .$$

positiivisesti suunnistettu ympyrän $\partial B(z,\delta)$ kaari β.

Siis

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \oint_{\beta} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi ,$$

missä β on ympyrä $\partial \overline{B}(z,\delta)$ positiivisesti suunnistettuna. Voidaan laskea suoraan parametrisoimalla $\beta(t) = z + \delta \cdot e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$

$$\oint_{\beta} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\beta(t) - z}\, \dot{\beta}(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{z} + \cancel{\delta} e^{it} - \cancel{z}} \cdot \cancel{\delta} \cdot i \cdot e^{it}\, dt$$

$$= i \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

Tämän avulla kirjoitetaan $f(z) = \frac{f(z)}{2\pi i} \oint_{\beta} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi$ ja edelleen

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - f(z) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\beta} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{f(z)}{2\pi i} \oint_{\beta} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\beta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi \right|$$

ympyrän $\partial B(z,\delta)$ kaaren pituus

$$\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\beta} \underbrace{\frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|}}_{< \frac{\varepsilon}{\delta}} |d\xi| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = \varepsilon .$$

koska $|\xi - z| = \delta$ ja $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$.

Siis $\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \right| < \varepsilon$ ja koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, saadaan

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z). \qquad \square$$

Erityisesti alueeseen G sisältyvät kiekot kelpaavat tähtimäisiksi osa-alueiksi $U \subset G$, jolloin saadaan seuraava erikoistapaus:

<u>Lause 4.5</u> (Cauchyn integraalikaava kiekolle)

Olkoon $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ alueessa $G \subset \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $B(z_0, r)$ avoin kiekko, jonka sulkeuma sisältyy alueeseen: $\overline{B}(z_0, r) \subset G$. Tällöin kaikilla $z \in B(z_0, r)$ pätee

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

(integraali positiiviseen kiertosuuntaan ympyrällä $\partial B(z_0, r)$)

Suorana seurauksena saadaan

<u>Lause 4.7</u>: Analyyttisen funktion $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ arvot kiekossa $\overline{B}(z_0, r) \subset G$ ovat määrätyt, kun tunnetaan arvot ympyrällä $\partial B(z_0, r)$.

Edelleen erikoistapaus $z = z_0$ antaa keskiarvo-ominaisuuden

<u>Lause 4.8</u> (Keskiarvo-ominaisuus)

Olkoon $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen ja $\overline{B}(z_0, r) \subset G$. Silloin

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r \cdot e^{it})\, dt$$

<u>Todistus</u>: Parametrisoimalla ympyrä $\partial B(z_0, r)$ kaavalla $\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$, saadaan Lauseesta 4.5, kun $z = z_0$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{\cancel{r} \cdot \cancel{e^{it}}} \cancel{i} \cancel{r} \cancel{e^{it}} \qquad \square$$

TAYLORIN SARJA ANALYYTTISELLE FUNKTIOLLE

Cauchyn integraalilause on integraalikaava analyyttisen funktion arvolle, mutta se voidaan yleistää kaavaksi funktion derivaattojen arvoille. Samalla näytetään, että analyyttisellä funktiolla on (lokaalisti) potenssisarjaesitys ja että sillä on kaikkien kertalukujen derivaatat.

Lause 5.1 (Taylorin sarja)

Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $z_0 \in G$. Tällöin jokaisessa alueen kiekossa $B(z_0, r) \subset G$ funktio f voidaan esittää potenssisarjana

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n ,$$

missä

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1+n}} \, d\zeta$$

ja γ on positiivisesti suunnistettu ympyrä $\partial B(z_0, \rho)$, missä $\rho < \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$. Tämän potenssisarjan suppenemissäde R on vähintään

$$R \geq \operatorname{dist}(z_0, \partial G).$$

Todistus: Kun $z \in B(z_0, r) \subset G$, valitaan ρ siten, että $|z - z_0| < \rho < r$.

Käytetään äärellistä geometrista sarjaa

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^k + \frac{q^{k+1}}{1-q} \qquad (q \neq 1).$$

Sen avulla kirjoitetaan, kun $|\zeta - z_0| = \varrho > |z - z_0|$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \ldots + \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} + \frac{(z - z_0)^{k+1}}{(\zeta - z_0)^{k+1}(\zeta - z)}.$$

Sijoittamalla tämä Cauchyn integraalikaavaan ja käyttämällä integraalin lineaarisuutta saadaan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k} (z - z_0)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + T_k(z),$$

missä jäännöstermi on

$$T_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{k+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ylläolevan äärellisen potenssisarjan kertoimet ovat väitettyä muotoa

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

(Kertoimien kaava ei riipu säteen ϱ valinnasta, mutta jätetään tämän tarkistaminen myöhemmäksi.)

Riittää siis osoittaa jäännöstermille

$$|T_k(z)| \longrightarrow 0 \quad \text{kun} \quad k \longrightarrow \infty.$$

Merkitään $\theta := \frac{|z - z_0|}{\varrho} < 1$. Kun $\zeta \in \partial B(z_0, \varrho)$, on silloin $\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \theta$ ja toisaalta myös

$$|\zeta - z| \geq \underbrace{|\zeta - z_0|}_{= \varrho} - \underbrace{|z - z_0|}_{= |\zeta - z_0| \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \varrho \cdot \theta} = (1 - \theta) \cdot \varrho.$$

Jatkuva funktio f on kompaktissa joukossa $\partial B(z_0, \varrho)$ rajoitettu, joten on olemassa M siten, että $|f(\zeta)| \leq M$.

Yhdistämällä ylläolevat, voidaan jäännöstermiä arvioida kaarenpituusintegraalilla

$$|T_k(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_\gamma \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^{k+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \theta^{k+1} \frac{M}{(1-\theta)\cdot \rho} \cdot 2\pi\rho = \frac{M \cdot \theta^{k+1}}{1-\theta}.$$

Koska $|\theta| < 1$, saadaan $\lim_{k\to\infty} |T_k(z)| = 0$.

Jäännöstermin meneminen nollaan osoittaa, että saadaan suppeneva sarja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n .$$

Abelin lauseen perusteella sarjan suppenemissäde on vähintään $R \geq |z-z_0|$.
Päättely voitiin tehdä mille tahansa $r \leq \text{dist}(z_0, \partial G)$ ja $z \in B(z_0, r)$, joten

$$R \geq \text{dist}(z_0, \partial G).$$

□

Huomautus: Todistuksessa valittiin sopiva ρ polun γ parametrisoiman ympyrän säteeksi — siten, että $|z-z_0| < \rho < r \leq \text{dist}(z_0, \partial G)$.
Valinnalla ei ole vaikutusta kerrointen

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1+n}} \, d\zeta$$

kaavaan.
Helppo perustelu saadaan potenssisarjojen yksikäsitteisyydestä (Lause 3.25). Jos $0 < \rho_1 < \rho_2 < \text{dist}(z_0, \partial G)$ ja $a_n^{(1)}$ ja $a_n^{(2)}$ ovat säteitä ρ_1 ja ρ_2 käyttämällä saadut kertoimet, niin kaikilla z siten, että

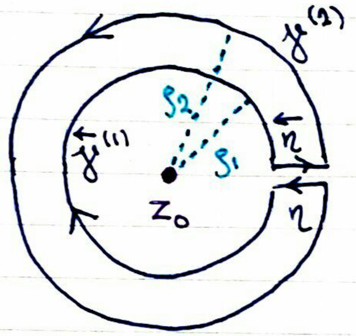
$|z-z_0| < \min(\varrho_1, \varrho_2)$ olemme näyttäneet

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} (z-z_0)^n = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} (z-z_0)^n,$$

joten kerrointen on oltava samat,

$$a_n^{(1)} = a_n^{(2)} \qquad \forall n = 0,1,2,\ldots$$

Toinen perustelu saadaan Cauchyn integraalilauseesta. Muodostetaan polku



$\tilde{\gamma}$ konkatenoimalla ympyrän $\partial B(z_0, \varrho_2)$ kaari $\gamma^{(2)}$, jana $\eta = [z_0+\varrho_2, z_0+\varrho_1]$, ympyrän $\partial B(z_0,\varrho_1)$ negatiivisesti suunnistettu kaari $\overleftarrow{\gamma}^{(1)}$ ja jana $\overleftarrow{\eta} = [z_0+\varrho_1, z_0+\varrho_2]$.

Funktio $\zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ on analyyttinen tähtimäisessä alueessa $B(z_0, r) \setminus [z_0+\varrho_1, z_0+r)$ ja jatkuva sen sulkeumassa, joten

$$0 = \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

$$= \oint_{\gamma^{(2)}} (-\shortparallel-) + \cancel{\int_{\eta} (-\shortparallel-)} + \int_{\overleftarrow{\gamma}^{(1)}} (-\shortparallel-) + \cancel{\int_{\overleftarrow{\eta}} (-\shortparallel-)}$$

$$= \oint_{\gamma^{(2)}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{1+n}}\, d\zeta - \oint_{\gamma^{(1)}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{1+n}}\, d\zeta .$$

Siis integraalit säteitä ϱ_1 ja ϱ_2 käyttäen ovat samat.

Yhdistämällä analyyttisen funktion Taylorin sarjaa koskeva tulos potenssisarjojen derivoimis-tulokseen saamme funktion analyyttisyydelle karakterisaation potenssisarjojen avulla.

Lause 5.2: Funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on analyyttinen jos ja vain jos sillä on jokaisen pisteen $z_0 \in G$ ympäristössä esitys suppenevana potenssisarjana.

Todistus: "jos": Seuraa Lauseesta 3.23 — potenssisarjan voi suppenemiskiekossaan derivoida termeittäin.

"vain jos": Seuraa Lauseesta 5.1 — analyyttinen funktio voidaan lokaalisti esittää Taylorin sarjana. $\square$

Erityisesti analyyttisen funktion Taylorin sarjasta seuraa kaikkien kertalukujen derivoituvuus.

Lause 5.3: Jos funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, niin sillä on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat $f', f'', f''', \ldots : G \to \mathbb{C}$. Myös nämä ovat analyyttisiä funktioita.

Taylorin sarja antaa myös derivaatoille viivaintegraali-esityksen.

Lause 5.4: Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $z_0 \in G$ ja $0 < \rho < \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$. Tällöin funktion f kertaluvun n derivaatta on

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1+n}} \, d\zeta .$$

Todistus: Derivoimalla potenssisarjaa saadaan $f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n$. Käytetään kertoimelle a_n Lauseen 5.1 kaavaa. $\square$

CAUCHYN INTEGRAALIKAAVAN SEURAUKSIA

Palautetaan mieliin:

Lause 4.5: Jos $f: G \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $\overline{B}(z_0, r) \subset G$, niin kaikilla $z \in B(z_0, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

(Cauchyn integraalikaava)

Tämän tärkeä seuraus on:

Lause 5.1 Jos $f: G \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $z_0 \in G$ ja $r_0 = \text{dist}(z_0, \partial G)$, niin kaikilla $z \in B(z_0, r_0)$ pätee

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n, \quad \text{(Taylorin sarja)}$$

missä kertoimet saadaan kaavasta

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1+n}}\, d\zeta$$

millä tahansa $0 < \rho < r_0$.

(Todistuksen idea oli kehittää Cauchyn integraalikaavassa esiintyvä $\frac{1}{\zeta - z}$ geometriseksi sarjaksi ja integroida termeittäin.)

Seurauksena saatiin, että analyyttisellä funktiolla on aina lokaalisti potenssisarjaesitys ja erityisesti sillä on kaikkien kertalukujen derivaatat.

Yleiskatsaus analyyttisiin funktioihin

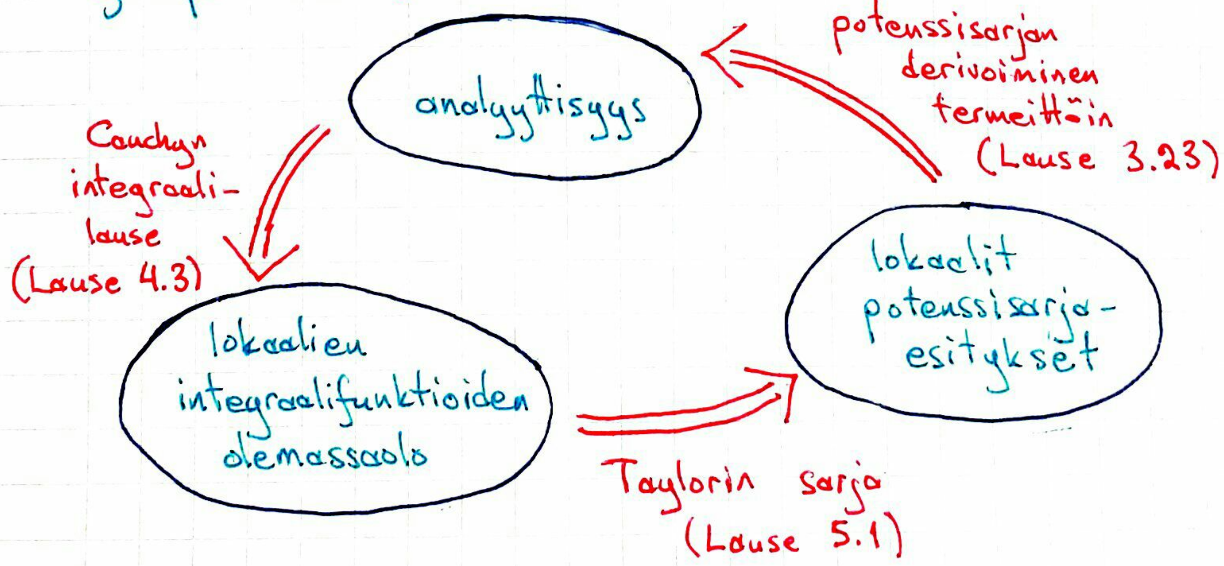
Kompleksitason alueessa G määritellylle kompleksiarvoiselle funktiolle $f: G \to \mathbb{C}$ olemme tarkastelleet seuraavia ominaisuuksia:

- analyyttisyys: kaikissa pisteissä $z_0 \in G$ on olemassa kompleksinen derivaatta $f'(z_0)$

- lokaalit potenssisarjaesitykset: kaikilla $z_0 \in G$ on olemassa ympäristö $B(z_0, r) \subset G$, jossa f on potenssisarjan määräämä
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \qquad \text{kun } z \in B(z_0, r)$$

- lokaalien integraalifunktioiden olemassaolo: kaikilla $z_0 \in G$ on olemassa ympäristö $B(z_0, r) \subset G$, jossa funktiolla f on integraalifunktio $F: B(z_0, r) \to \mathbb{C}$
$$f(z) = F'(z) \qquad \text{kun } z \in B(z_0, r).$$

Nämä kolme ominaisuutta ovat osoittautuneet keskenään yhtäpitäviksi!



Osalla ylläolevien käsitteiden välisistä implikaatioista on luontevat todistukset myös käänteiseen suuntaan aiempiin todistuksiimme nähden (loogisesti näitä ei enää tarvita, kun ominaisuudet on jo näytetty yhtäpitäviksi, mutta ne voivat silti osaltaan valaista asiaa).

Esimerkiksi potenssisarjaesityksistä integraalifunktioihin:

Lemma (Potenssisarjan integroiminen termeittäin)

Kiekossa $B(z_0,r)$ suppenevan potenssisarjan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ voi integroida termeittäin: funktio $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ on sen integraalifunktio kiekossa $B(z_0,r)$.

Tod: $F'(z) = f(z)$ termeittäin derivoimalla eli Lauseen 3.23 perusteella. □

Integraalifunktioista analyyttisyyteen taas johtaa:

Lause (Moreran lause)

Jos jatkuvalle funktiolle $f: G \to \mathbb{C}$ pätee $\oint_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ kaikilla alueen G umpinaisilla poluilla, niin f on analyyttinen.

Tod.: Lauseen 3.7 perusteella oletus umpinaisten polkujen viivaintegraalien häviämisestä on yhtäpitävä integraalifunktion $F: G \to \mathbb{C}$ olemassaolon kanssa.

Koska $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in G$, on F analyyttinen. Sillä on siten Lauseen 5.1. seurauksena kaikkien kertalukujen derivaatat. Erityisesti on olemassa $F''(z) = f'(z)$, joten f on analyyttinen. □

Huomautetaan myös, että jos $f: G \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $z_0 \in G$ ja jossakin pisteen z_0 ympäristössä on

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n ,$$

niin potenssisarjojen yksikäsitteisyyslauseesta seuraa, että tämä potenssisarja on funktion f Taylorin sarja pisteessä z_0 eli

$$b_n = a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0,\rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{1+n}} \, d\xi$$

kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Esimerkki Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = 1 - \sin(z)$$

pisteen $z_0 = \frac{\pi}{2}$ ympäristössä.

Harjoituksissa on osoitettu $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$ ja kosinille on voimassa sarjakehitelmä

$$\cos(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 - \ldots .$$

Funktion f Taylorin kehitelmä pisteessä $z_0 = \frac{\pi}{2}$?

$$\begin{aligned}
f(z) = 1 - \sin(z) &= 1 - \sin\left((z - \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2}\right) \\
&= 1 - \cos\left(z - \tfrac{\pi}{2}\right) \\
&= 1 - \sum_{m=0} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(z - \tfrac{\pi}{2}\right)^{2m} \\
&= 1 - \left(1 - \tfrac{1}{2}\left(z - \tfrac{\pi}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{24}\left(z - \tfrac{\pi}{2}\right)^4 - \ldots\right) \\
&= + \tfrac{1}{2}\left(z - \tfrac{\pi}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{24}\left(z - \tfrac{\pi}{2}\right)^4 + \ldots \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)!} \left(z - \tfrac{\pi}{2}\right)^{2m}
\end{aligned}$$

Cauchyn integraalikaavasta saadaan myös arvioita analyyttisen funktion derivaattojen suuruudelle jos funktion itsensä arvojen suuruudesta ja etäisyydestä määrittelyjoukon reunaan tiedetään jotakin.

Lause 5.7 (Cauchyn arvio)

Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen alueessa $G \subset \mathbb{C}$ ja $z_0 \in G$. Jos $\rho > 0$ on sellainen, että $\overline{B}(z_0, \rho) \subset G$ ja merkitään

$$M = M(\rho) := \sup_{z \in \overline{B}(z_0,\rho)} |f(z)|,$$

niin kertaluvun n derivaatalle pätee

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq n! \cdot \frac{M(\rho)}{\rho^n} .$$

Todistus: Arvioidaan Taylorin sarjan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ kerrointa kaarenpituusintegraalilla

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1+n}} d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B(z_0,\rho)} \underbrace{\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{1+n}}}_{\leq M(\rho) \cdot \rho^{-1-n}} |d\zeta|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M(\rho)}{\rho^{1+n}} \cdot \ell(\partial B(z_0,\rho))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho^{1+n}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M(\rho)}{\rho^{1+n}} .$$

Derivaatalle saadaan vastaavasti

$$|f^{(n)}(z_0)| = |n! \cdot a_n| \leq n! \frac{M(\rho)}{\rho^n} . \qquad \square$$

Seurauksena saadaan erityisesti:

Lause 5.8 (Liouvillen lause)

Jos funktio $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on rajoitettu ja analyyttinen koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$, niin se on vakiofunktio.

Todistus: Oletetaan, että $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
Lauseesta 5.7 saadaan silloin millä tahansa $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $\rho > 0$ (koska $\bar{B}(z_0, \rho) \subset \mathbb{C}$)

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M(\rho)}{\rho} \leq \frac{M}{\rho} \xrightarrow[\rho \to \infty]{} 0,$$

joten $f'(z_0) = 0$. Koska derivaatta f' häviää kaikkialla, on f vakiofunktio $f(z) = c \quad \forall z \in \mathbb{C}$. $\square$

Vaihtoehtoinen todistus Funktion f Taylorin sarjan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ kertoimille saadaan Cauchyn arviosta, jälleen kaikilla $\rho > 0$

$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} \leq \frac{M}{\rho^n} \xrightarrow[\rho \to \infty]{} 0 \quad \text{jos } n > 0.$$

Siis $a_n = 0$ kun $n \neq 0$, joten Taylorin sarjassa on vain vakiotermi $f(z) = a_0$.

Algebran peruslause on helppo todistaa Liouvillen lauseen avulla.

Lause 5.9. (Algebran peruslause)

Olkoon $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d$ ei-vakio kompleksikertoiminen polynomi $(a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C},\ a_d \neq 0)$. Tällöin on olemassa $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että $P(z_0) = 0$.

Todistus: Tehdään vastaoletus, että $P(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Silloin funktio

$$z \longmapsto \frac{1}{P(z)}$$

on hyvin määritelty ja analyyttinen koko tasossa $\mathbb{C}$. Koska $a_d \neq 0$, on

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d| \\ &= |z|^d \cdot \left| a_d + \frac{a_{d-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{d-1}} + \frac{a_0}{z^d} \right| \\ &\geq |z|^d \cdot \Bigl(|a_d| - \underbrace{\left| \frac{a_{d-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^d} \right|}_{\to 0 \text{ kun } |z| \to \infty} \Bigr), \end{aligned}$$

joten on olemassa $R > 0$ siten, että kun $|z| \geq R$ pätee $|P(z)| \geq |z|^d \cdot \frac{|a_d|}{2} \geq \frac{1}{2}|a_d| \cdot R^d$. Kun $|z| \geq R$ saadaan tästä

$\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \frac{2}{|a_d| \cdot R^d}$. Toisaalta $M(R) := \sup_{z \in \bar{B}(0,R)} \left| \frac{1}{P(z)} \right|$

on äärellinen jatkuvan funktion maksimina kompaktissa joukossa. Jos nyt asetetaan $M = \max\left(\frac{2}{|a_d| R^d}, M(R) \right)$, niin $\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq M$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Siis funktio $z \mapsto \frac{1}{P(z)}$ on rajoitettu ja analyyttinen koko tasossa $\mathbb{C}$ ja täten Liouvillen lauseen perusteella vakio $\frac{1}{P(z)} = c$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Silloin myös P on vakio, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. $\square$

Korollaari Astetta $d \in \mathbb{N}$ oleva kompleksikertoiminen polynomi $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d$ $(a_d \neq 0)$ voidaan esittää muodossa

$$P(z) = c \cdot \prod_{j=1}^{d} (z - z_j)$$

joillakin $z_1, z_2, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ ja $c = a_d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Todistus: Todistetaan väite induktiolla asteen d suhteen. Tapaus $d=1$ on selvä, koska

$$a_0 + a_1 z = a_1 \cdot \left(z - \frac{a_0}{a_1}\right).$$

Oletetaan sitten väite todistetuksi polynomeille Q, joiden aste on $\deg(Q) < d$.

Olkoon P astetta $\deg(P) = d$ oleva polynomi. Lauseen 5.9 perusteella on olemassa $z_d \in \mathbb{C}$ siten, että $P(z_d) = 0$. Tästä seuraa, että $P(z) = (z - z_d) \cdot Q(z)$, missä Q on astetta $\deg(Q) = d-1$ oleva polynomi.

(Tosiaan, polynomien jakoalgoritmilla voidaan kirjoittaa

$$P(z) = (z - z_d) \cdot Q(z) + R(z),$$

missä jakojäännöksen R aste on pienempi kuin jakajan $(z - z_d)$ aste: $\deg(R) < \deg(z - z_d) = 1$, eli R on nollannen asteen vakiopolynomi, $R(z) = r \in \mathbb{C}$. Silloin pisteessä $z = z_d$ saadaan

$$0 = P(z_d) = \underbrace{(z_d - z_d)}_{=0} \cdot Q(z_d) + r = r,$$

joten $r = 0$ ja siis $P(z) = (z - z_d)\, Q(z)$.)

Siis induktio-oletuksen perusteella

$$Q(z) = c \cdot \prod_{j=1}^{d-1} (z - z_j).$$

Saadaan

$$P(z) = (z - z_d) \cdot Q(z) = c \cdot \prod_{j=1}^{d} (z - z_j)$$

ja selvästi johtava kerroin on $c = a_d$. $\square$

<u>Esimerkki</u> Polynomilla $P(z) = 1 + z^2$ ei ole reaalisia nollakohtia, koska $P(x) = 1 + x^2 \geq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Sillä on kuitenkin kaksi kompleksista nollakohtaa $z_1 = i$, $z_2 = -i$ ja se voidaan jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin

$$1 + z^2 = (-i + z)(+i + z)$$

kompleksikertoimisten polynomien renkaassa.

<u>Esimerkki</u> Polynomilla $P(z) = z^3 - 2i z^2 - (4+2i) z + 4i$ voidaan suoralla laskulla todeta olevan ainakin nollakohta $z = z_1 = -2$. Eristämällä vastaava ensimmäisen asteen tekijä $z - z_1 = z + 2$, voidaan kirjoittaa

$$P(z) = (z+2)\left(z^2 - (2+2i) \cdot z + 2i\right).$$

Toisen asteen polynomi $z^2 - (2+2i)z + 2i$ osoittautuukin neliöksi $(z - 1 - i)^2$, joten lopulta saadaan P:lle tekijöihinjako

$$\begin{aligned} P(z) &= (z+2) \cdot (z - 1 - i)^2 \\ &= (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3), \end{aligned}$$

missä $z_1 = -2$ ja $z_2 = z_3 = 1 + i$.
Nollakohdan $1+i$ sanotaan olevan kertolukua 2.

Analyyttisen funktion erikoispisteet

Määritelmä Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ alue. Alueen reunan pistettä $w_0 \in \partial G$ sanotaan *erakkoreunapisteeksi*, jos on olemassa $r > 0$ siten, että $B(w_0, r) \setminus \{w_0\} \subset G$.

(Jokin pisteen w_0 ympäristö ei sisällä muita reunapisteitä!)

Määritelmä Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ alueessa G analyyttinen funktio. Alueen G erakkoreunapisteitä sanotaan analyyttisen funktion *erikoispisteiksi* tai *singulariteeteiksi*.

Analyyttisen funktion käyttäytyminen erikoispisteen ympäristössä voi olla kolmea mahdollista tyyppiä.

Luokittelua varten tarvitsemme vielä yhden määritelmän

Määritelmä: Funktiolla f sanotaan olevan pisteessä z_0 *raja-arvo ääretön*, merkitään $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, jos kaikilla $R > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(z)| > R \quad \text{kun} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

(Yhtäpitäviä ehtoja ovat myös

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.)$$

Kolme erikoispisteiden tyyppiä ovat seuraavat.

Määritelmä Olkoon $f: G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja z_0 sen erikoispiste.

1°) z_0 on funktion f poistuva erikoispiste, jos $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

2°) z_0 on funktion f napa, jos
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$
(Jos lisäksi $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^n \cdot f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, niin navan sanotaan olevan kertalukua n.)

3°) Muussa tapauksessa z_0 on funktion f oleellinen erikoispiste (kun raja-arvoa $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ei ole olemassa).

Esimerkki

1°) Tarkastellaan kaavan
$$f(z) = \frac{1 - \sin(z)}{(z - \pi/2)^2}$$
määrittelemää funktiota $f: \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{C}$. Piste $z_0 = \frac{\pi}{2}$ on funktion f erikoispiste ja tarkistamme, että se on poistuva erikoispiste.

Aiemman esimerkin perusteella kaikilla $z \in \mathbb{C}$
$$1 - \sin(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2m}$$
$$= \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{24}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^6 - \dots .$$

Saadaan siis, kun $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

$$f(z) = \frac{1-\sin(z)}{(z-\pi/2)^2}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)!}(z-\tfrac{\pi}{2})^{2m-2}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!}(z-\tfrac{\pi}{2})^{2k}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{24}(z-\tfrac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{720}(z-\tfrac{\pi}{2})^4 - \dots .$$

Tästä nähdään raja-arvo

$$\lim_{z \to \pi/2} f(z) = \frac{1}{2} \in \mathbb{C},$$

joten $z_0 = \frac{\pi}{2}$ on tosiaan poistuva erikoispiste.

2°) Tarkastellaan kaavan

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

määrittelemää funktiota

$$f: \mathbb{C} \setminus \{2\pi i m \mid m \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}.$$

Piste $z_0 = -4\pi i$ (muiden muassa) on funktion f erikoispiste ja tarkistamme, että se on napa.

Eksponenttifunktion jatkuvuuden perusteella

$$\lim_{z \to -4\pi i} e^z = e^{-4\pi i} = \cos(-4\pi) + i\sin(4\pi) = 1$$

ja siten

$$\lim_{z \to -4\pi i} (e^z - 1) = 0.$$

Siten

$$\lim_{z \to -4\pi i} |f(z)| = \lim_{z \to -4\pi i} \frac{|z|}{|e^z - 1|} = \infty$$

tavallisten (reaalisten) raja-arvon laskusääntöjen perusteella. Siis $z_0 = -4\pi i$ on f:n napa.

3°) Tarkastellaan kaavan

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

määrittelemää analyyttistä funktiota

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}.$$

Piste $z_0 = 0$ on funktion f erikoispiste ja tarkistamme, että se on oleellinen erikoispiste, eli että funktiolla f ei ole raja-arvoa tätä pistettä lähestyttäessä.

Asetetaan $z_n = \frac{1}{n}$ ja $\tilde{z}_n = \frac{-1}{n}$ kun $n \in \mathbb{N}$, jolloin $z_n \to 0$ ja $\tilde{z}_n \to 0$ kun $n \to \infty$.

Nyt $|f(z_n)| = \left|\exp\left(\frac{1}{1/n}\right)\right| = |\exp(n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$,

mutta $|f(\tilde{z}_n)| = \left|\exp\left(\frac{1}{-1/n}\right)\right| = |\exp(-n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Siis $\lim_{z\to 0} f(z)$ ei ole olemassa, ja $z_0 = 0$ on f:n oleellinen erikoispiste.

Erikoispisteiden luokittelun ja funktioiden käyttäytymiseen erikoispisteiden ympäristössä soveltuu potenssisarjojen yleistys, jossa esiintyy myös negatiivisia potensseja.

Sarjan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ voidaan ymmärtää koostuvan kahdesta osasta:

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ on tavallinen potenssisarja, joka suppenee kun $|z-z_0| < R_+ := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$
- $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \dots$ on potenssisarja muuttujassa $\frac{1}{z-z_0}$, joka suppenee kun $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}}$ eli kun

$$|z-z_0| > R_- := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}.$$

Erityisesti sarja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$$

suppenee, kun $R_- < |z-z_0| < R_+$.

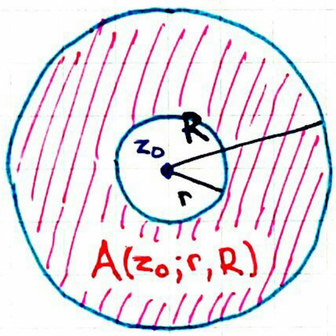
Jos $R_- > R_+$, niin sarja ei suppene missään.

Erikoispisteiden tutkimista varten tärkeä on tapaus $R_- = 0$, jolloin sarja suppenee punkteeratussa kiekossa

$$B(z_0, R_+) \setminus \{z_0\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-z_0| < R_+ \}.$$

Yleisemmin merkitään rengasaluetta, joka jää z_0-keskisten r- ja R-säteisten ympyröiden väliin

$$A(z_0; r, R) := \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R \}.$$



Taylorin sarjoilla on seuraava yleistys: Laurentin sarjat.

<u>Lause 5.13</u> (Laurentin sarja)

Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen alueessa G ja $A(z_0; r, R) \subset G$. Silloin kaikilla $z \in A(z_0; r, R)$ on voimassa

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n ,$$

missä kertoimet a_n, $n \in \mathbb{Z}$, saadaan kaavasta

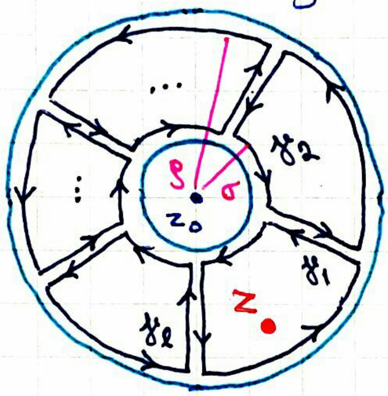
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1+n}} \, d\zeta \qquad (r < \rho < R).$$

Todistuksen hahmotelma Todistuksen idea on hyvin samanlainen kuin Taylorin sarjalle.

Olkoon $z \in A(z_0; r, R)$. Valitaan σ, ϱ siten, että

$$r < \sigma < |z - z_0| < \varrho < R.$$

Jaetaan rengasalue $A(z_0; \sigma, \varrho)$ äärellisen moneen tähtimäiseen sektoriin, joiden positiivisesti suunnistetut reunakäyrät ovat $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\ell$



siten, että piste z on γ_1:in ympäröimässä sektorissa.

Funktio $\zeta \mapsto \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ on analyyttinen muissa sektoreissa $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_\ell$, joten Cauchyn integraalilauseen perusteella

$$\oint_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \qquad \text{kun } j = 2, 3, \dots, \ell.$$

Cauchyn integraalikaava sektorille γ_1 taas sanoo

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \cdot 2\pi i.$$

Summaamalla kaikkien sektoreiden yli ja huomaamalla vastakkaissuuntaisten janojen integraalien menevän vastakkain jäljelle jää integraalit σ- ja ϱ-säteisillä ympyröillä:

$$2\pi i \cdot f(z) = \sum_{j=1}^{l} \oint_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \oint_{\partial B(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint_{\partial B(z_0,\sigma)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Ulommalla ρ-säteisellä ympyrällä käytetään samaa geometrista sarjaa kuin Lauseen 5.1 todistuksessa:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right)$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{1+n}}$$

kun $|\zeta - z_0| = \rho > |z - z_0|$

ja sisemmällä σ-säteisellä ympyrällä taas

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \right)$$

$$= \frac{-1}{z - z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^m = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^{1+m}}$$

(muuttujan vaihto: $n = -m-1$)

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{1+n}}$$

kun $|\zeta - z_0| = \sigma < |z - z_0|$.

Summien ja integraalien järjestyksen vaihto

$$2\pi i \cdot f(z) = \int_{\partial B(z_0,\rho)} \underbrace{\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{= f(\zeta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{1+n}}} d\zeta - \oint_{\partial B(z_0,\sigma)} \underbrace{\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{= -f(\zeta) \cdot \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{1+n}}} d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \oint_{\partial B(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n \cdot \oint_{\partial B(z_0,\sigma)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

voidaan perustella samaan tapaan kuin Lauseen 5.1. todistuksessa. $\square$

SINGULARITEETIT JA RESIDYT

Yksi kompleksisen integrointiteorian käyttömahdollisuuksista on reaalisten integraalien laskeminen. Annetaan tästä ensin esimerkki.

Esimerkki Lasketaan reaalinen (epäoleellinen) integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad := \quad \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{1}{1+x^2}\,dx .$$

Tätä varten tarkastellaan analyyttistä funktiota

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} ,$$

jonka määrittelyjoukko on $\mathbb{C} \setminus \{-i, +i\}$ ja erikoispisteet ovat $z = -i$ ja $z = +i$.

Jos γ on umpinainen polku alueessa $\mathbb{C} \setminus \{-i, +i\}$, joka kiertää pisteen $+i$ kerran positiiviseen kiertosuuntaan ja jättää pisteen $-i$ ulkopuolelleen, niin kirjoittamalla

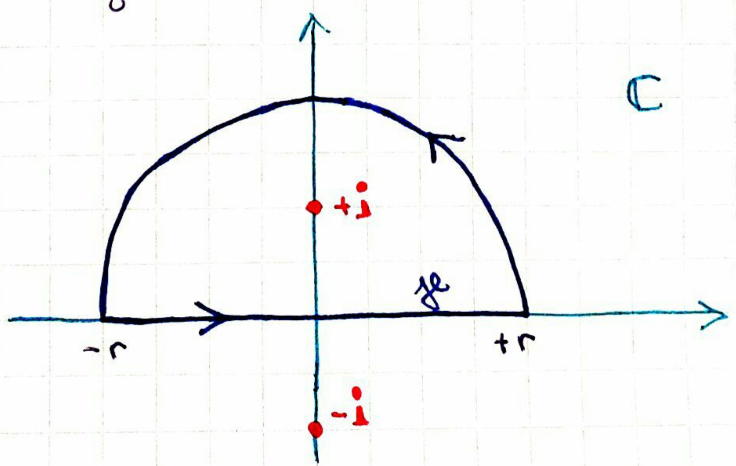
$$f(z) = \frac{g(z)}{z-i} , \quad \text{missä} \quad g(z) = \frac{1}{z+i}$$

saadaan Cauchyn integraalikaavasta

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma \frac{g(z)}{z-i}\,dz = 2\pi i \cdot g(i)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi .$$

Valitaan umpinaiseksi paloittain säännölliseksi poluksi γ alla oleva:



eli konkatenaatio reaaliakselilla sijaitsevasta janasta $[-r,+r]$ ja r-säteisen origokeskisen puoliympyrän kaaresta β_r ylemmässä puolitasossa. Funktion f viivaintegraali tätä polkua pitkin on

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \int_{[-r,+r]} f(z)\,dz + \int_{\beta_r} f(z)\,dz .$$

Jana $[-r,+r]$ on luontevinta parametrisoida kaavalla

$$\begin{array}{ccc} [-r,r] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \in & & \in \\ t & \longmapsto & t \end{array},$$

jolloin viivaintegraaliksi janalle saadaan

$$\int_{[-r,+r]} f(z)\,dz = \int_{-r}^{+r} f(t)\,dt = \int_{-r}^{+r} \frac{1}{1+t^2}\,dt .$$

Rajalla $r \longrightarrow \infty$ tämä on se epäoleellinen integraali, jonka pyrimme laskemaan.
Viivaintegraalia puoliympyrän kaarella taas voidaan arvioida kaarenpituusintegraalilla

$$\left| \int_{\beta_r} f(z)\,dz \right| \leq \sup_{z\in\beta_r} |f(z)| \cdot \ell(\beta_r)$$

$$\leq \frac{1}{r^2-1} \cdot \pi r = \frac{\pi r}{r^2-1} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 ,$$

missä käytimme kolmioepäyhtälöön perustuvaa havaintoa

$$|1+z^2| \geq |z^2| - |1| = |z|^2 - 1 = r^2 - 1$$

kun $|z| = r$

josta saadaan $|f(z)| = \dfrac{1}{|1+z^2|} \leq \dfrac{1}{r^2-1}$ kun $z \in \beta_r$.
Yhdistämällä ylläolevat, päättelemme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{r\to\infty} \left(\int_{[-r,r]} f(z)\,dz \right)$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left(\oint_\gamma f(z)\,dz - \int_{\beta_r} f(z)\,dz \right)$$

$$= \pi - \lim_{r\to\infty} \left(\int_{\beta_r} f(z)\,dz \right) = \pi - 0 = \pi .$$

Residylaskenta yleistää ylläolevaa tekniikkaa ja tekee sen systemaattisemmaksi. Keskeisessä roolissa on analyyttisten funktioiden käyttäytyminen erikoispisteissä eli singulariteeteissa ja näiden funktioiden Laurentin kehitelmät tällaisten pisteiden läheisyydessä.

Palautetaan mieleen tubs Laurentin sarjoista.

Lause 5.13 (Laurentin sarja)

Olkoon $f: G \to \mathbb{C}$ analyyttinen alueessa $G \subset \mathbb{C}$, joka sisältää rengasalueen

$$A(z_0; r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

Silloin kaikilla $z \in A(z_0; r, R)$ pätee

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n ,$$

missä

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1+n}} \, d\zeta \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad r < \rho < R.$$

Analyyttisen funktion $f: G \to \mathbb{C}$ eristettyjä erikoispisteitä ovat sellaiset $z_0 \in \partial G$, joilla jokin z_0-keskinen punkteerattu kiekko sisältyy alueeseen: $B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subset G$ $(R > 0)$.
Silloin funktiolla f on punkteeratussa kiekossa suppeneva Laurentin kehitelmä

$$(\star): \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{kun} \quad 0 < |z - z_0| < R.$$

Tämän kehitelmän negatiivisten potenssien kertoimet kertovat funktion kvalitatiivisesta käyttäytymisestä pisteen z_0 läheisyydessä.

Erikoispisteiden luokittelu

Analyyttisen funktion käyttäytyminen erikoispisteen läheisyydessä voi olla kolmea eri tyyppiä. Karakterisoimme tyypit yhtäpitävillä ehdoilla seuraavissa kolmessa lauseessa — erityisesti jokaiselle tapaukselle saadaan yksinkertainen karakterisaatio Laurentin kehitelmän perusteella.

Lause (Poistuvien erikoispisteiden karakterisaatio)

Olkoon $f: G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $z_0 \in \partial G$ sen erikoispiste. Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(P-1): Laurentin kehitelmän ⊛ kertoimille pätee $a_n = 0$ $\forall n < 0$.

(P-2): On olemassa analyyttinen $\tilde{f}: G \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ siten, että $\tilde{f}(z) = f(z)$ $\forall z \in G$.

(P-3): Raja-arvo $\lim_{z \to z_0} f(z)$ on olemassa ja äärellinen (eli $\mathbb{C}$:ssä).

(P-4): Funktio f on rajoitettu jossakin punkteeratussa kiekossa $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, $\delta > 0$.

Todistus: Osoitetaan $(P\text{-}1) \Rightarrow (P\text{-}2) \Rightarrow (P\text{-}3) \Rightarrow (P\text{-}4) \Rightarrow (P\text{-}1)$.

(P-1) ⇒ (P-2): Jos $a_n = 0$ $\forall n < 0$, niin Laurentin kehitelmä on tavallinen potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, jolloin asettamalla $\tilde{f}(z_0) = a_0$ saadaan analyyttisyys voimaan myös pisteessä z_0.

(P-2) ⇒ (P-3): Analyyttinen funktio $\tilde{f}$ on myös jatkuva, joten

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_0) \in \mathbb{C}.$$

(P-3) $\Rightarrow$ (P-4): Raja-arvon $\lim_{z \to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$ määritelmän mukaan on erityisesti olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(z) - a| < 1$ kun $0 < |z - z_0| < \delta$, jolloin kolmioepäyhtälöstä saadaan $|f(z)| < |a| + 1$. Siis f on rajoitettu joukossa $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$.

(P-4) $\Rightarrow$ (P1): Oletetaan rajoittuneisuus: $|f(z)| \leq M$ kun $0 < |z - z_0| < \delta$. Cauchyn arvio toimii myös Laurentin sarjan negatiivisten potenssien kertoimille: kun $n < 0$ ja $0 < r < \delta$, saadaan

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1+n}} d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{1+n}} \ell(\partial B(z_0, r)) = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{1+n}} 2\pi r$$

$$= \frac{M}{r^n} \xrightarrow[r \to 0]{(n<0)} 0.$$

Siis $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$. $\square$

Lause (Napojen karakterisaatio)

Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $z_0 \in \partial G$ sen erikoispiste. Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(N-1): Laurentin kehitelmässä $\circledast$ on äärellisen monta nollasta eroavaa negatiivisen potenssin kerrointa: jollakin $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ pätee $a_{-m} \neq 0$ ja $a_n = 0$ kun $n < -m$.

(N-2): Jollakin $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ funktiolla $z \mapsto (z - z_0)^m \cdot f(z)$ on poistuva erikoispiste ja nollasta eroava raja-arvo pisteessä z_0.

(N-3): $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

<u>Todistus</u> Osoitetaan (N-1) $\Rightarrow$ (N-2) $\Rightarrow$ (N-3) $\Rightarrow$ (N-1).

(N-1) $\Rightarrow$ (N-2): Jos $a_{-m} \neq 0$ ja $a_n = 0 \ \forall n < -m$, niin

$$(z-z_0)^m \cdot f(z) = (z-z_0)^m \cdot \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z-z_0)^k.$$

Tällä funktiolla on analyyttinen jatko ja raja-arvo $a_{-m} \neq 0$ pisteessä z_0.

(N-2) $\Rightarrow$ (N-3): Jos $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m \cdot f(z) = a \neq 0$, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\left| (z-z_0)^m \cdot f(z) - a \right| < \frac{|a|}{2} \quad \text{kun} \quad 0 < |z-z_0| < \delta,$$

jolloin voidaan arvioida

$$|f(z)| = \frac{1}{|z-z_0|^m} \cdot \left| a + (z-z_0)^m \cdot f(z) - a \right|$$

$$\geq \frac{1}{|z-z_0|^m} \left(|a| - \left| (z-z_0)^m f(z) - a \right| \right)$$

$$\geq \frac{|a|}{2} \cdot \frac{1}{|z-z_0|^m} \xrightarrow[|z-z_0| \to 0]{} \infty.$$

(N-3) $\Rightarrow$ (N-1): Jos $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, niin funktio $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ on rajoitettu ja analyyttinen jossakin punkteeratussa kiekossa $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ ja $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Siksi tällä funktiolla on poistuva erikoispiste ja Taylorin kehitelmä

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (z-z_0)^n,$$

jonka vakiotermi häviää, $b_0 = 0$. Jos $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ on pienin indeksi, jolla $b_m \neq 0$, niin

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=m}^{\infty} b_n \cdot (z-z_0)^n = (z-z_0)^m \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_{m+k} \cdot (z-z_0)^k}_{=: g(z)}$$

$$= (z-z_0)^m \cdot g(z) \qquad \text{missä } g(z_0) = b_m \neq 0.$$

Nyt voidaan kirjoittaa

$$f(z) = (z-z_0)^{-m} \underbrace{\frac{1}{g(z)}}_{\text{analyyttinen } z_0\text{:n ympäristössä}} = (z-z_0)^{-m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{k=-m}^{\infty} c_{k+m} (z-z_0)^k.$$

$\square$

Lause (Oleellisten erikoispisteiden karakterisaatio)

Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $z_0 \in \partial G$ sen erikoispiste. Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(O-1): Laurentin kehitelmässä $\circledast$ on äärettömän monta nollasta eroavaa negatiivista kerrointa: $\limsup_{k \to \infty} |a_{-k}| \neq 0$.

(O-2): Kaikilla $0 < \delta < R$, kuvajoukko $f(B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\})$ on tiheä, eli sen sulkeuma on koko $\mathbb{C}$.
(Kuvajoukossa on pisteitä mielivaltaisen lähellä mitä tahansa kompleksilukua.)

(O-3): Raja-arvoa $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ei ole olemassa laajennetussa kompleksitasossa $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Todistus: Osoitetaan $(O\text{-}1) \Rightarrow (O\text{-}2) \Rightarrow (O\text{-}3) \Rightarrow (O\text{-}1)$.

(O-1) ⇒ (O-2): Oletetaan, että kehitelmässä $\circledast$ on äärettömän monta nollasta eroavaa negatiivisen potenssin kerrointa. Tehdään vastaoletus, että jokin $c \in \mathbb{C}$ ei ole kuvajoukon $f(B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\})$ sulkeumassa. Silloin on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $|f(z) - c| > \varepsilon$ kun $0 < |z - z_0| < \delta$. Erityisesti funktio
$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$$
on analyyttinen ja rajoitettu joukossa $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, joten sillä on poistuva erikoispiste z_0, johon se voidaan jatkaa analyyttiseksi asettamalla $g(z_0) = \lim_{z \to z_0} g(z) \in \mathbb{C}$.

Jos $g(z_0) \neq 0$, niin $z \mapsto \frac{1}{g(z)}$ on hyvin määritelty ja analyyttinen jossakin z_0:n ympäristössä. Mutta silloin myös $f(z) = c + \frac{1}{g(z)}$, joten f:n erikoispiste olisi poistuva, mikä on ristiriita.

Toisaalta jos $g(z_0) = 0$, niin $f(z) = c + \frac{1}{g(z)} \to \infty$, joten f:n erikoispiste olisi napa, mikä on myös ristiriita.

Olemme joka tapauksessa päätyneet ristiriitaan, joten vastaoletus oli väärä.

(O-2) $\Rightarrow$ (O-3): Jos kaikilla $\delta > 0$ kuvajoukossa $f(B(z_0,\delta) \setminus \{z_0\})$ on pisteitä mielivaltaisen lähellä mitä tahansa kompleksilukua, niin raja-arvo $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ei selvästi voi olla olemassa.

(O-3) $\Rightarrow$ (O-1): Jos raja-arvo $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ei ole olemassa ($\mathbb{C} \cup \{\infty\}$:ssä) niin z_0 ei voi olla poistuva erikoispiste eikä napa. Siis sillä on oltava äärettömän monta nollasta eroavaa negatiivisen potenssin kerrointa. $\square$

Karakterisaatioiden perusteella voidaan antaa seuraava määritelmä erikoispisteiden luokittelusta.

Määritelmä: Analyyttisen funktion $f : G \to \mathbb{C}$ erikoispiste $z_0 \in \partial G$ on

- poistuva erikoispiste, jos mikä tahansa (ja siten kaikki) ehdoista (P-1), (P-2), (P-3), (P-4) on voimassa.
- napa, jos mikä tahansa (ja siten kaikki) ehdoista (N-1), (N-2), (N-3) on voimassa.
- oleellinen erikoispiste, jos mikä tahansa (ja siten kaikki) ehdoista (O-1), (O-2), (O-3) on voimassa.

Residylause

Määritelmä 6.1 Olkoon $f: G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $z_0 \in \partial G$ sen erikoispiste. Punkteeratussa kiekossa $B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subset G$ suppenevan Laurentin sarjan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$$

kerrointa a_{-1} sanotaan funktion f residyksi pisteessä z_0 ja merkitään

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}.$$

Residyt liittyvät keskeisesti umpinaisia polkuja pitkin otettujen viivaintegraalien arvoihin. Tarvitaan kuitenkin polkujakin koskeva määritelmä.

Määritelmä Olkoon $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ umpinainen polku ja $z_0 \in \mathbb{C}$ piste, joka ei sijaitse polulla. Polun γ kierrosluku $n(\gamma; z_0)$ pisteen z_0 suhteen määritellään kaavalla

$$n(\gamma; z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz.$$

Huom.:

- Jos γ on positiivisesti suunnistettu ympyrä $\partial B(z_0, r)$, niin kierrosluku on
$$n(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i = +1.$$
- Jos γ on negatiivisesti suunnistettu ympyrä $\partial B(z_0, r)$, niin kierrosluku on
$$n(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i}(-2\pi i) = -1.$$
- Yleisemminkin: $n(\overleftarrow{\gamma}, z_0) = -n(\gamma, z_0)$.

- Jos piste z_0 ei ole polun γ kiertämissä alueissa, niin $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ on analyyttinen näissä alueissa ja Cauchyn integraalilauseen perusteella

$$n(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0.$$

- Umpinaisten polkujen konkatenaatiolle pätee

$$n(\gamma_1 \cdots \gamma_k; z_0) = \sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j; z_0).$$

- Erityisesti polulle, joka kiertää ympyrän $\partial B(z_0, r)$ k kertaa positiiviseen ja l kertaa negatiiviseen kiertosuuntaan pätee

$$n(\gamma; z_0) = k - l.$$

- Alueessa $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ homotooppisille umpinaisille poluille γ ja $\tilde{\gamma}$ pätee

$$n(\gamma; z_0) = n(\tilde{\gamma}; z_0).$$

(Yleinen todistus sivuutetaan.)

- Fakta: Kierrosluku on aina kokonaisluku,

$$n(\gamma; z_0) \in \mathbb{Z}.$$

(Yleinen todistus sivuutetaan.)

Lause 6.1 (Residylause)

Olkoon G alue ja $z_1, z_2, z_3, \ldots \in G$ äärellinen tai ääretön jono pisteitä, joilla ei ole kasaantumispistettä alueessa G. Olkoon

$$f : G \setminus \{z_1, z_2, z_3, \ldots\} \to \mathbb{C}$$

analyyttinen funktio ja γ umpinainen nollahomotooppinen polku alueessa G, joka ei kulje pisteiden $z_1, z_2, z_3, \ldots$ kautta. Tällöin pätee

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k n(\gamma; z_k) \cdot \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$

missä oikean puolen summassa on vain äärellisen monta nollasta eroavaa termiä.

Todistuksen hahmotelma:

Polun γ kompaktisuudesta ja siitä, ettei jonolla $z_1, z_2, z_3, \ldots$ ole kasaantumispisteitä G:ssä seuraa, että kierrosluku $n(\gamma; z_k)$ on nollasta eroava vain äärellisen monella k (yksityiskohtainen topologinen perustelu sivuutetaan tässä). Rajoittumalla sopivaan osa-alueeseen $G' \subset G$ voidaan siksi olettaa, että pistejono oli äärellinen $z_1, z_2, \ldots, z_\ell$. Tarkastellaan tätä tapausta.

Funktiolla f on pisteissä z_k, $k = 1, 2, \ldots, \ell$, Laurentin sarjat

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(k)} \cdot (z - z_k)^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \cdot (z - z_k)^n}_{=: f_k(z)} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} \cdot (z - z_k)^n}_{=: g_k(z)},$$

jotka suppenevat punkteeratuissa kiekoissa $B(z_k, R_k) \setminus \{z_k\}$. Siis positiivisista potensseista muodostettu sarja $f_k(z)$ suppenee kun $|z - z_k| < R_k$ ja negatiivisista potensseista muodostettu sarja $g_k(z)$ suppenee kun $|z - z_k| > 0$ eli kunhan $z \neq z_k$.

Tarkastellaan funktiota h, joka saadaan vähentämällä f:stä kaikkien näiden Laurentin sarjojen negatiiviset osat:

$$h(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{\ell} g_k(z).$$

Tämä funktio voidaan jatkaa analyyttiseksi koko alueeseen G, koska sen erikoispisteet $z_1, z_2, \dots, z_\ell$ ovat selvästi poistuvia. Cauchyn integraalilauseesta saadaan siis

$$0 = \oint_\gamma h(z)\,dz = \oint_\gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{\ell} \oint_\gamma g_k(z)\,dz$$

eli

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\ell} \oint_\gamma g_k(z)\,dz.$$

Riittää nyt osoittaa, että

$$\begin{aligned} \oint_\gamma g_k(z)\,dz &= n(\gamma; z_k) \cdot \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \cdot 2\pi i \\ &= n(\gamma; z_k) \cdot a_{-1}^{(k)} \cdot 2\pi i \end{aligned}$$

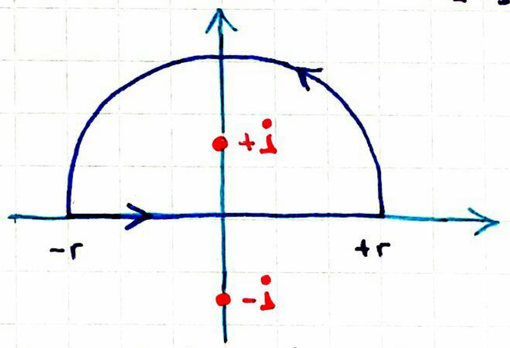
Käsittelemällä residyä vastaava kehitelmän termi erikseen, saadaan haluttu tulos:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma g_k(z)\,dz &= \oint_\gamma \Big(\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} (z - z_k)^n \Big) dz \\ &= \underbrace{\oint_\gamma \frac{a_{-1}^{(k)}}{z - z_k}\,dz}_{= a_{-1}^{(k)} \cdot 2\pi i \cdot n(\gamma; z_k)} + \underbrace{\oint_\gamma \Big(\sum_{n=-\infty}^{-2} a_n^{(k)} (z - z_k)^n \Big) dz}_{=0}. \end{aligned}$$

koska $\sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{1}{n+1} a_n^{(k)} (z - z_k)^{n+1}$ on tämän integraalifunktio. □

Esimerkki Tarkastellaan reaalista integraalia
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \quad := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx .$$

Analyyttisellä funktiolla
$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} \qquad f: \mathbb{C}\setminus\{-i,+i\} \to \mathbb{C}$$
on erikoispisteissä $+i$ ja $-i$ toisen kertaluvun navat. Määrittelemällä umpinainen polku γ_r janan $[-r,+r]$ ja ylemmässä puolitasossa sijaitsevan ympyrän $\partial B(0,r)$ kaaren osan β_r konkatenaationa (kuten aiemmassa esimerkissä) saadaan residylauseesta (olettaen $r>1$)
$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=i} f(z).$$



Osien kontribuutiot integraaliin ovat, kun $r\to\infty$,
$$\int_{[-r,r]} f(z)\,dz = \int_{[-r,r]} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz$$
$$= \int_{-r}^{+r} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \xrightarrow[r\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\left|\int_{\beta_r} f(z)\,dz\right| \le \int_{\beta_r} \frac{1}{|z^2+1|^2}\,|dz|$$
$$\le \frac{1}{(r^2-1)^2}\,\ell(\beta_r) = \frac{\pi r}{(r^2-1)^2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0.$$

Siis
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{r\to\infty}\left(\oint_{\gamma_r} f(z)\,dz - \int_{\beta_r} f(z)\,dz\right)$$
$$= 2\pi i\cdot \operatorname{Res}_{z=i} f(z) - 0.$$

Riittää siis selvittää funktion f residy pisteessä i. Kirjoitetaan

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} g(z) ,$$

missä $g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$ on analyyttinen pisteen i ympäristössä. Sillä on siksi Taylorin sarja

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(i)}{n!}(z-i)^n$$

$$= g(i) + (z-i)\cdot g'(i) + (z-i)^2 \cdot \frac{g''(i)}{2} + \dots ,$$

jonka avulla f:n Laurentin kehitelmäksi saadaan

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} g(z)$$

$$= \frac{g(i)}{(z-i)^2} + \frac{g'(i)}{z-i} + \tfrac{1}{2} g''(i) + \dots .$$

Residyksi saadaan

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = g'(i) = \frac{-2}{(z+i)^3}\Big|_{z=i}$$

$$= \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i} .$$

Olemme siis näyttäneet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2} .$$

RESIDYLASKENTAA

Palautetaan mieliin:

- Jos f on analyyttinen funktio, jonka Laurentin kehitelmä erikoispisteen z_0 läheisyydessä on
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n \quad \left(\text{kun } 0<|z-z_0|<R\right),$$
niin kerrointa a_{-1} kutsutaan funktion f residyksi pisteessä z_0 ja merkitään
$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) := a_{-1}.$$

- Residylauseen (Lause 6.1) mukaan jos $z_1, z_2, z_3, \ldots \in G$ on jono, jolla ei ole kasautumispisteitä G:ssä, ja funktio
$$f : G \setminus \{z_1, z_2, \ldots\} \to \mathbb{C}$$
on analyyttinen ja γ on alueessa G nollahomotooppinen polku, joka ei kulje pisteiden $z_1, z_2, \ldots$ kautta, niin
$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_k n(\gamma; z_k) \cdot \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$
missä $n(\gamma; z_k) \in \mathbb{Z}$ on polun γ kierrosluku pisteen z_k suhteen.

Edellisellä luennolla näimme esimerkkejä siitä, miten residylauseella voidaan laskea sellaisten rationaalifunktioiden
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
integraalit
$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx,$$
missä $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ ja $Q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Trigonometristen integraalien laskeminen

Suoraviivainen sovellus residylauseelle on muotoa

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\, dt$$

olevien integraalien laskeminen, kun R on kahden muuttujan rationaalifunktio.

Nimittäin käyttämällä yksikköympyrän tavallista parametrisaatiota

$$\gamma(t) = e^{it} \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

ja derivaatan $\dot{\gamma}(t) = i e^{it} = i \cdot \gamma(t)$ muodosta nähtävää kaavaa

$$\text{"}\frac{dz}{i \cdot z}\text{"} = \frac{\dot{\gamma}(t)\, dt}{i \cdot \gamma(t)} = dt \qquad (\text{kun } z = \gamma(t))$$

sekä trigonometristen funktioiden määritelmiä

$$\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{\gamma(t) + \gamma(t)^{-1}}{2}$$

$$\sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{\gamma(t) - \gamma(t)^{-1}}{2i}$$

saadaan

$$\oint_\gamma R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{i \cdot z} = \int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\, dt.$$

Vasemman puolen viivaintegraalissa esiintyy integroitavana kompleksimuuttujan z lauseke, joka sekin on rationaalifunktio, joten sen erikoispisteet ovat napoja. Integraaliin kontribuoivat residyt yksikköympyrän sisään jäävissä navoissa.

Esimerkki Lasketaan $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sin(t)}\,dt$.

Ylläolevan mukaisesti, käytetään parametrisaatiota

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

ja asetetaan $R(c,s) = \frac{1}{3+2s}$, jolloin tehtävä on laskea

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,dt = \oint_\gamma R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_\gamma \frac{1}{3+2\cdot\frac{1}{2i}(z-z^{-1})}\,\frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_\gamma \frac{1}{z^2+3iz-1}\,dz.$$

Toisen asteen polynomin $z^2+3iz-1$ juuret ovat $z_\pm = \frac{1}{2}(-3i \pm i\sqrt{5})$, ja polynomilla on tekijöihinjako

$$z^2+3iz-1 = \left(z+\frac{3}{2}i-\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\left(z+\frac{3}{2}i+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)$$

$$= (z-z_+)\cdot(z-z_-).$$

Integrandilla on siis ensimmäisen kertaluvun navat pisteissä z_+, z_-. Vain erikoispiste z_+ sijaitsee yksikköympyrän sisäpuolella ja residy siinä on

$$\operatorname{Res}_{z=z_+} \frac{1}{z^2+3iz-1} = \operatorname{Res}_{z=z_+} \frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)}$$

$$= \left.\frac{1}{z-z_-}\right|_{z=z_+} = \frac{1}{z_+-z_-} = \frac{1}{i\sqrt{5}}.$$

Residylauseen perusteella saadaan siis

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cdot\sin(t)}\,dt = \oint_\gamma \frac{1}{z^2+3iz-1}\,dz$$

$$= 2\pi i\cdot \operatorname{Res}_{z=z_+} \frac{1}{z^2+3iz-1} = 2\pi i\cdot\frac{1}{i\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi hieman erilaista tapausta.

Esimerkki Olkoon $m \in \{3,4,5,\dots\}$. Selvitetään integraali

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^m}\,dx := \lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{x}{1+x^m}\,dx .$$

Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = \frac{z}{1+z^m}$$

jolla on navat astetta m olevan polynomin z^m+1 juurissa z_k, $k=1,2,\dots,m$:

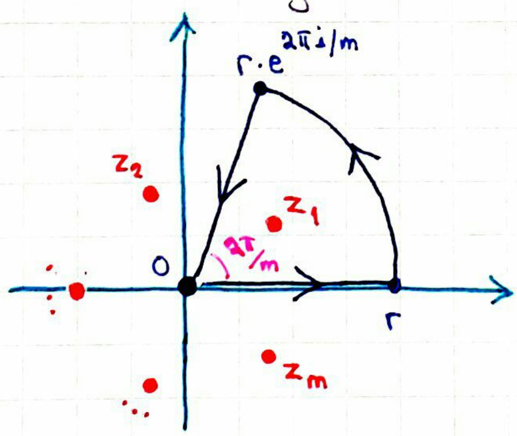
$$z_k = \exp\left(i\,\frac{\pi(2k-1)}{m}\right).$$

Huomataan myös, että funktio on lähes muuttumaton kulmalla $\frac{2\pi}{m}$ kompleksitasoa kierrettäessä:

$$f(z\cdot e^{i2\pi/m}) = \frac{z\cdot e^{i2\pi/m}}{1+(z\cdot e^{i2\pi/m})^m} = \frac{z\cdot e^{i2\pi/m}}{1+z^m}$$

$$= e^{i2\pi/m}\cdot f(z).$$

Valitaan integroimisreitti γ kuten kuvassa



$(r>1)$

eli konkatenaatio seuraavista paloista:

- $\alpha(t) = t \quad (t\in[0,r])$ — jana $[0,r]$
- $\beta(t) = r\cdot e^{it} \quad (t\in[0,\frac{2\pi}{m}])$ — ympyrän $\partial B(0,r)$ kaaren osa
- $\overleftarrow{\eta}$, missä $\eta(t) = e^{2\pi i/m}\cdot t \quad (t\in[0,r])$ — jana $[r\cdot e^{2\pi i/m}, 0]$

Nyt
$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz + \int_{\overleftarrow{\eta}} f(z)\,dz.$$

Selvästi $\int_\alpha f(z)\,dz = \int_0^r \frac{t}{1+t^m}\,dt.$

Vastaavasti janalle $\overleftarrow{\eta}$ saadaan
$$\int_{\overleftarrow{\eta}} f(z)\,dz = -\int_\eta f(z)\,dz = -\int_0^r f(\eta(t))\,\dot{\eta}(t)\,dt$$
$$= -\int_0^r \underbrace{f(e^{2\pi i/m}\cdot t)}_{= e^{2\pi i/m}\cdot f(t)}\, e^{2\pi i/m}\,dt$$
$$= -e^{4\pi i/m}\cdot \int_0^r \frac{t}{1+t^m}\,dt.$$

Ympyrän kaaren osalle β taas
$$\left|\int_\beta f(z)\,dz\right| \le \ell(\beta)\cdot \frac{r}{r^m-1} = \frac{\frac{2\pi}{m}\cdot r^2}{r^m-1} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0.$$

Saadaan
$$\lim_{r\to\infty} \oint_\gamma f(z)\,dz = \left(1-e^{4\pi i/m}\right)\cdot \int_0^\infty \frac{t}{1+t^m}\,dt.$$

Toisaalta polun γ sisäpuolelle jää funktion f erikoispisteistä vain $z_1 = \exp(i\pi/m)$, jonka polku kiertää positiiviseen kiertosuuntaan. Residylauseesta saadaan
$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z).$$

Residyn laskemiseksi kehitetään lausekkeessa
$$f(z) = \frac{z}{z^m+1}$$
sekä osoittaja että nimittäjä Taylorin sarjoiksi pisteessä $z_1 = e^{i\pi/m}$:
$$z = z_1 + (z-z_1) \qquad \text{ja}$$
$$z^m+1 = 0 + (z-z_1)\cdot g'(z_1) + (z-z_1)^2\cdot \frac{g''(z_1)}{2} + \dots$$

missä $\quad g(z) = z^m - 1 \quad$ ja siten

$$g'(z) = m \cdot z^{m-1} \qquad g''(z) = (m^2 - m) z^{m-2}, \ldots$$

Siis

$$f(z) = \frac{z_1 + (z - z_1)}{0 + m \cdot z_1^{m-1} \cdot (z - z_1) + \frac{1}{2}(m^2 - m) z_1^{m-2} (z - z_1)^2 + \ldots}$$

$$= \frac{z_1 + (z - z_1)}{-m \cdot z_1^{-1} (z - z_1) - \frac{1}{2}(m^2 - m) z_1^{-2} \cdot (z - z_1)^2 + \ldots}$$

Nähdään, että

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \cdot f(z)$$

$$= \lim_{z \to z_1} \frac{z_1 + (z - z_1)}{-m z_1^{-1} - \frac{1}{2}(m^2 - m) z_1^{-2} (z - z_1) + \ldots}$$

$$= -\frac{1}{m} z_1^2 = -\frac{1}{m} e^{i 2\pi / m}.$$

Yhdistämällä aiempaan olemme johtaneet

$$\int_0^\infty \frac{t}{1 + t^m} \, dt = \frac{1}{1 - e^{4\pi i / m}} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{-1}{m} \cdot \frac{e^{i 2\pi / m}}{1 - e^{i 4\pi / m}} = + \frac{2\pi i}{m} \frac{1}{e^{2\pi i / m} - e^{-2\pi i / m}}$$

$$= \frac{\pi}{m \cdot \sin(2\pi / m)}.$$

Erityisesti tapauksissa $m = 3$ ja $m = 4$ saadaan

$$\int_0^\infty \frac{x}{1 + x^3} \, dx = \frac{\pi}{3 \cdot \sin(2\pi/3)} = \frac{2\pi}{3 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{1 + x^4} \, dx = \frac{\pi}{4 \cdot \sin(2\pi/4)} = \frac{\pi}{4}.$$

Seuraavassa esimerkissä integraali ei ole rationaalifunktio vaan siinä esiintyy myös yleinen (ei-kokonaisluku) potenssifunktio.

Esimerkki Olkoon $0<\alpha<1$. Selvitetään integraali

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,dx .$$

Potenssifunktion $x \mapsto x^{-\alpha}$ $(\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+)$ kompleksiseen yleistykseen sisältyy haaran valintoja. Jos logaritmifunktiolle on valittu jokin haara $\mathrm{Log}: G \longrightarrow \mathbb{C}$, niin kaava

$$z^{-\alpha} := e^{-\alpha \cdot \mathrm{Log}(z)}$$

määrittelee potenssifunktiolle analyyttisen haaran samassa alueessa G. Valitaan logaritmille haara

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i \cdot \arg(z),$$

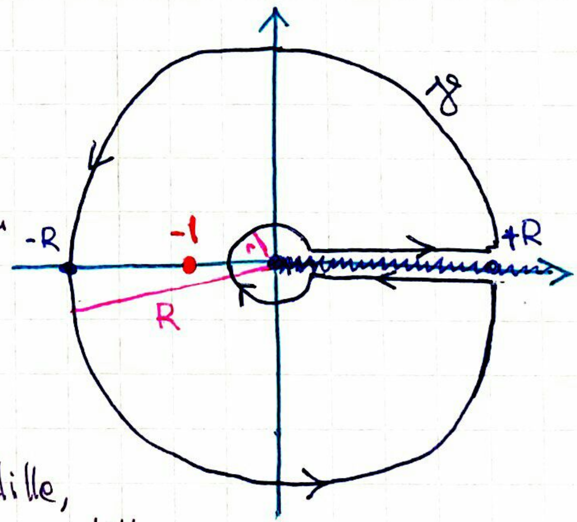
missä $0 < \arg(z) < 2\pi$. Tarkastellaan nyt funktion

$$f(z) = \frac{z^{-\alpha}}{1+z} = \frac{\exp(-\alpha \cdot \mathrm{Log}(z))}{1+z}$$
$$f: \mathbb{C} \setminus ([0,\infty) \cup \{-1\}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

viivaintegraalia umpinaisella polulla γ:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz .$$

Valitaan kuvan mukainen umpinainen polku γ (jatkuvuuden perusteella positiivisen reaaliakselin ylä- ja alapuolella olevat janat voidaan viedä reaaliakselille, kunhan käytetään integrandille raja-arvoa vastaavalta puolelta).



$(0<r<1<R)$

Polku γ on siis konkatenaatio seuraavista paloista:

- jana $[r, R]$ positiivisen reaaliakselin yläpuolella
  (Tarkemmin: jana $[r+i\varepsilon, R+i\varepsilon]$, ottaen lopuksi raja-arvo kun $\varepsilon \to 0$)
- ympyrän $\partial B(0,R)$ positiivisesti suunnistettu kaari β_R
  (Tarkemmin: pisteet $R+i\varepsilon$ ja $R-i\varepsilon$ yhdistävä origokeskisen ympyrän kaaren osa alueessa $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$.)
- jana $[R, r]$ positiivisen reaaliakselin alapuolella
  (Tarkemmin: jana $[R-i\varepsilon, r-i\varepsilon]$.)
- ympyrän $\partial B(0,r)$ negatiivisesti suunnistettu kaari $\overleftarrow{\beta_r}$
  (Tarkemmin: pisteet $r-i\varepsilon$ ja $r+i\varepsilon$ yhdistävä origokeskisen ympyrän kaaren osa alueessa $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$.)

Polku γ kiertää funktion $f(z) = \dfrac{z^{-\alpha}}{1+z}$ erikoispisteen -1 positiiviseen kiertosuuntaan, joten residylauseen perusteella

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{\exp(-\alpha \cdot \operatorname{Log}(z))}{1+z}$$

$$= 2\pi i \cdot \exp(-\alpha \cdot \operatorname{Log}(-1))$$

$$= 2\pi i \cdot e^{-\alpha \cdot i\pi}.$$

Toisaalta

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_{[r,R]}}_{\text{yläpuolelta}} f(z)\,dz + \int_{\beta_R} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{[R,r]}}_{\text{alapuolelta}} f(z)\,dz + \int_{\overleftarrow{\beta_r}} f(z)\,dz.$$

Tavalliseen tapaan arvioidaan

$$\left| \int_{\beta_R} f(z)\,dz \right| \le \ell(\beta_R) \cdot \frac{R^{-\alpha}}{R-1} = \frac{2\pi \cdot R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\left| \int_{\overleftarrow{\beta_r}} f(z)\,dz \right| \le \ell(\overleftarrow{\beta_r}) \cdot \frac{r^{-\alpha}}{1-r} = \frac{2\pi\, r^{1-\alpha}}{1-r} \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Positiivisen reaaliakselin pisteessä $x > 0$ integrandin raja yläpuolelta on

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x+i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\exp\left(-\alpha \cdot \overbrace{\log|x+i\varepsilon|}^{\to \log|x|} - \alpha \cdot i \cdot \overbrace{\arg(x+i\varepsilon)}^{\to 0}\right)}{1+x+i\varepsilon}$$

$$= \frac{\exp(-\alpha \cdot \log|x|)}{1+x} = \frac{x^{-\alpha}}{1+x}$$

ja alapuolelta vastaavasti

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x-i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\exp\left(-\alpha \cdot \overbrace{\log|x-i\varepsilon|}^{\to \log|x|} - \alpha \cdot i \cdot \overbrace{\arg(x-i\varepsilon)}^{\to 2\pi}\right)}{1+x-i\varepsilon}$$

$$= \frac{\exp(-\alpha \cdot \log|x| - i\alpha 2\pi)}{1+x} = \frac{x^{-\alpha} \cdot e^{-i\alpha 2\pi}}{1+x}.$$

Ottamalla näiden lisäksi huomioon janojen suunnistukset, saadaan

$$\int_{\substack{[r,R] \\ \text{yläpuolelta}}} f(z)\,dz + \int_{\substack{[R,r] \\ \text{alapuolelta}}} f(z)\,dz$$

$$= \int_r^R \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,dx - \int_r^R \frac{x^{-\alpha} \cdot e^{-i\alpha 2\pi}}{1+x}\,dx$$

$$= \left(1 - e^{-i\alpha 2\pi}\right) \cdot \int_r^R \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,dx$$

$$\xrightarrow[\substack{R \to \infty \\ r \to 0}]{} \left(1 - e^{-i\alpha 2\pi}\right) \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,dx$$

Yhdistämällä tulokset, on saatu

$$2\pi i \cdot e^{-i\pi\alpha} = \oint_\gamma f(z)\,dz \xrightarrow[\substack{R \to \infty \\ r \to 0}]{} \left(1 - e^{-i\alpha 2\pi}\right) \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,dx,$$

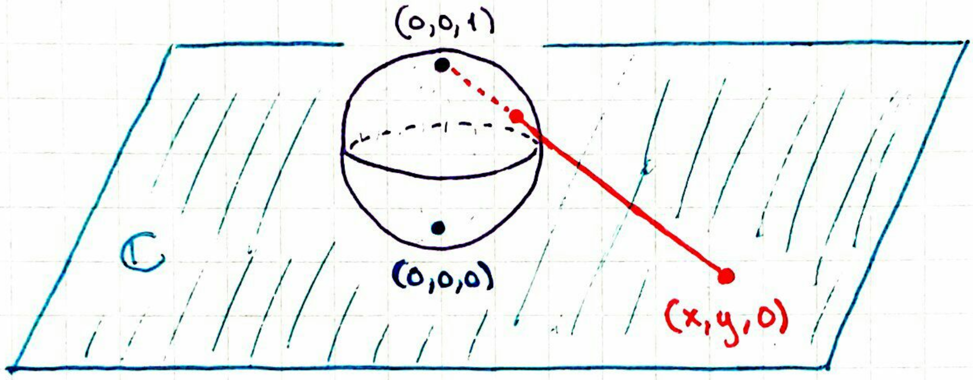
josta ratkaistaan

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,dx = \frac{2\pi i\, e^{-i\pi\alpha}}{1 - e^{-i2\pi\alpha}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

LAAJENNETTU KOMPLEKSITASO JA RIEMANNIN PALLO

Olemme tarkastelleet kompleksitasoa $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ja raja-arvojen yhteydessä formaalisti myös pistettä äärettömyydessä.

<u>Määr.</u> Laajennettu kompleksitaso on $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.



Laajennetulla kompleksitasolla on kolmiulotteisen kuulan reunan eli kaksiulotteisen pallopinnan topologia ja geometria. Vastaavuuden antaa n.k. stereografinen projektio.

Olkoon $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ tavallinen kolmiulotteinen avaruus ja tulkitaan kompleksitaso osajoukkona, jossa kolmas koordinaatti on nolla — upotuksen $x + iy \longmapsto (x,y,0) \in \mathbb{R}^3$ kautta.

Olkoon $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ $(0,0,\frac{1}{2})$-keskisen, $\frac{1}{2}$-säteisen pallon pinta

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}\}.$$

Pallon "etelänapa" on origo $(0,0,0)$ ja "pohjoisnapa" on piste $(0,0,1)$.

Jos piirretään "pohjoisnavalta" $(0,0,1)$ tason pisteeseen $(x,y,0)$ kulkeva jana, niin janalla on pohjoisnavan lisäksi täsmälleen yksi pallopinnan $\mathbb{S}^2$ piste. Tämä "stereografinen projektio" on bijektio kompleksitasosta $\mathbb{C}$ pohjoisnavan komplementtiin $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ pallopinnalla.

Esim. Olkoon $x+iy$ yksikköympyrällä, $x^2+y^2=1$. Silloin janan $[(0,0,1), (x,y,0)]$ keskipiste on $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{1}{2})$, joka sijaitsee pallopinnalla:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{4} = \frac{1}{4}$$

(itseasiassa "päiväntasaajalla $z=\frac{1}{2}$").

On luontevaa asettaa laajennetun kompleksitason $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ piste ∞ vastaamaan pohjoisnapaa $(0,0,1)$, jolloin saadaan bijektio

$$\hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \quad \text{(stereografinen projektio)}.$$

Tällä määritelmällä esim. kompleksilukujonon raja-arvo on ääretön (aiemmin määrittelemässämme mielessä) jos ja vain jos vastaava jono lähestyy pohjoisnapaa pallopinnan $\mathbb{S}^2$ luonnollisessa (kolmiulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ määräämässä) topologiassa.

Laajennettua kompleksitasoa $\hat{\mathbb{C}}$ sanotaankin myös Riemannin palloksi.