Kenrick Bingham 27.3.2000
011209227

Inversiospektraaliteorian harjoitustyö

Yksiulotteinen spektraaliongelma

Tarkastellaan ominaisarvo-ongelmaa

$$-\phi''(x) + q(x)\phi(x) = \lambda\phi(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$
$$\phi(0) = 0 \tag{2}$$
$$\phi(1) = 0, \tag{3}$$

missä potentiaali $q(x)$ on välillä $[0, 1]$ jatkuva funktio, tai yleisemmin L^∞-funktio.

Suora ongelma on ominaisarvojen $\lambda = \lambda_n$ (ja niihin liittyvien ominaisfunktioiden $\phi = \phi_n$) selvittäminen, kun potentiaali q tunnetaan. Näitä ominaisarvoja on numeroituva määrä, ne ovat yksinkertaisia ja ne noudattavat asymptotiikkaa

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t)dt + O(1/n). \tag{4}$$

Lisäksi eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisfunktiot muodostavat täydellisen ortogonaalisen vektorisysteemin. [3]

Käänteinen spektraaliongelma puolestaan on potentiaalin ratkaiseminen ominaisarvojen perusteella. Osoittautuu, että käänteisellä ongelmalla ei tällaisenaan ole yksikäsitteistä ratkaisua, ts. *kielen muotoa ei voi kuulla* — ellei potentiaalin tiedetä olevan symmetrinen, $q(x) = q(1 - x)$ [1, 3]. Ongelma ratkeaa kuitenkin yksikäsitteisesti, jos näiden ominaisarvojen $\{\lambda_n\}$ lisäksi tunnetaan ominaisarvot $\{\mu_n\}$ tapauksessa, jossa oikeanpuoleisessa päätepisteessä $x = 1$ on Dirichlet'n reunaehdon sijaan Robinin reunaehto, ts.

$$-\phi''(x) + q(x)\phi(x) = \mu_n\phi(x), \quad 0 < x < 1 \tag{5}$$
$$\phi(0) = 0 \tag{6}$$
$$\phi'(1) - H\phi(1) = 0 \tag{7}$$

jollakin $H \in \mathbb{R}$.

Gelfand-Levitan-Marchenko-operaattori

Käänteinen ongelma voidaan ratkaista käyttämällä ns. *Gelfand-Levitan-Marchenko-operaattoria* $\mathcal{G}$, joka kuvaa alkuarvotehtävän

$$-\psi''(x) + p(x)\psi(x) = \lambda\psi(x), \quad 0 < x < 1 \tag{8}$$
$$\psi(0) = 0 \tag{9}$$

ratkaisun ψ alkuarvotehtävän (1)–(2) ratkaisuksi ϕ, jonka derivaatalla on sama alkuarvo, $\phi'(0) = \psi'(0)$:

$$\phi(x) = (\mathcal{G}\psi)(x) = \psi(x) + \int_0^x K(x,t)\psi(t)\,dt.$$

Operaattori K riippuu tietenkin potentiaaleista p ja q, mutta on merkittävää, että se ei riipu parametrista λ; huomattakoon, että kohdassa $x = 1$ ei tässä aseteta reunaehtoa, eli parametrin λ ei tarvitse olla ominaisarvo.

Integraaliydin K toteuttaa tällöin seuraavan Goursat'n ongelman:

$$K_{xx}(x,t) - K_{tt}(x,t) + \big(p(t) - q(x)\big)K(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Delta \tag{11}$$
$$K(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{12}$$
$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x \big(q(s) - p(s)\big)\,ds, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{13}$$

missä $\Delta = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < t < x < 1\big\}$. Tämä nähdään seuraavasti:

Kun p, $q \in C^1([0,1])$, Goursat'n ongelmalla on yksikäsitteinen ratkaisu $K \in C^2(\bar{\Delta})$ [1, Theorem 4.15]. Suora sijoitus osoittaa, että $\mathcal{G}\psi$ toteuttaa tehtävän (1)–(2), jos ψ toteuttaa tehtävän (8)–(9) ja K Goursat'n ongelman (11)–(13). Alkuarvotehtävän (1)–(2) ratkaisu on Picardin–Lindelöfin lauseen mukaan yksikäsitteinen, kun huomioidaan myös alkuehto $\phi'(0) = \psi'(0)$. Siten $\phi = \mathcal{G}\psi$, missä K toteuttaa Goursat'n ongelman (11)–(13). Yleinen tapaus p, $q \in L^\infty$ seuraa tästä tiheysargumentilla [1, s. 156].

Käänteisen ongelman yksikäsitteinen ratkeavuus

Potentiaalin yksikäsitteinen määräytyminen spektreistä $\{\lambda_n\}$ ja $\{\mu_n\}$ nähdään nyt seuraavasti: Olkoot $\{\lambda_n\}$ Dirichlet-Dirichlet-tehtävän

$$-u''(x) + r(x)u(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1 \tag{14}$$
$$u(0) = 0 \tag{15}$$
$$u(1) = 0 \tag{16}$$

ominaisarvot sekä potentiaalilla $r = q$ että $r = p$, ja olkoot $\{\mu_n\}$ Dirichlet-Robin-tehtävän

$$-v''(x) + r(x)v(x) = \mu v(x), \quad 0 < x < 1 \tag{17}$$
$$v(0) = 0 \tag{18}$$
$$v'(1) + Hv(1) = 0 \tag{19}$$

ominaisarvot sekä potentiaalilla $r = q$ että $r = p$. On siis osoitettava, että tällöin $q = p$.

Soveltamalla Gelfand-Levitan-Marchenko-opetaattoria tehtävän (14)–(16) ominaisfunktioihin ϕ_n (potentiaalilla $r = q$) ja ψ_n $(r = p)$ nähdään reunaehdoista, että

$$0 = \phi_n(1) = (\mathcal{G}\psi_n)(1) = \int_0^1 K(1,t)\psi_n(t)\,dt \quad \text{kaikilla } n.$$

Koska ominaisfunktiot ψ_n muodostavat täydellisen ortogonaalisen systeemin, nähdään tästä, että

$$K(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le 1. \tag{21}$$

Vastaavasti Dirichlet-Robin-tehtävän (17)–(19) ominaisfunktioiden $\tilde{\phi}_n$ $(r = q)$ ja $\tilde{\psi}_n$ $(r = p)$ reuna-arvoista nähdään, että

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\phi}_n'(1) + H\tilde{\phi}_n(1) \\ &= (\mathcal{G}\tilde{\psi}_n)'(1) + H(\mathcal{G}\tilde{\psi}_n)(1) \\ &= \int_0^1 \big(K_x(1,t) + HK(1,t)\big)\, \tilde{\psi}_n(t)\, dt \quad \text{kaikilla } n, \end{aligned}$$

joten jälleen ominaisfunktioiden täydellisyyden ja ortogonaalisuuden nojalla

$$K_x(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le 1. \tag{22}$$

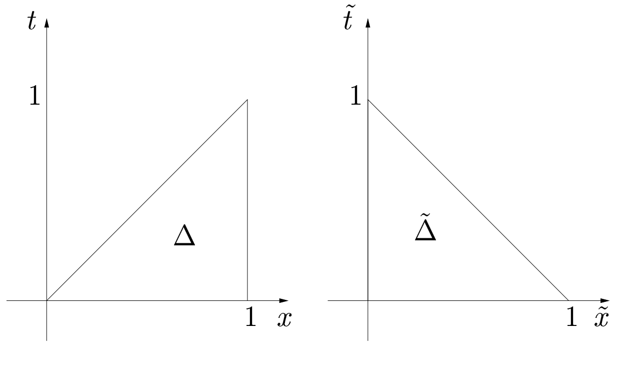
Yhdistämällä ehdot (21) ja (22) Goursat'n ongelman yhtälöihin (11) ja (12) nähdään, että K toteuttaa yhtälöt

$$\begin{aligned} K_{xx}(x,t) - K_{tt}(x,t) + \big(p(t) - q(x)\big)K(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \Delta \\ K(x,0) &= 0, \quad 0 \le x \le 1 \\ K(1,t) &= 0, \quad 0 \le t \le 1 \\ K_x(1,t) &= 0, \quad 0 \le t \le 1. \end{aligned}$$

Muuttujanvaihdoksella $\tilde{t} = 1 - x$, $\tilde{x} = t$, $\tilde{K}(\tilde{x},\tilde{t}) = K(x,t)$ tämä muuntuu standardimuotoiseksi alku-reuna-arvo-ongelmaksi

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x},\tilde{t}) - \tilde{K}_{\tilde{t}\tilde{t}}(\tilde{x},\tilde{t}) + \big(p(\tilde{x}) - q(1-\tilde{t})\big)\tilde{K}(\tilde{x},\tilde{t}) &= 0, \quad (\tilde{x},\tilde{t}) \in \tilde{\Delta} \\ \tilde{K}(\tilde{t},0) &= 0, \quad 0 \le \tilde{t} \le 1 \\ \tilde{K}(0,\tilde{x}) &= 0, \quad 0 \le \tilde{x} \le 1 \\ \tilde{K}_{\tilde{t}}(0,\tilde{x}) &= 0, \quad 0 \le \tilde{x} \le 1, \end{aligned}$$

missä $\tilde{\Delta} = \{(\tilde{x},\tilde{t}) \in \mathbb{R}^2 \mid \tilde{x} > 0,\ 0 < \tilde{t} < 1 - \tilde{x}\}$. (Katso kuva 1.)



Kuva 1: Muuttujanvaihdos $\tilde{t} = 1 - x$, $\tilde{x} = t$.

Tällä ongelmalla on yksikäsitteinen ratkaisu $\tilde{K} \equiv 0$ [2, luku IV.2]. Siten myös $K \equiv 0$ alueessa $\bar{\Delta}$, joten yhtälön (13) perusteella

$$q(x) - p(x) = 2\,\frac{d}{dx}\,K(x,x) \equiv 0$$

eli $q = p$, mikä oli todistettava.

Yleistyksiä

Edellä vaadittiin λ_n:ille sekä vasemmassa että oikeassa päätepisteessä Dirichlet'n reunaehto, ja μ_n:ille vasemmalla Dirichlet'n reunaehto ja oikealla Robinin reunaehto. Reunaehdot voidaan kuitenkin valita yleisemmin: Oikealla reunaehdot voivat olla mitkä vain,

$$\begin{aligned} u'(1) + Hu(1) &= 0 \quad \lambda_n\text{:ille} \\ u'(1) + H'u(1) &= 0 \quad \mu_n\text{:ille.} \end{aligned}$$

Vasemmalla reunaehto voi niinikään olla mikä vain, mutta kuitenkin sama sekä λ_n:ille että μ_n:ille. (Kun $H = 0$, on kyseessä Neumannin reunaehto. Sisällytetään näihin merkintöihin myös Dirichlet'n reunaehto kirjoittamalla silloin $H = \infty$.)

Spektrit $\{\lambda_n\}$ ja $\{\mu_n\}$ määräävät itse asiassa yksikäsitteisesti myös reunaehdot: Jos reunaehtojen (15)–(16), (18)–(19) sijaan vaadittaisiin vain, että λ_n:t ovat tehtävien

$$\begin{aligned} -u''(x) + \boldsymbol{q}(x)u(x) &= \boldsymbol{\lambda_n} u(x), \quad 0 < x < 1 \\ u'(0) - \boldsymbol{h_1} u(0) &= 0 \\ u'(1) + \boldsymbol{H_1} u(1) &= 0 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} -u''(x) + \boldsymbol{p}(x)u(x) &= \boldsymbol{\lambda_n} u(x), \quad 0 < x < 1 \\ u'(0) - \boldsymbol{h_2} u(0) &= 0 \\ u'(1) + \boldsymbol{H_2} u(1) &= 0 \end{aligned}$$

ominaisarvot, ja että μ_n:t ovat tehtävien

$$\begin{aligned} -u''(x) + \boldsymbol{q}(x)u(x) &= \boldsymbol{\mu_n} u(x), \quad 0 < x < 1 \\ u'(0) - \boldsymbol{h_1} u(0) &= 0 \\ u'(1) + \boldsymbol{H'_1} u(1) &= 0 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} -u''(x) + \boldsymbol{p}(x)u(x) &= \boldsymbol{\mu_n} u(x), \quad 0 < x < 1 \\ u'(0) - \boldsymbol{h_2} u(0) &= 0 \\ u'(1) + \boldsymbol{H'_2} u(1) &= 0 \end{aligned}$$

ominaisarvot, nähtäisiin, että tällöin sen lisäksi, että $q = p$, niin myös $h_1 = h_2$, $H_1 = H_2$ ja $H_1' = H_2'$. Tämän seikan todistaminen onnistuu periaatteessa samalla tekniikalla kuin edellä, mutta laskut ovat hieman monimutkaisempia. [3]

Potentiaali määräytyy yksikäsitteisesti myös, jos spektrin $\{\lambda_n\}$ lisäksi tunnetaan toisen spektrin $\{\mu_n\}$ sijaan normeerausehdon $\phi'(0) = 1$ toteuttavien ominaisfunktioiden L^2-normit $\rho_n = \|\phi_n\|_{L^2}$. Tämä on helppo osoittaa spektraaliteoriaa käyttämällä: Operaattori $\mathcal{G}$ kuvaa ortonormaalin kannan $\{\psi_n\}$ ortonormaaliksi kannaksi $\{\phi_n\}$, joten se on unitaarinen. Siis operaattori

$$\mathcal{K} = \mathcal{G} - 1 : \psi(x) \mapsto \int_0^x K(x,t)\psi(t)\,dt$$

on normaali, ja siis $\mathcal{K}$:lla on ainakin yksi ominaisarvo λ_0, jonka itseisarvo on $\|\mathcal{K}\|$. Toisaalta $\mathcal{K}$ on Volterra-operaattori, joten sen spektraalisäde on $\sigma_R(\mathcal{K}) = 0$. Siten $0 \le \|\mathcal{K}\| = |\lambda_0| \le \sigma_R(\mathcal{K}) = 0$, joten $\mathcal{K} = 0$ eli $K(x,t) \equiv 0$. Siis

$$q(x) - p(x) = 2\frac{d}{dx}K(x,x) \equiv 0.$$

Numeerinen rekonstruktio

Käytännössä tehtävien (1)–(3) ja (5)–(7) ominaisarvoja $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ ja $\mu_1, \ldots, \mu_N$ tunnetaan tietenkin vain äärellinen määrä. Potentiaali q pyritään rekonstruoimaan niistä likimain.

Tässä voidaan käyttää apuna ominaisfunktioiden esitystä

$$\phi_n(x) = \mathcal{G}\psi_n(x),$$

missä $\psi_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x$ toteuttaa alkuarvotehtävän (8)–(9), $\psi'(0) = 1$ yksinkertaisessa tapauksessa $p = 0$, $\lambda = \lambda_n$.[1] Reunaehdoista saadaan tällöin ehtoja funktioille $K(1,t)$ ja $K_x(1,t)$. Lisäksi saadaan yhtälöistä (4) ja (13) ehto

$$K(1,1) = \int_0^1 q(s)\,ds = \lim_{n\to\infty}(\lambda_n - n^2\pi^2) := c_0.$$

Jos funktioita $K(1,t)$ ja $K_x(1,t)$ approksimoidaan sinifunktioiden polynomeilla, näistä ehdoista saadaan matriisiyhtälö, josta kertoimet voidaan ratkaista.

Funktiot K ja q toteuttavat siis sekä Cauchyn ongelman

$$K_{xx}(x,t) - K_{tt}(x,t) - q(x)K(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Delta \qquad (28)$$

$$K(1,t) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_n \sin n\pi x, \qquad 0 \le t \le 1 \qquad (29)$$

$$K_x(1,t) = \sum_{k=1}^{N} d_n \sin n\pi x, \qquad 0 \le t \le 1 \qquad (30)$$

[1] Huomattakoon, että λ_n:t eivät siis ole ominaisarvoja potentiaalilla $p = 0$, vaikka niin aluksi luulin sotkettuani mielessäni ominaisarvotehtävän ja Gelfand-Levitan-Marchenko-operaattorin keskenään.

että Goursat'n ongelman

$$K_{xx}(x,t) - K_{tt}(x,t) - q(x)K(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Delta \tag{31}$$

$$K(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{32}$$

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(s)\,ds, \qquad 0 \le x \le 1. \tag{33}$$

Nyt voidaan ajatella $K(x,t) = K(x,t;q)$ ratkaistuksi Cauchyn ongelmasta (28)–(30), jolloin yhtälöstä (33) saadaan

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x,x;q) =: T[q](x). \tag{34}$$

Potentiaalin ratkaiseminen merkitsee siis operaattorin T kiintopisteen q etsimistä. Osoittautuu, että T on Volterra-operaattori, jolla on yksikäsitteinen kiintopiste, ja iteraatio

$$q_{k+1}(x) = T[q_k](x) \tag{35}$$

suppenee kohti tätä kiintopistettä.

Suppeneminen on varsin nopeaa siisteille potentiaaleille. Approksimaatiot muistuttavat tällöin läheisesti q:n Fourier-sarjan osasummia, joihin on otettu tunnettuja ominaisarvoja vastaavat Fourier-komponentit. Tämä selittyy sillä, että Volterra-operaattorin vakiotermi muodostuu funktioiden $K(1,t)$ ja $K_x(1,t)$ Fourier-sarjojen osasummista, ja nopea suppeneminen tarkoittaa, että jo tämä vakiotermi approksimoi potentiaalia q varsin hyvin. [3]

Viitteet

[1] Andreas Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems.* Applied Mathematical Sciences 120. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1996. ISBN 0-387-94530-X.

[2] O. A. Ladyzhenskaya. *The boundary value problems of mathematical physics.* Applied Mathematical Sciences 49. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1986. ISBN 0-387-90989-3.

[3] William Rundell. *Inverse Sturm-Liouville problems.* Luku 3 teoksessa: K. Chadan, D. Colton, L. Päivärinta, W. Rundell. *An introduction to inverse scattering and inverse spectral problems.* SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation. SIAM, 1997. ISBN 0-89871-387-0.