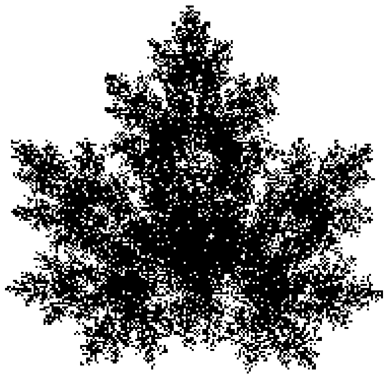
Mat-1.142 Matematiikan seminaari

Iteroitujen funktiosysteemien käytöstä kuvan kompressoinnissa

Kenrick Bingham[1]

9.5.1996



[1] http://www.hut.fi/~kenny/

1 Johdanto

Fraktaaleja piirrettäessä käytetään annettua yksinkertaista matemaattista sääntöä monimutkaisen kuvan luomiseen. Kuvan kompressoinnissa eli tiivistämisessä edetään toiseen suuntaan: kuva pyritään esittämään lyhyesti ja yksinkertaisesti.

Olisi siis luonnollinen ajatus yrittää etsiä annetulle kuvalle yksinkertaista matemaattista sääntöä, jolla voidaan kuvailla tuota kuvaa.

Iteroidut funktiosysteemit (engl. *iterated function system*, IFS) tarjoavat tähän erään menetelmän, kun tyydytään hieman informaatiota hävittävään (engl. *lossy*) tiivistämiseen.

2 Iteroidut funktiosysteemit ja niiden attraktorit

2.1 Kuvat ja metriset avaruudet

Tarkastellaan ensin IFS:ien teoriassa tarvittavia peruskäsitteitä. Niistä mainitaan koko joukko ominaisuuksia ja lauseita, jotka jätetään todistamatta. Todistuksia löytyy lähteestä [1].

Kuva määritellään usein tason värijakaumaksi. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi mustavalkokuvaa $\mathcal{K}$, jossa osa tason pisteistä on mustia, osa valkoisia. Täten kutakin kuvaa $\mathcal{K}$ vastaa yksikäsitteisesti joukko $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} \text{ on musta } \mathcal{K}\text{:ssa}\}$.

Käytännön kuvat ovat yleensä paitsi äärellisen kokoisia, jolloin K on rajoitettu joukko, myös äärellisellä tarkkuudella esitettyjä, jolloin K voidaan olettaa suljetuksi, ja siis kompaktiksi.

Iteroitujen funktiosysteemien teoria toimii yleisemminkin täydellisissä metrisissä avaruuksissa. Määritellään sitä varten yleisempi "kuva-avaruus" $\mathcal{H}(X, d)$:

Määritelmä 2.1 *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Tällöin $\mathcal{H}(X, d)$ on X:n kompaktien epätyhjien osajoukkojen joukko.*

Kuva voidaan nyt määritellä seuraavasti:

Määritelmä 2.2 Kuva *on joukon $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2, euklidinen)$ alkio.*

Pisteen etäisyys kompaktista, epätyhjästä joukosta määritellään luonnollisella tavalla.

Määritelmä 2.3 *Pisteen $x \in X$ etäisyys joukosta $A \in \mathcal{H}(X, d)$ on*

$$d(x, A) = \min \{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Pisteen etäisyys joukosta on hyvin määritelty, sillä etäisyys d saavuttaa jatkuvana funktiona pienimmän arvonsa kompaktissa joukossa A. Samasta syystä voidaan määritellä myös etäisyys kompaktista joukosta toiseen.

Määritelmä 2.4 *Etäisyys joukosta $A \in \mathcal{H}(X, d)$ joukkoon $B \in \mathcal{H}(X, d)$ on*

$$d(A, B) = \max \{d(x, B) \mid x \in A\}.$$

Se ei siis suinkaan kerro, mikä on lyhin etäisyys A:sta B:hen, vaan kuinka kauas B:stä päästään liikuttaessa joukossa A. Etäisyys joukosta toiseen ei yleisesti ole symmetrinen.

Esimerkki 2.1 *Olkoot* $A = [0, 1]$ *ja* $B = [2, 4]$. *Tällöin* $d(A, B) = d(0, B) = d(0, 2) = 2$, *mutta* $d(B, A) = d(4, A) = d(4, 1) = 3$.

Sitä, kuinka paljon metrisen avaruuden kaksi epätyhjää, kompaktia osajoukkoa "poikkeavat toisistaan", mittaa nyt niiden välinen Hausdorff-etäisyys.

Määritelmä 2.5 *Joukkojen* $A \in \mathcal{H}(X, d)$ *ja* $B \in \mathcal{H}(X, d)$ Hausdorff-etäisyys *on*

$$h(A, B) = \max \{d(A, B),\, d(B, A)\}.$$

Hausdorff-etäisyys soveltuu hyvin kahden joukon eroavuuden mitaksi, sillä se on metriikka.

Lause 2.1 *Olkoon* (X, d) *täydellinen metrinen avaruus. Tällöin* d*:n indusoima Hausdorff-etäisyys* h *on metriikka* $\mathcal{H}(X, d)$*:ssä. Metrinen avaruus* $(\mathcal{H}(X, d), h)$ *on täydellinen.*

Merkitään jatkossa metristä avaruutta $(\mathcal{H}(X, d), h)$ lyhyesti $\mathcal{H}(X, d)$:llä.

2.2 Kontraktiokuvaukset

Määritelmä 2.6 *Olkoon* (X, d) *metrinen avaruus. Kuvaus* $w : X \to X$ *on* kontraktiokuvaus (X:ssä), *jos on olemassa sellainen vakio* $s \in [0, 1)$, *että*

$$d(w(x), w(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Tällöin s *on* w*:n* kontraktiivisuuskerroin.

Kontraktiokuvauksia ovat siis s-Lipschitz-kuvaukset, missä $0 \leq s < 1$.

Esimerkki 2.2 *Olkoon* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *kompleksianalyyttinen kontraktiokuvaus, jonka kontraktiivisuuskerroin on* s, *ja olkoon* z_0 *sen kiintopiste. Tällöin* f*:n kertojalle* $\lambda = f'(z_0)$ *pätee*

$$|\lambda| = |f'(z_0)| = \left| \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \to z_0} \Bigg(\underbrace{|f(z) - f(z_0)|}_{\leq s|z - z_0|} \frac{1}{|z - z_0|} \Bigg) \leq s.$$

Siis z_0 *on attraktiivinen kiintopiste, kuten kontraktiokuvauslauseesta (2.2) kohta käy ilmi. [3]*

Koska sama päättely toimii myös muualla kuin kiintopisteissä, f*:n derivaatta on rajoitettu, ja siis Liouvillen lauseen mukaan vakio. Täten* f*:n täytyy olla ensimmäisen asteen polynomi. Kompleksianalyyttisiä kontraktiokuvauksia ei näin ollen ole kovin paljon.*

Lause 2.2 (Kontraktiokuvauslause) *Olkoon* (X, d) *täydellinen metrinen avaruus ja olkoon* $w : X \to X$ *kontraktiokuvaus. Tällöin* w*:llä on täsmälleen yksi kiintopiste* $x_w \in X$. *Se on attraktiivinen kiintopiste, jonka attraktioallas on koko* X.

Esimerkki 2.3 *Lauseen 2.1 mukaan $\mathcal{H}(X,d)$ on täydellinen metrinen avaruus. Kontraktiokuvaus $W : \mathcal{H}(X,d) \to \mathcal{H}(X,d)$, jonka kontraktiivisuuskerroin on s, kuvaa kaksi joukkoa, joiden Hausdorff-etäisyys on a, joukoiksi, joiden Hausdorff-etäisyys on enintään sa.*

Lähdettäessä mielivaltaisesta joukosta $B \in \mathcal{H}(X,d)$ iteroimaan W:llä saadaan jono joukkoja, jotka lähestyvät erästä raja-arvoa A, ts.

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists \text{ sellainen } n_0 \in \mathbb{N},\ \text{ että } n > n_0 \;\Rightarrow\; h(W^{\circ n}(B), A) < \varepsilon.$$

Kuvan kompressoiminen iteroituja funktiosysteemejä käyttäen tapahtuu yksinkertaisesti sanoen seuraavasti: Etsitään kontraktiokuvausta $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2, \text{euklidinen}) \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^2, \text{euklidinen})$, jonka kiintopiste A muistuttaa haluttua joukkoa K. Tällöin koska $K \approx A$, $W(K) \approx W(A) = A \approx K$. Haettavasta kontraktiokuvauksesta tiedetään siis, että se kuvaa K:n melko hyvin itsensä päälle.

Millaisia sitten ovat $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2, \text{euklidinen})$:n kontraktiokuvaukset? Euklidisten avaruuksien, kuten $\mathbb{R}^2$:n, kontraktiokuvaukset ovat tuttuja: niitä ovat mm. differentioituvat kuvaukset, joiden Jacobin matriisin normi on kaikkialla alle yhden. Esimerkiksi pienentävät affiinit kuvaukset ovat kontraktiokuvauksia. Osa $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2, \text{euklidinen})$:n kontraktiokuvauksista saadaan tason kontraktiokuvauksien indusoimina.

Lause 2.3 *Olkoon $w : X \to X$ kontraktiokuvaus, jonka kontraktiivisuuskerroin on s. Tällöin seuraavasti määritelty kuvaus $w_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}(X,d) \to \mathcal{H}(X,d)$,*

$$w_{\mathcal{H}}(B) = \{w(x) \mid x \in B\} \qquad \forall B \in \mathcal{H}(X,d)$$

on kontraktiokuvaus, ja sen kontraktiivisuuskerroin on s.

Todistus Tämän luonnollisen lauseen todistus perustuu siihen, että kahden joukon A ja $B \in \mathcal{H}(X,d)$ Hausdorff-etäisyys kertoo, kuinka kaukana toisessa joukossa on pisteitä, jotka eivät kuulu toiseen joukkoon. Koska w:llä kuvattaessa kaikki pisteparit kuvautuvat lähemmäs toisiaan, myös nämä A:n ja B:n "kauimmaiset" pisteet lähestyvät toisiaan. $\square$

Huomattakoon, että kontraktiokuvauslauseen (2.2) mukaan lähdettäessä nyt iteroimaan kuvausta $w_{\mathcal{H}}$ mielivaltaisesta lähtöjoukosta $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2, \text{euklidinen})$ lähestytään erästä joukkoa $A = \lim w_{\mathcal{H}}^{\circ n} B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2, \text{euklidinen})$. Koska tällä tavalla indusoitu $w_{\mathcal{H}}$ kuitenkin "kutistaa" kuvaamaansa joukkoa läpimitaltaan enintään s-kertaiseksi (ja siis n:llä iteraatiolla enintään s^n-kertaiseksi), kuvajoukon läpimitta lähestyy nollaa. Täten A koostuu yhdestä pisteestä, mikä ei kuulosta kovin lupaavalta, sillä tavoitteena oli päätyä joukkoon, joka muistuttaisi käsiteltävää kuvaa.

Kuvailtaessa IFS:ien käyttöä kuvan kompressoinnissa todettiin, että etsitään kontraktiokuvauksia, joilla K:n kuva saadaan osumaan hyvin K:n päälle. Hausdorff-etäisyyden mielessä "hyvin" edellyttää, että K:n kuvan pisteitä ei kuvaudu kovin kauas K:sta, ts. että $d(W(K), K) = \max\{d(x,K) \mid x \in W(K)\} < \varepsilon$, kun ε on pieni. Tällainen onnistuu jopa tarkasti, ainakin jos K:lla on sisäpisteitä:[2] valitaan K:n sisäpiste, jolla on K:ssa r-säteinen ympäristö V, kutistetaan K homoteettisesti läpimitaltaan enintään $2r$:n kokoiseksi ja siirretään V:n sisälle.

[2] Äärellisellä tarkkuudella esitetyillä kuvilla on välttämättä sisäpisteitä, sillä ne koostuvat kuvapisteistä, jotka eivät ole ideaalisia pisteitä.

Joukko K voidaan siis yhdellä kontraktiokuvauksella kuvata itsensä sisälle, mutta Hausdorff-etäisyys edellyttää myös, että $d(K, W(K)) = \max\{d(x, W(K)) \,|\, x \in K\} < \varepsilon$, siis että K saataisiin myös peitetyksi kuvallaan "melkein kokonaan" eli mielivaltaisen tiheästi. Se ei yleensä onnistu $\mathbb{R}^2$:n kontraktiokuvauksella samanaikaisesti, koska kontraktiokuvaus kutistaa.

Etsittävän kuvauksen W ei tarvitse kuitenkaan indusoitua mistään $\mathbb{R}^2$:n kontraktiokuvauksesta. Jos yhdellä kontraktiokuvauksella voidaan peittää vain osa K:sta, ottamalla yhdiste K:n kuvista useassa kontraktiokuvauksessa se saadaan peitetyksi mielivaltaisen tiheästi. Kyseessä ei tietenkään ole enää kontraktiokuvaus $\mathbb{R}^2$:ssa, sillä usean kopion myötä häviää funktion yksiarvoisuus. Asia voidaan kuitenkin esittää joukkofunktiolla, joka pysyy edelleen kontraktiokuvauksena.

Lause 2.4 *Olkoot $w_i : \mathcal{H}(X, d) \to \mathcal{H}(X, d)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ kontraktiokuvauksia. Olkoon kunkin w_i:n kontraktiivisuuskerroin s_i. Tällöin seuraavasti määritelty kuvaus $W : \mathcal{H}(X, d) \to \mathcal{H}(X, d)$*

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \cdots \cup w_N(B) = \bigcup_{i=1}^{N} w_i(B)$$

on kontraktiokuvaus, jonka kontraktiivisuuskerroin on $s = \max\{s_i \,|\, i \in \{1, 2, \ldots, N\}\}$.

Todistus Joukkojen A ja B "kauimmaisten pisteiden" etäisyys muuttuu kullakin funktiolla w_i kuvattaessa s_i-kertaiseksi, suurimmillaan siis s-kertaiseksi. □

2.3 Iteroidut funktiosysteemit

Määritelmä 2.7 Iteroitu funktiosysteemi (IFS) *on pari $((X, d), \mathcal{W})$, missä (X, d) on metrinen avaruus ja $\mathcal{W}$ joukko kontraktiokuvauksia $w_i : X \to X$. Sen kontraktiivisuuskerroin on $s = \max\{s_i \,|\, i \in \{1, 2, \ldots, N\}\}$, missä kukin s_i on w_i:n kontraktiivisuuskerroin.*

Määritelmä 2.8 *IFS:n $((X, d), \{w_1, w_2, \ldots, w_n\})$* attraktori *on funktion $W : \mathcal{H}(X, d) \to \mathcal{H}(X, d)$,*

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \cdots \cup w_N(B) = \bigcup_{i=1}^{N} w_i(B),$$

kiintopiste.

Aikaisemmin esitetty ajatus K:n peittämisestä usealla kutistetulla "kopiolla" itsestään osoittautuu järkeväksi.

Lause 2.5 (Kollaasilause) *Olkoon $K \in \mathcal{H}(X, d)$ annettu metrisen avaruuden kompakti, epätyhjä osajoukko. Olkoon $((X, d), \{w_1, w_2, \ldots, w_N\})$ IFS, jonka kontraktiivisuuskerroin on $s \in [0, 1)$, ja olkoon A sen attraktori. Silloin*

$$h(K, A) \leq \frac{1}{1-s} h\left(K, \bigcup_{i=1}^{N} w_i(K)\right).$$

Todistus

$$h(K, A) \leq h(K, W(K)) + \underbrace{h(W(K), W(A))}_{\leq s \cdot h(K, A)} + h(\underbrace{W(A)}_{=A}, A)) = h(K, W(K)) + s \cdot h(K, A)$$

□

Jos siis löydetään IFS, jolla pystytään peittämään K hyvin, niin tämän IFS:n attraktori muistuttaa K:ta; sitä paremmin, mitä kontraktiivisempi tuo IFS on. Kuvan kompressoiminen fraktaalien avulla voidaan nyt määritellä ytimekkäämmin: Etsitään IFS:ää, jonka attraktori muistuttaa annettua kuvaa.

Huomattakoon, että erikoistapauksessa, jossa kontraktiokuvaukset ovat vakiokuvauksia $w_i(z) = c_i$, minkä tahansa joukon B kuva on äärellinen pistejoukko $C = \{c_i \,|\, i = 1, 2, \ldots, N\}$, joka on myös IFS:n attraktori. Kontraktiivisuuskerroin on 0, ja kollaasilause saa muodon $h(K, C) \leq 1 \cdot h(K, C)$. Jos äärellisellä tarkkuudella esitetty kuva K tulkitaan n:n pisteen joukoksi, voidaan valita n:n vakiokuvauksen muodostama IFS, jonka attraktori on täsmälleen K. Tuollaisen IFS:n esittämiseen tarvitaan kuitenkin vähintään yhtä paljon informaatiota kuin K:n esittämiseen, joten mitään tiivistämistä ei tapahdu.

Kun taas IFS koostuu "lähes identiteettikuvauksista", s on lähes 1. Tällöin tekijä $\frac{1}{1-s}$ on hyvin suuri, mikä kuvastaa sitä, että vaikka K kuvautuu varsin tarkkaan itselleen, K voi olla hyvinkin kaukana IFS:n attraktorista.

3 Sopivan IFS:n etsiminen

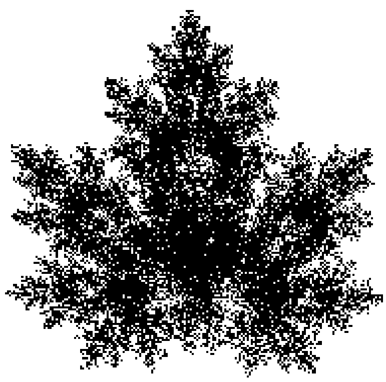
3.1 Käänteinen ongelma

Annetun IFS:n attraktorin likimääräinen laskeminen on siis suhteellisen suoraviivainen tehtävä. Yksinkertaisinta on lähteä iteroimaan sen kontraktiokuvauksien yhdistettä jostakin lähtöjoukosta. Koska laskut tehdään käytännössä yleensä tietokoneella ja liuku- tai murtoluvuilla, algoritmiin voidaan tehdä joitakin teknisiä parannuksia.

Käänteinen ongelma, sopivan IFS:n löytäminen annetulle kuvalle ei sen sijaan ole triviaali tehtävä. Yksinkertaisten kuvien esittämiseen riittää muutama kontraktiokuvaus, mutta myös jotkut visuaalisesti monimutkaiset, "fraktaalimaiset" kuvat ovat hyvin yksinkertaisten IFS:ien attraktoreita. Esimerkiksi kuvassa 1 on IFS:n

$$((\mathbb{C}, \text{tasometriikka}), \{w_1, w_2, w_3, w_4\}), \qquad \begin{cases} w_1(z) = 0{,}6z + 0{,}18 + 0{,}36i \\ w_2(z) = 0{,}6z + 0{,}18 + 0{,}12i \\ w_3(z) = (0{,}4 - 0{,}3i)z + 0{,}27 + 0{,}36i \\ w_4(z) = (0{,}4 + 0{,}3i)z + 0{,}27 + 0{,}09i \end{cases}$$

attraktori.



Kuva 1: Erään yksinkertaisen IFS:n attraktori

3.2 Jatkuva riippuvuus parametreista

Mahdollisia iteroituja funktiosysteemejä ja niissä käytettäviä kontraktiokuvauksia on hyvin paljon. Joukkoa, josta kontraktiokuvauksia etsitään, on siis rajoitettava. Yksi mahdollisuus on valita kontraktiokuvausparvi, joka riippuu muutamasta parametrista.

Määritelmä 3.1 *Olkoon (P, d_p) metrinen avaruus ja (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Kuvaus $w : P \times X \to X$ on* kontraktiokuvausparvi *(X:ssä), jos $w(p, \cdot) : X \to X$ on kontraktiokuvaus kullakin $p \in P$. Jos $w(\cdot, x) : P \to X$ on jatkuva kullakin kiinteällä $x \in X$, sanotaan, että w* riippuu jatkuvasti parametrista *p.*

Esimerkki 3.1 *Eräs kontraktiokuvausparvi $\mathbb{R}^2$:ssa on kutistavien tasoaffiniteettien parvi*

$$w : \left(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2\right) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad w((A, \mathbf{b}), \mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad ||A|| < 1.$$

Kompleksitasossa $\mathbb{C}$ voitaisiin valita kutistavien homotetioiden, kiertojen ja siirtojen parvi, joka voidaan esittää ensimmäisen asteen polynomeilla $z \mapsto az + b$, $|a| < 1$.

Lause 3.1 *Olkoot (P, d_p) ja (X, d) metrisiä avaruuksia; (P, d_p) kompakti ja (X, d) täydellinen. Olkoon $((X, d), \{w_1(p, \cdot), w_2(p, \cdot), \ldots, w_N(p, \cdot)\}$ IFS kullakin $p \in P$ ja riippukoon kukin w_i jatkuvasti parametrista p. Tällöin IFS:n attraktori $A = A(p)$ riippuu p:stä jatkuvasti Hausdorff-metriikassa.*

Huomattakoon, että P:n kompaktiuden vaatiminen ei käytännön laskuissa ole rajoitus, sillä parametrit ovat yleensä liukulukuja, joiden joukko on kompakti. (Kompaktiutta tarvitaan lauseen todistuksessa, jotta w_i:t saadaan tasaisesti jatkuviksi.)

Sopivaa IFS:ää voidaan nyt lähteä etsimään varioimalla parametria p tietokoneella yrityksen ja erehdyksen menetelmällä, mahdollisesti jollakin sopivalla optimointistrategialla tehostettuna.

3.3 Jatko-opiskelija-algoritmi

Kokeiltavien kontraktiokuvausten joukon rajoittaminen voi kuitenkin usein olla tuhoisaa. Jos käsiteltävä kuva K sattuu olemaan sellaisen hyvin yksinkertaisen IFS:n attraktori, jonka kontraktiokuvaukset on rajattu pois kokeiltavien kuvausten joukosta, saatetaan pienemmästä kontraktiokuvausjoukosta joutua valitsemaan suuri määrä kuvauksia, jotta attraktori vastaisi K:ta hyvin.

Tästä syystä sopivan IFS:n koneellinen etsiminen on vaikeaa. Inhimillisellä heuristiikalla saattaa löytää tiettyyn kuvaan hyvän IFS:n, jota kone ei pysty rajoitetusta kontraktiokuvausparvestaan löytämään. Alan kielessä esiintyykin ironinen käsite "jatko-opiskelija-algoritmi", joka toimii seuraavasti:

1. Otetaan matematiikan jatko-opiskelija.
2. Annetaan hänelle käsiteltävä kuva K.
3. Lukitaan hänet huoneeseen ja päästetään hänet pois vasta, kun hän on löytänyt yksinkertaisen IFS:n, jonka attraktori muistuttaa K:ta.

IFS:n etsiminen käsin ei tietenkään sovi suurien kuvamäärien käsittelyyn. Se on luovaa työtä, jota voidaan verrata vaikkapa kirjailijan työhön: Kirjailijakin pyrkii löytämään tehokkaan tavan välittää viestinsä, oli se sitten tietoa, mielikuvia tai kauneusarvoja.

4 Sovellukset

4.1 Harmaasävy- ja värikuvat

Edellä on käsitelty mustavalkokuvia. Harmaasävy- ja värikuvien käsitteleminen on varsin erilaista. Värikuville on järkevää tehdä ensin värierottelu, jolloin saadaan kolme harmaasävykuvaa.[3] Voidaan siis rajoittua tarkastelemaan harmaasävykuvia.

Yksinkertainen ratkaisu on palauttaa harmaasävykuva rasteroimalla mustavalkokuvaksi, jolle voidaan soveltaa edellä esitettyjä menetelmiä.

Toinen mahdollisuus on laajentaa käsiteltyä teoriaa [1]. IFS:n käsite laajennetaan IFS:ksi todennäköisyyksillä, IFST, jossa jokaiseen kuvaukseen w_i liitetään todennäköisyys p_i, joille siis pätee $\sum p_i = 1$. Nämä todennäköisyydet kertovat, kuinka suuri painoarvo kullakin w_i:llä on. IFST:n kontraktiivisuuskerroin on sama kuin vastaavan IFS:n.

Mittateoriaa soveltamalla saadaan kutakin IFST:tä kohti konstruoitua ns. *invariantti mitta* μ (X, d):ssä, joka kuvaa sitä, kuinka tummia eri osat kuvassa ovat. [7] Tarkemmin sanoen kun B on kompaktin metrisen avaruuden X mitallinen osajoukko, $\mu(B)$ kertoo, kuinka suuri osa kuvan "kokonaistummuudesta"[4] on joukon B alueella. Mitta μ on siis normeerattu siten, että $\mu(X) = 1$.

Harmaasävykuvaa ei nyt esitä tason osajoukko, vaan *mitta*, joka on eräänlainen värijakauma. $\mathcal{H}(X, d)$:n sijaan liikutaan mittojen muodostamassa kompaktissa metrisessä avaruudessa $\mathcal{P}(X, d)$, jossa käytetty ns. Hutchinsonin metriikka kertoo karkeasti sanoen, kuinka paljon kahta mittaa vastaavat kuvat poikkeavat toisistaan.

IFST indusoi nyt Markovin operaattoriksi kutsutun kontraktiokuvauksen $M : \mathcal{P}(X, d) \to \mathcal{P}(X, d)$, joka samoin kuin edellä muodostaa kuvasta pienennettyjä kopioita, mutta lisäksi jakaa kuvan tummuuden eri kopioiden kesken todennäköisyyksien suhteessa. Jos useampi kopio osuu päällekkäin, niiden tummuudet lasketaan yhteen.

Kontraktiokuvauksella M on nyt kiintopistelauseen nojalla kiintopiste μ, jota kutsutaan IFST:n attraktoriksi. Kollaasilauseelle (2.5) saadaan variantti myös mitoille: Jos mitta pystytään kuvaamaan itselleen hyvin (Hutchinsonin metriikan mielessä) IFST:llä, jonka kontraktiivisuuskerroin on s, niin tämä mitta muistuttaa ao. IFST:n attraktoria $\frac{1}{1-s}$ kertaa yhtä hyvin.

Käytännössä μ:n kuva voidaan piirtää seuraavasti ns. *satunnaisiteraatioalgoritmilla*: Lähdetään mielivaltaisesta lähtöpisteestä x_0 ja valitaan kontraktiokuvauksista $w_1, w_2, \ldots, w_N$ yksi siten, että kunkin w_i:n valinnan todennäköisyys on p_i, ja merkitään sitä w_{i_1}:llä. Näin saadaan piste $x_1 = w_{i_1}(x_0)$. Valitaan samoin w_{i_2}, jolloin saadaan piste $x_2 = w_{i_2}(x_1)$. Kun tätä toistetaan, saadaan jono pisteitä (x_i). Niiden jakauma lähestyy μ:n tummuusjakaumaa todennäköisyydellä yksi, ts. melkein kaikilla w_{i_1}:n, w_{i_2}:n jne. valinnoilla.

[3]Kolme harmaasävykuvaa vastaavat sitten esimerkiksi alkuperäisen kuvan RGB-, CMY- tai HSV-komponentteja. Sama prosessi tehdään joka tapauksessa kuvia tulostettaessa. [8]

[4]Kokonaistummuuden voidaan ajatella tarkoittavan vaikkapa kuvan tulostamiseen käytettyä väriainetta.

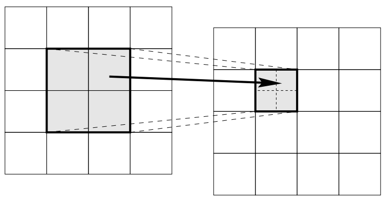
Käytännössä kuvaesitykset koostuvat yleensä pikseleistä, jolloin μ:n kuva voidaan nyt piirtää laskemalla riittävän monta pistettä jonon (x_i) alkupäästä ja värittämällä pikselit niiden jakauman mukaan, sitä tummemmaksi, mitä useampi piste ao. pikselin alueelle on osunut.

4.2 Neliöisometriat

Johtuen diskreetistä tavasta, jolla tietokonekuvat yleensä esitetään ja jolla tietokoneet käsittelevät tietoa, seuraava lähestymistapa osoittautuu käytännölliseksi keinoksi etsiä sopivaa IFST:tä.[6]

Jaetaan käsiteltävä kuva K, joka on yleensä suorakulmion muotoinen, samankokoisiin neliöihin $K_1, K_2, \ldots, K_M$. Muodostetaan joukko kontraktiokuvauksia siten, että pienennetään aina 2×2 vierekkäisen neliön alue yhden neliön kokoiseksi (kontraktiivisuuskertoimeksi saadaan $\frac{1}{2}$), sovelletaan yhtä kahdeksasta neliöisometriasta (kierrot, peilaukset vaaka- ja pystypuolittajan sekä diagonaalien suhteen sekä identiteetti)[5] ja siirretään yhden neliön päälle.

Näin saadut kuvaukset ovat kontraktiokuvauksia $\mathbb{R}^2$:ssa, sillä käsitellyn neljän neliön ulkopuoliset pisteet voidaan ajatella kuvattavan neliön laidalle lokaalisti vakiokuvauksella.



Kuva 2: Neljä neliötä pienennetään yhden kokoiseksi

Edellä kuvailluista kontraktiokuvauksista valitaan IFST:hen paras sellainen osajoukko, että kaikki neliöt K_i tulevat peitetyiksi, ja että sopivilla todennäköisyyksillä saadaan tummuudet pysymään lähes samoina. (Ks. kuva 2.)

4.3 Tuloksia

Kun IFS-menetelmä kuvien tiivistämiseen esiteltiin julkisuudessa vuonna 1988 [2], väitteitä sillä saavutettavista valtavista kompressiosuhteista alkoi esiintyä. Tekniikkaa kehittänyt Michael Barnsley on patentoinut IFS-tekniikkaan liittyviä keksintöjään ja perustanut Iterated Systems-yhtiön[6] tuotteistamaan ja markkinoimaan niitä. [10]

Kuten muillakin kompressointitavoilla, saavutettavat tulokset riippuvat voimakkaasti käsiteltävästä kuvasta. Jos kuva on valmiiksi jonkin yksinkertaisen IFS:n attraktorin approksimaatio (kuten kuvan 1 vaahteranlehti), IFS-tekniikalla saavutetaan ainakin IFS:ää käsin etsien hyvin suuria kompressiosuhteita, vaikka perinteisillä tiivistysmenetelmillä (esim. JPEG) tulokset pysyvät kohtuullisella kuvanlaadulla tavanomaisen 20:1:n tienoilla.

Tavanomaisilla kuvilla ja etsittäessä IFS:ää automatisoidusti kompressiosuhteet vaihtelevat 4:1:n ja 100:1:n välillä. Perinteisillä tiivistysmenetelmillä saadut tulokset ovat samaa luokkaa.

IFS-menetelmä vaatii myös melko runsaasti laskentatyötä, erityisesti kompressointivaiheessa,

[5] Neliöisometriat vastaavat siis dihedraaliryhmän D_4 alkioita.

[6] `http://www.iterated.com/`

mutta myös purettaessa. Se ei siis ole nopeudessakaan ylivoimainen perinteisiin kilpailijoihinsa nähden.

4.4 Lisää fraktaaleja

Sanaa fraktaali ei ole edellä määritelty täsmällisesti. Fraktaaleiksi kutsutaan usein olioita, joilla esiintyy samankaltaista epätriviaalia hienorakennetta mittakaavasta toiseen.

Vaikka monien IFS:ien attraktorit ovat fraktaalimaisia, myös muunlaisia olioita kutsutaan fraktaaleiksi. Mandelbrotin joukko, joka tulee monelle ensimmäiseksi mieleen sanasta fraktaali, ei tiettävästi ole minkään IFS:n attraktori. IFS:illäkään ei siis pystytä esittämään kuin osa kaikista mahdollisista fraktaaleista.

Viitteet

[1] Michael Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.

[2] Michael Barnsley, A. Sloan, *A Better Way to Compress Images*, Byte Magazine: 215-233, January 1988.

[3] Lennart Carleson, Theodore W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Universitext, Springer-Verlag, 1993.

[4] Jean-loup Gailly, *comp.compression Frequently Asked Questions (part 1/3) – [17] What is the state of fractal compression?*, `http://www.cis.ohio-state.edu/hypertext/faq/usenet/compression-faq/part1/faq-doc-14.html`, 1996.

[5] John Kominek, *comp.compression Frequently Asked Questions (part 2/3) – [77] Introduction to Fractal compression (long)*, `http://www.cis.ohio-state.edu/hypertext/faq//usenet/compression-faq/part2/faq-doc-8.html`, 1994.

[6] Giovambattista Pulcini, Valerio Verrando, Riccardo Rossi, Carlo Meloni, *Fractal Image Compression through Iterated Function Systems*, `ftp://ftp.webcom.com/pub/verrando/ftp/ifsdoc05.zip`, 1995.

[7] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1953.

[8] Hannu Saarelma – Pirkko Oittinen, *Basics of Printing Techonology*, Otatieto, 1995.

[9] *Fractal Image Encoding* (WWW link page), `http://inls.ucsd.edu/y/Fractals/`

[10] `http://inls.ucsd.edu/y/Fractals/#patents`