

Mat-1.139 Matematiikan erikoistyöt
Whitneyn sateenvarjo suihkuavaruudessa

Kenrick Bingham¹
41857A, Tf

26.2.1997

¹<http://www.hut.fi/~kenny/>

Sisältö

1 Johdanto	3
2 Singulaarinen systeemi suihkuvaruudessa	3
2.1 Whitneyyn sateenvarjo	3
2.2 Klassiset ratkaisut	5
2.3 Ratkaiseminen suihkuvaruusmenetelmällä	5
2.4 Ongelmia	6
2.4.1 Tapaus 1	6
2.4.2 Tapaukset 2 ja 5	6
2.4.3 Tapaus 3	7
2.4.4 Tapaukset 4 ja 6	7
3 Systeemin jatkaminen ja primääridekompositio	7
3.1 Jatkaminen	7
3.2 Primääridekompositio	9
4 Jatkettujen systeemien ratkaiseminen	10
4.1 Tapaus 2	10
4.2 Tapaus 3	13
4.3 Tapaus 5	15
5 Yhteenveto	16
Merkinnät ja nimitykset	17
Viitteet	18
Liite 1: Axiom-komentojonot	19

1 Johdanto

Differentiaali geometrisen menetelmä on eräs tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmä. Siinä tarkastellaan geometrisesti differentiaaliyhtälön määräämää pintaa suihkuavaruudessa. Suihkuavaruutta voidaan ajatella \mathbb{R}^{q+2} :na, jossa koordinaatit ovat differentiaaliyhtälön vapaa muuttuja x , ratkaisu y ja sen derivaatat $y_1 = \frac{dy}{dx}, \dots, y_q = \frac{d^q y}{dx^q}$.

Differentiaaliyhtälön ratkaisukäyrä kulkee tällä pinnalla. Käyrän suunta pinnan kussakin pisteessä määräytyy, kun huomioidaan lisäksi y_i :den derivaattaluonne. Ratkaisukäyrää voidaan laskea numeerisesti etenemällä aina pieni askel kerrallaan näin laskettuun suuntaan.

Jos pinta leikkaa itsensä, saattaa ratkaisukäyrän suunnan laskeminen tuottaa ongelmia: kun eri lehdillä kulkevat ratkaisukäyrät leikkaavat toisensa, ratkaisukäyrän kulkusuunta ei ole yksikäsitteinen niiden leikkauspisteessä. Jos kuitenkin ratkaisukäyrien korkeamman kertaluvun derivaatat eroavat, voidaan siirtyä korkeamman kertaluvun suihkuavaruuteen, jossa ratkaisukäyrät kulkevat erillään, eikä pinta enää leikkaa itseään.

Korkeamman kertaluvun derivaatoille saadaan riippuvuuksia derivoimalla alkuperäistä differentiaaliyhtälöä x :n suhteen, ja poistamalla pinnasta epäoleelliset osat hyödyntäen kommutatiivisen algebran ns. primääridekompositiota.

Tässä erikoistyössä tarkastellaan esimerkkinä erästä itsensä leikkaavaa pintaa, ns. Whitneyyn sateenvarjoa, kolmiulotteisessa suihkuavaruudessa. Koska kolme koordinaattia voidaan ajatella x :ksi, y :ksi ja y_1 :ksi $3! = 6$ tavalla, saadaan kuusi erilaista tapausta. Näistä kolmessa leikkauskohdan kautta kulkee useita ratkaisuja. Leikkauskohta saadaan kaikissa kolmessa tapauksessa “kierrettyä” siirtymällä nelikulotteiseen avaruuteen.

Differentiaali geometrisen menetelmä soveltuu myös differentiaaliyhtälösystemien ratkaisemiseen, jolloin joudutaan toimimaan vähintään viidessä ulottuvuudessa $(x, y^1, y^2, y_1^1 = \frac{d}{dx}y^1, y_1^2 = \frac{d}{dx}y^2)$. Tässä erikoistyössä on havainnollisuuden ja yksinkertaisuuden vuoksi rajoitettu tarkastelemaan yhden tuntemattoman funktion differentiaaliyhtälöitä.

Lukijalle lienee eduksi differentiaali geometrian ja algebran peruskäsitteiden tuntemus esimerkiksi lähteiden [7] ja [8] pohjalta. Koko ajan liikutaan kuitenkin \mathbb{R}^3 :ssa ja \mathbb{R}^4 :ssa, joten ensimmäisen vuoden korkeakouluopinnot matematiikassa antanevat riittävän pohjan asian ymmärtämiselle pääpiirteissään, kenties lukuunottamatta primääridekompositio-osuutta.

2 Singulaarinen systeemi suihkuavaruudessa

2.1 Whitneyyn sateenvarjo

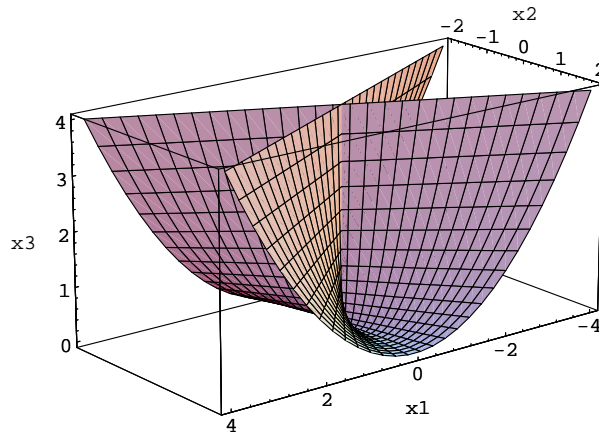
Whitneyyn sateenvarjoksi kutsutaan yhtälön

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3x_2^2 = 0 \quad (1)$$

ratkaisujoukkoa \mathbb{R}^3 :ssa. Se koostuu pinnasta puoliavaruudessa $x_3 \geq 0$ (ks. kuva 1) sekä “sateenvarjon kahvasta” $x_1 = x_2 = 0, x_3 < 0$. Pinta on näistä mielenkiintoisempi osa tarkasteltaessa jatkossa differentiaaliyhtälöitä, jotka saadaan ajattelemalla \mathbb{R}^3 :a suihkuavaruutena $J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Pinnan poikkileikkaukset x_1x_2 -tasossa ovat kaksi toisensa leikkaavaa, origon kautta kulkevaa suoraa,

joiden kulmakertoimet ovat $\pm\sqrt{x_3}$. Poikkileikkaukset x_1x_3 -tasossa puolestaan ovat paraabeleja ja x_2x_3 -tasossa käyriä $x_3 = c/x_2^2$.



Kuva 1: Whitneyin sateenvarjon pinta

Kyseessä ei ole 2-monisto, sillä pinta leikkaa itsensä pitkin positiivista x_3 -akselia. Sitä voidaan kuitenkin tarkastella moniston \mathbb{R}^3 osajoukkona, jolloin x_1, x_2 ja x_3 ovat \mathbb{R}^3 :n lokaaleja koordinaatteja.

Avaruus \mathbb{R}^3 voidaan nyt tulkita *suihkuavaruudeksi* $J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, kun muuttujien x_1, x_2 ja x_3 ajatellaan olevan differentiaaliyhtälön vapaa muuttuja x , differentiaaliyhtälön ratkaisu y ja sen derivaatta $y_1 = \frac{\partial y}{\partial x}$. Muuttujat x_1, x_2 ja x_3 voidaan samaistaa muuttujiin x, y ja y_1 kuudella eri tavalla:

	x_1	x_2	x_3
1	x	y	y_1
2	x	y_1	y
3	y	x	y_1
4	y	y_1	x
5	y_1	x	y
6	y_1	y	x

Tällöin yhtälö (1) määrää differentiaaliyhtälön

$$f(x, y, y_1) = 0, \quad (2)$$

jonka ratkaisukäyrä kulkee sateenvarjopinnalla. Singulariteetissa eli sillä suoralla, jolla pinta leikkaa itsensä, ratkaisun käyttämiseltä tai sen laskemiselta voidaan odottaa jotakin erikoista.

2.2 Klassiset ratkaisut

Differentiaaliyhtälölle (2) saadaan kaikilla eri permutaatioilla klassiset ratkaisut:

1. $x^2 - y_1 y^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \frac{x^2}{y^2} \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C_1 \Leftrightarrow y = (x^3 + C)^{1/3}$
2. $x^2 - y y_1^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \pm \frac{x}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{2}{3} y^{3/2} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow y = \left(\frac{3}{4} x^2 + C\right)^{2/3} \quad (y \geq 0)$
3. $y^2 - y_1 x^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \frac{y^2}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} - C \Leftrightarrow y = \frac{x}{1+Cx}$
4. $y^2 - x y_1^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \pm \frac{y}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \ln|y| = \pm 2\sqrt{x} + \ln C \Leftrightarrow y = C e^{\pm 2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$
5. $y_1^2 - y x^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \pm x \sqrt{y} \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = C_1 \pm \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow y = \left(C \pm \frac{x^2}{4}\right)^2 \quad (y \geq 0)$
6. $y_1^2 - x y^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \pm y \sqrt{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \pm \frac{2}{3} x^{3/2} + \ln|C| \Leftrightarrow y = C e^{\pm \frac{2}{3} x^{3/2}} \quad (x > 0)$

2.3 Ratkaiseminen suihkuvaruusmenetelmällä

Differentiaaliyhtälöä voidaan lähteä ratkaisemaan suihkuvaruudessa numeerisesti seuraavalla differentiaali-geometrisella menetelmällä. [1, 2, 9]

Pinnan $f = 0$ tangenttitaso pisteessä $p = (x, y, y_1) \in J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ on 1-kodimensionoinen tangentti-avaruuden $T(J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}))_p$ aliavaruus

$$df^{-1}\{0\} = \left\{ v \in T(J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}))_p \mid df(v) = 0 \right\}, \quad (3)$$

missä

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 \in T^*(J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})) \quad (4)$$

on f :n differentiaali.² Koska differentiaaliyhtälön ratkaisukäyrä kulkee pinnalla $f = 0$, sen tangenttivektori sijaitsee tässä tasossa.

Suihkuvaruuden rakenteesta ei vielä käy ilmi, että y_1 :n pitää olla ratkaisukäyrällä y :n derivaatta: $y_1 = \frac{dy}{dx}$. Tämä ehto voidaan kirjoittaa *kontaktimuodon*

$$\alpha_1 = dy - y_1 dx \in T^*(J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})) \quad (5)$$

avulla $\alpha_1(v) = 0$, mikä sekin määrää 1-kodimensionoisen aliavaruuden eli tason $T(J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}))_p$:ssä.³ Ratkaisukäyrän tangenttivektori sijaitsee myös tässä tasossa.

Yhtälöt

$$df(v) = \alpha_1(v) = 0 \quad (6)$$

määräävät siis pisteessä p aliavaruuden, joka määrää ratkaisukäyrän tangenttivektorin suunnan yksikäsitteisesti, jos sen dimensio on 1 eli jos tasot leikkaavat toisensa. Näiden aliavaruuksien muodostamaa kimppua kutsutaan systeemin *distribuutioksi* ja ratkaisukäyrää distribution *integraalimonistoksi*.

Jos merkitään tangenttivektoria normaalikannassa

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial y_1} \triangleq \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{v}, \quad (7)$$

²Funktion differentiaali vastaa \mathbb{R}^n :n vektorianalyysin Jacobin matriisiä, joten yhtälö $df(v) = 0$ voidaan kirjoittaa kenties tutummin merkinnöin $\nabla f \cdot \vec{v} = 0$.

³Huomattakoon, että yhtälö $\alpha_1 = dy - y_1 dx = 0$ saadaan formaalisti kertomalla yhtälö $y_1 = \frac{dy}{dx}$ dx:llä.

yhtälöt (6) voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$A\mathbf{v} = 0, \quad (8)$$

missä

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ -y_1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Distribuutio vastaa siis kussakin pisteessä matriisin A nolla-avaruutta $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{v} \mid A\mathbf{v} = 0\}$.

Jos nyt matriisin A rangi on 2 eli $\dim \mathcal{N}(A) = 1$, ratkaisukäyrää voidaan lähteä seuraamaan etenemällä lyhyt askel distribuution suuntaan ja projisoimalla näin saatu piste takaisin monistolle.

2.4 Ongelmia

Jos kuitenkin $\dim \mathcal{N}(A) > 1$, distribuutio ei määrää ratkaisukäyrän suuntaa, eikä ratkaisukäyrää voida laskea tällä menetelmällä. Tilanne on tällainen esimerkiksi pinnan (2) leikkaussuoralla.

2.4.1 Tapaus 1

Koska tapauksessa 1 singulariteetissa $x = y = 0$ matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -y_1 & 1 & 0 \\ 2x & -2yy_1 & -y^2 \end{bmatrix} \Big|_{x=y=0} = \begin{bmatrix} -y_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

toinen vaakarivi on nollarivi, on distribuution dimensio $\dim \mathcal{N}(A) = 2$, joten singulariteetissa ratkaisukäyrän seuraaminen on mahdotonta.

Jos klassiseen ratkaisuun $y = (x^3 + C)^{1/3}$ sijoitetaan singulariteetti $x = y = 0$, saadaan ehto $C = 0$. Singulariteetin kautta kulkee siis ainoastaan ratkaisu $y = x$.

2.4.2 Tapaukset 2 ja 5

Tapauksessa 2 singulaariset ratkaisut ovat sellaisia, joissa $x = y_1 = 0$. Klassisen ratkaisun ensimmäinen derivaatta on

$$y_1 = x \left(\frac{3}{4} x^2 + C \right)^{-1/3}, \quad (11)$$

joten kaikki ratkaisut kulkevat singulariteetin kautta. Nyt on edellisen lisäksi se ongelma, että "korkeudella" y kulkee nyt kaksi ratkaisua, jotka vastaavat C :n arvoja

$$C = \pm \sqrt{y^3}. \quad (12)$$

Singulariteetissa

$$A = \begin{bmatrix} -y_1 & 1 & 0 \\ 2x & -y_1^2 & -2yy_1 \end{bmatrix} \Big|_{x=y_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

joten taas $\dim \mathcal{N}(A) = 2$.

Tapauksessa 5 tilanne on samanlainen: Ensimmäinen derivaatta on

$$y_1 = x \left(C \pm \frac{x^2}{4} \right) = 0, \quad (14)$$

kun $x = 0$, joten kaikki ratkaisut kulkevat singulariteetin kautta. “Korkeudella” y kulkee taas kaksi ratkaisua, jotka vastaavat C :n arvoja $C = \pm\sqrt{y}$. Distribuution dimensio on jälleen 2, koska

$$A = \left[\begin{array}{ccc} -y_1 & 1 & 0 \\ -2xy & -x^2 & 2y_1 \end{array} \right] \Big|_{x=y_1=0} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (15)$$

2.4.3 Tapaus 3

Nyt ratkaisut $y = \frac{x}{1+Cx}$ kulkevat kaikki singulariteetin $x = y = 0$ kautta. Lisäksi

$$y_1 = \frac{1}{(1+Cx)^2} = 1, \quad (16)$$

kun $x = 0$, joten kaikki ratkaisukäyrät kulkevat lisäksi “korkeudella” $y_1 = 1$. Saman pisteen kautta ei siis kulje nyt ainoastaan kaksi ratkaisua, vaan ääretön määrä ratkaisuja. Ratkaisukäyrää ei voida seurata singulariteetissa, koska

$$A = \left[\begin{array}{ccc} -y_1 & 1 & 0 \\ -2xy_1 & 2y & -x^2 \end{array} \right] \Big|_{x=y=0} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (17)$$

ja siis $\dim \mathcal{N}(A) = 2$.

2.4.4 Tapaukset 4 ja 6

Tapauksissa 4 ja 6 singulariteetti ei aiheuta ongelmia. Yhtälölle saadaan C :n eri arvoilla erilaisia eksponenttimuotoisia ratkaisuja, jotka on määritelty x :n positiivisilla arvoilla. Niistä mitkään eivät kulje singulariteetin $y = y_1 = 0$ kautta.

Lisäksi C :n arvolla 0 saadaan triviaaliratkaisu $y = 0$, joka vastaa “sateenvarjon kahvaa”.

Tapauksessa 4 ratkaisukäyrä määrätty matriisin

$$A = \left[\begin{array}{ccc} -y_1 & 1 & 0 \\ -y_1^2 & 2y & -2xy_1 \end{array} \right] \quad (18)$$

nolla-avaruudesta. Muualla kuin triviaaliratkaisulla $x, y_1 \neq 0$, joten ainoastaan triviaaliratkaisulla $\dim \mathcal{N}(A) > 1$. Myös tapauksessa 6 matriisin

$$A = \left[\begin{array}{ccc} -y_1 & 1 & 0 \\ -y^2 & -2xy & 2y_1^2 \end{array} \right] \quad (19)$$

nolla-avaruus on yksiulotteinen, kun $y_1 \neq 0$.

3 Systemin jatkaminen ja primääridekompositio

3.1 Jatkaminen

Systemin *jatkamisella* tarkoitetaan alkuperäisen differentiaaliyhtälön

$$f(x, y, y_1) = 0 \quad (20)$$

derivoimista x :n suhteen, jolloin saadaan uusi yhtälö

$$g(x, y, y_1, y_2) = 0. \quad (21)$$

Se saa tapauksissa 1—6 seuraavat muodot:

$$2x - y^2 y_2 - 2y y_1^2 = 0 \quad (22)$$

$$2x - 2y y_1 y_2 - y_1^3 = 0 \quad (23)$$

$$2(y - x)y_1 - x^2 y_2 = 0 \quad (24)$$

$$2y y_1 - 2x y_1 y_2 - y_1^2 = 0 \quad (25)$$

$$2y_1 y_2 - x^2 y_1 - 2x y = 0 \quad (26)$$

$$2y_1 y_2 - 2x y y_1 - y^2 = 0 \quad (27)$$

Yhtälöt (2) ja (21) määrittelevät neliulotteisessa avaruudessa $J_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ kaksiulotteisen pinnan, jolla ratkaisut kulkevat. Sen tangentin määräävät nyt kaksi yhtälöä. Entinen yhtälö $df(v) = 0$ muuntuu muotoon

$$(\pi^* df)(v) = df(d\pi(v)) = 0, \quad (28)$$

missä $\pi : J_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \ni (x, y, y_1, y_2) \mapsto (x, y, y_1) \in J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ on kanoninen projektio. Sen lisäksi jatkon differentiaalille

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} dy_2 \in T^*(J_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})) \quad (29)$$

saadaan

$$dg(v) = 0. \quad (30)$$

Kontaktimuotojakin on nyt kaksi. Entisestä kontaktimuodosta $\alpha_1 \in T^*(J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}))$ saadaan kanonisella projektiolla 1-muoto $\pi^* \alpha_1 \in T^*(J_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}))$. Yhtälön

$$(\pi^* \alpha_1)(v) = \alpha_1(d\pi(v)) = 0 \quad (31)$$

lisäksi on y_2 :n derivaattaominaisuuden $y_2 = \frac{d^2 y}{dx^2}$ määrittelevä yhtälö

$$\alpha_2(v) = 0, \quad (32)$$

missä

$$\alpha_2 = dy_1 - y_2 dx \in T^*(J_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})) \quad (33)$$

on toinen kontaktimuoto. Yhtälöt (28), (30), (31) ja (32) ovat nyt matriisimuodossa

$$B\mathbf{v} = 0, \quad (34)$$

missä

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y_1} & \frac{\partial g}{\partial y_2} \\ -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

ja

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \triangleq v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial y_1} + v_4 \frac{\partial}{\partial y_2} = v \in T(J_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})). \quad (36)$$

Koska nämä yhtälöt ovat differentiaaliyhtälöstä konsistentisti jatkettuja yhtälöitä, matriisia B vastaavan lineaarikuvauksen ydin on vähintään yksiulotteinen. Jos $\dim \mathcal{N}(B) = 1$, differentiaaliyhtälön ratkaisuja voidaan laskea edellä esitetyllä menetelmällä.

Yhtälön $f = 0$ määräämä pinta $J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$:ssä ei ole monisto, vaan se leikkaa itsensä, joten ratkaisukäyrän seuraaminen on mahdotonta leikkauskäyrän pisteissä; lisäksi lähellä singulariteettia se voi olla numeerisesti vaikeaa. Jatketun systeemin kohdalla tilanne voi olla samanlainen, jolloin ratkaisukäyrän laskeminen ei onnistu pinnan leikkauspisteissä.

3.2 Primääridekompositio

Yhtälöiden $f = 0$, $g = 0$ määräämää pintaa voidaan tarkastella polynomien f ja g virittämän ideaalin [8]

$$\mathcal{I}_{fg} = (f, g) = \{pf + qg \mid p \text{ ja } q \text{ muuttujien } x, y, y_1 \text{ ja } y_2 \text{ polynomeja}\} \quad (37)$$

affiinina varieteettina [5]

$$V(\mathcal{I}_{fg}) = \{(x, y, y_1, y_2) \in J_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \mid p(x, y, y_1, y_2) = 0 \forall p \in \mathcal{I}_{fg}\}. \quad (38)$$

Ideaalia \mathcal{I} sanotaan *primääri-ideaaliksi*, jos aina kun $ab \in \mathcal{I}$ ja $a \notin \mathcal{I}$, niin $b^p \in \mathcal{I}$ jollakin $p \in \mathbb{N}$. *Primääridekompositioksi* kutsutaan renkaan R ideaalin \mathcal{I} hajotelmaa

$$\mathcal{I} = \bigcap_{k=1}^r \mathcal{I}_k, \quad (39)$$

missä primääri-ideaalit $\mathcal{I}_k \in R$ toteuttavat seuraavat ehdot:

1. Mikään \mathcal{I}_k ei sisällä muiden ideaalien leikkausta $\mathcal{I}_1 \cap \dots \cap \mathcal{I}_{k-1} \cap \mathcal{I}_{k+1} \cap \dots \cap \mathcal{I}_r$.
2. $\mathcal{I}_k \neq \mathcal{I}_l$, kun $k \neq l$.

Primääridekompositio on hyödyllinen konstruktio, jos rengas R on *Noetherin rengas* eli kun jokaisella R :n ideaalilla on äärellinen määrä virittäjiä:

Lause 3.1 *Noetherin renkaan aidolla ideaalilla on yksikäsitteinen primääridekompositio.*

Todistus löytyy lähteestä [3]. □

Koska tarkasteltavat ideaalit ovat äärellisesti viritettyjä, ideaalille \mathcal{I}_{fg} voidaan siis muodostaa primääridekompositio

$$\mathcal{I}_{fg} = \bigcap_{k=1}^r \mathcal{I}_k. \quad (40)$$

Jättämällä leikkauksen ideaaleista osa pois saadaan laajempi ideaali

$$\mathcal{I}_{fg}^\circ = \bigcap_{k \in K \subset \{1, 2, \dots, r\}} \mathcal{I}_k. \quad (41)$$

Sen varieteetti on vastaavasti pienempi, koska varieteetin pisteille asetetaan enemmän rajoituksia. Sopivalla valinnalla voidaan saada se varieteetti, jolla differentiaaliyhtälön ratkaisuna mielekäs käyrä kulkee.

Koska kiinnostuksen kohteena on lähinnä ideaalin varieteetti, voidaan alkuideaalien sijaan tarkastella niiden *radikaali-ideaaleja* $r(\mathcal{I}_k) = \{p \mid p^n \in \mathcal{I}_k \text{ jollakin } n \in \mathbb{N}\}$, sillä

Lause 3.2 Jos $r(\mathcal{I})$ on ideaalin \mathcal{I} radikaali-ideaali, niin varieteetit $V(\mathcal{I})$ ja $V(r(\mathcal{I}))$ ovat samat.

Todistus Koska selvästi $\mathcal{I} \subset r(\mathcal{I})$, niin $V(r(\mathcal{I})) \subset V(\mathcal{I})$, joten riittää osoittaa, että $V(\mathcal{I}) \subset V(r(\mathcal{I}))$. Olkoon $x \in V(\mathcal{I})$ mielivaltainen, jolloin siis $p(x) = 0$ kaikille $p \in \mathcal{I}$. Olkoon $q \in r(\mathcal{I})$ mielivaltainen. Tällöin $q^n \in \mathcal{I}$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, joten $(q(x))^n = 0$ ja siis myös $q(x) = 0$. Siten $x \in V(r(\mathcal{I}))$. \square

Primääridekompositio ja radikaali-ideaalit on laskettu Axiom-ohjelmiston [6] avulla. Käytetyt komentojonot on esitetty liitteessä 1.

4 Jatkettujen systeemien ratkaiseminen

4.1 Tapaus 2

Tapauksessa 2 jatko on

$$g(x, y, y_1, y_2) = 2x - 2yy_1y_2 - y_1^3 = 0. \quad (42)$$

Tällöin singulariteetissa

$$B = \begin{bmatrix} 2x & -y_1^2 & -2yy_1 & 0 \\ 2 & -2y_1y_2 & -2yy_2 - 3y_1^2 & -2yy_1 \\ -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{x=y_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2yy_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

joten $\dim \mathcal{N}(B) = 2$, täsmälleen silloin kuin $yy_2^2 = 1$, jolloin B:n vasemman alakulman 3×3 -alimatriisin determinantti on nolla. Kuten yhtälöistä $f = g = 0$ käy ilmi, ratkaisukäyrillä nimenomaan pätee singulariteetissa $yy_2^2 = 1$, joten $\mathcal{N}(B)$ ei määrää ratkaisukäyrän suuntaa singulariteetissa.

Ratkaisun seuraaminen onnistuu kuitenkin hyödynnettäessä primääridekompositiota

$$\mathcal{I}_{fg} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3, \quad (44)$$

missä

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= (y_2^2y_1^2, y_2y_1y - x, y_2y_1x, x^2) \\ \mathcal{I}_2 &= (2y_2y_1y + y_1^3 - 2x, y_1^2y, y_2y_1y^2 - yx, y_1yx, y^2, y^2x, x^2) \\ \mathcal{I}_3 &= (y_2^2y^2 - \frac{1}{4}y_1^4 + y_1x - y, y_2y_1y + \frac{1}{2}y_1^3 - x, \\ &\quad y_2yx + \frac{1}{2}y_1^2x - y_1y, y_2x^2 + \frac{1}{2}y_1^4 - y_1x, y_1^2y - x^2). \end{aligned} \quad (45)$$

Niitä vastaavat radikaali-ideaalit ovat

$$\begin{aligned} r(\mathcal{I}_1) &= (y_2y_1, x) \\ r(\mathcal{I}_2) &= (y_1, y, x) \\ r(\mathcal{I}_3) &= (y_2^2y^2 - \frac{1}{4}y_1^4 + y_1x - y, y_2y_1y + \frac{1}{2}y_1^3 - x, \\ &\quad y_2yx + \frac{1}{2}y_1^2x - y_1y, y_2x^2 + \frac{1}{2}y_1^4 - y_1x, y_1^2y - x^2). \end{aligned} \quad (46)$$

Huomattakoon, että ideaalin \mathcal{I}_{fg} radikaali-ideaali on

$$r(\mathcal{I}_{fg}) = (y_2y_1y + \frac{1}{2}y_1^3 - x, y_2yx + \frac{1}{2}y_1^2x - y_1y, y_2x^2 + \frac{1}{2}y_1^4 - y_1x, y_1^2y - x^2), \quad (47)$$

ja $r(\mathcal{I}_3)$:n virittäjät saadaan lisäämällä tämän virittäjiin polynomi $y_2^2 y^2 - \frac{1}{4} y_1^4 + y_1 x - y$, ja että tässä, kuten muillakin permutaatioilla, viimeisessä ideaalissa esiintyy alkuperäinen yhtälö $f = 0$.

Jätetään huomiotta “mielenkiinnottomat” ideaalit \mathcal{I}_1 ja \mathcal{I}_2 , joiden varieteetit ovat systeemin singulariteetti ja origo. Valitaan siis $\mathcal{I}_{fg}^\circ = \mathcal{I}_3$.

Merkitään $r(\mathcal{I}_3)$:n virittäjiä yhtälössä (46) esitettyssä järjestyksessä f_1, f_2, f_3, f_4 ja f_5 . Asettamalla $f_1 = f_2 = 0$ saadaan ratkaistua

$$x = y y_1 y_2 + \frac{1}{2} y_1^3, \quad y_2 = \frac{-y_1^2 \pm 2\sqrt{y}}{2y}. \quad (48)$$

Neliöjuuren merkin eri valinnoilla saatavat pinnat eivät leikkaa toisiaan, sillä kun $\sqrt{y} \rightarrow 0$, $y_2 \rightarrow \infty$. Kun nämä x :n ja y_2 :n lausekkeet sijoitetaan yhtälöihin $f_3 = 0$, $f_4 = 0$ ja $f_5 = 0$, ne toteutuvat identtisesti. Täten \mathcal{I}_3 :n informaatio sisältyy jo polynomeihin f_1 ja f_2 siinä mielessä, että

$$V(\mathcal{I}_3) = V(r(\mathcal{I}_3)) = V((f_1, f_2)). \quad (49)$$

Tämä on numeeristen laskujen kannalta mukavaa, koska distribuutio voidaan nyt laskea neliömatriisin

$$B^\circ = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \\ -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & 2y y_2^2 - 1 & x - y_1^3 & 2y^2 y_2 \\ -1 & y_1 y_2 & \frac{3}{2} y_1^2 + y y_2 & y y_1 \\ -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

nolla-avaruudesta.

Lausekkeista (48) nähdään, että y_2 -akseli ei leikkaa pintaa $V(\mathcal{I}_3)$. Tämä sopii yhteen klassisen ratkaisun

$$y = \left(\frac{3}{4}x^2 + C\right)^{2/3} \quad (51)$$

kanssa sikäli, että ainoa yhtälöt $x = y = y_1 = 0$ toteuttava ratkaisu saadaan C :n arvolla 0, jonka toinen derivaatta

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{3}{4}x^2 + C\right)^{2/3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} x^{-2/3} \quad (52)$$

lähestyy ääretöntä, kun $x \rightarrow 0$.

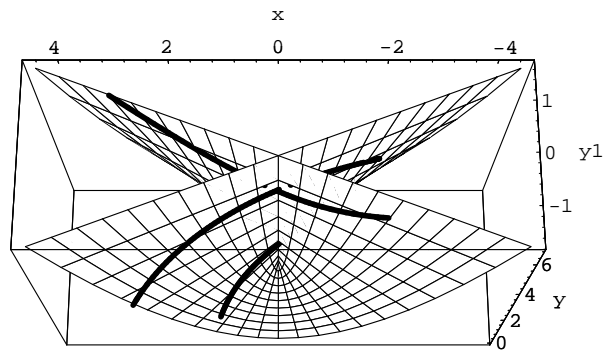
Kuvassa 2 on piirretty kolme tapauksen 2 ratkaisukäyrää, joiden alkupisteet ja niitä vastaavat klassisen ratkaisun parametrin C arvot ovat:

- $(x, y, y_1, y_2) = \left(-2, 4, 1, -\frac{5}{8}\right)$, $C = -11$
- $(x, y, y_1, y_2) = \left(-2, \sqrt[3]{196}, -\sqrt[3]{\frac{4}{7}}, \sqrt[3]{\frac{108}{2401}}\right)$, $C = 11$
- $(x, y, y_1, y_2) = \left(-1, 1, 1, -\frac{3}{2}\right)$, $C = -\frac{7}{4}$.

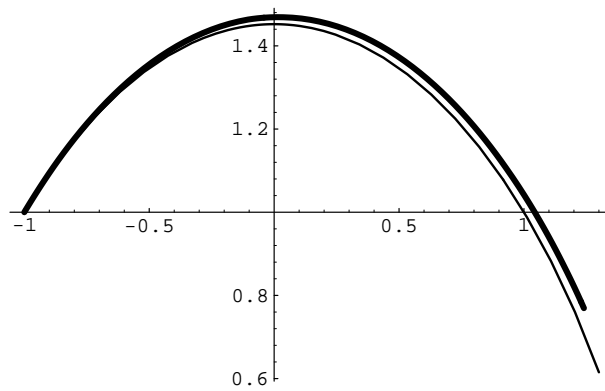
Näistä kaksi ensimmäistä leikkaa toisensa singulariteetissa korkeudella $\sqrt[3]{121}$. Kolmas läpäisee singulariteetin korkeudella $\sqrt[3]{\frac{49}{16}}$. Laskut on tehty Mathematica-ohjelmistolla käyttäen lähteessä [2] esiteltyä ohjelmaa.

Kuvassa 3 on piirretty xy -tasoon pisteestä $(x, y) = (-1, 1)$ lähtien numeerisesti laskettu ratkaisu (100 askelta, toleranssi 0,001) sekä tarkka ratkaisu

$$y = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{4}\right)^{2/3}. \quad (53)$$



Kuva 2: Ratkaisuja tapauksessa 2



Kuva 3: Tarkka (ohut viiva) ja numeerisesti laskettu ratkaisu (paksu viiva) tapauksessa 2

4.2 Tapaus 3

Tapauksen 3 kaikki klassiset ratkaisut

$$y = \frac{x}{1 + Cx} \quad (54)$$

kulkevat $J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$:ssä pisteen $(x, y, y_1) = (0, 0, 1)$ kautta, minkä takia ratkaisukäyrän suunnan laskeminen tuossa pisteessä ei voi onnistua. Systeemin jatkaminen auttaa, sillä toinen derivaatta

$$y_2 = \frac{-2C}{(1 + Cx)^3} \Big|_{x=0} = -2C \quad (55)$$

riippuu parametrin C arvosta. Jatketun systeemin distribuutio on singulariteetissa silti kaksiulotteinen, sillä

$$B = \begin{bmatrix} 2xy_1 & -2y & x^2 & 0 \\ 2y_1 + 2xy_2 & -2y_1 & 2(x-y) & x^2 \\ -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{x=y=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2y_1 & -2y_1 & 0 & 0 \\ -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

jonka 3×3 -alimatriisin determinantti $2y_1 - 2y_1^2 = 0$, onhan $y_1 = 1$ kaikilla ratkaisuilla.

Eteenpäin päästään käyttämällä primääridekompositiota

$$\mathcal{I}_{fg} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 \cap \mathcal{I}_4, \quad (57)$$

missä

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= (y - x, x^2) \\ \mathcal{I}_2 &= (y_1^2 - 2y_2 + 1, -y_2x^2 + y_1x^2 - x^2, \frac{1}{2}y_2^2x^2 - \frac{1}{2}y_2x^2 + y - x, x^4) \\ \mathcal{I}_3 &= (y_1^8, -\frac{1}{2}x^2 + y_1y - y_1x, \\ &\quad -\frac{1}{2}y_2^2yx^3 + \frac{1}{2}y_2yx^2 + \frac{1}{2}y_2x^3 + y_1x^2, -\frac{1}{2}y_2^2yx^3 + \frac{1}{2}y_2yx^2 + \frac{1}{2}y_2x^3 + y^2, x^4) \\ \mathcal{I}_4 &= (y_2y + y_2x - 2y_1^2 + 2y_1, y_2x^2 - 2y_1y + 2y_1x, y_1x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (58)$$

Niitä vastaavat radikaali-ideaalit ovat

$$\begin{aligned} r(\mathcal{I}_1) &= (y, x) \\ r(\mathcal{I}_2) &= (y_1 - 1, y, x) \\ r(\mathcal{I}_3) &= (y_1, y, x) \\ r(\mathcal{I}_4) &= (y_2y + y_2x - 2y_1^2 + 2y_1, y_2x^2 - 2y_1y + 2y_1x, y_1x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (59)$$

Näistä hylätään taas “mielenkiinnottomina” muut kuin \mathcal{I}_4 , jonka virittäjiä merkitään yhtälössä (59) esitettyssä järjestyksessä f_1, f_2 ja f_3 . Ehto $y_1 = 1$ singulariteetissa saadaan tällöin sijoittamalla f_1 :n lausekkeeseen $x = y = 0$, jolloin saadaan

$$2y_1(1 - y_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0 \vee y_1 = 1 \quad (60)$$

ja huomaamalla, että jos $y_1 = 0$, saadaan pelkästään triviaaliratkaisu $y \equiv 0$.

Varieteetti $V(\mathcal{I}_4)$ saadaan nyt käyttämällä pelkästään yhtälöitä $f_1 = 0$ ja $f_2 = 0$: Jos $y_2 \neq 0$, niistä voidaan ratkaista

$$x = \frac{2y_1(-1 \pm \sqrt{y_1})}{y_2} \quad y = \frac{2y_1^{3/2}(\sqrt{y_1} \mp 1)}{y_2}, \quad (61)$$

ja sijoitettaessa nämä yhtälö $f_3 = 0$ toteutuu identtisesti. Lausekkeissa esiintyvät \pm - ja \mp -merkit eivät nytkään ole osoitus siitä, että pinta $V(\mathcal{I}_3)$ leikkaisi itsensä, sillä koska $y_1 = 1 \neq 0$, haarat eivät yhdy missään.

Jos taas $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = -2C = 0$, voidaan ratkaista suoraan

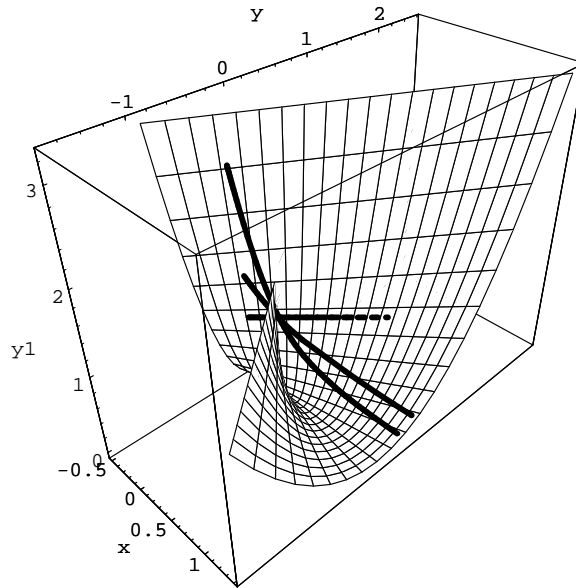
$$f_1 = 0 \Leftrightarrow (y_1 = 0 \vee) y_1 = 1 \quad (62)$$

$$f_2 = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad (63)$$

mitkä toteuttavat identtisesti yhtälön $f_3 = 0$. Ratkaisun tangentti voidaan siis laskea singulariteetissa neliömatriisin

$$B^\circ = \left[\begin{array}{cccc} y_2 & y_2 & 2 - 4y_1 & x + y \\ 2xy_2 & -2y_1 & 2(x - y) & x^2 \\ -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Big|_{x=y=0} = \left[\begin{array}{cccc} y_2 & y_2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (64)$$

nolla-avaruudesta, sillä B° :n vasemman alakulman 3×3 -osamatriisin determinantti on $-2y_1 = -2 \neq 0$, sillä ratkaisukäyrällä $y_1 = 1$.



Kuva 4: Ratkaisuja tapauksessa 3

Kuvassa 4 näkyy kolme ratkaisukäyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteessä $(x, y, y_1) = (0, 0, 1)$. Niiden alkupisteet ja vastaavat klassisen ratkaisun (54) parametrin C arvot ovat:

- $(x, y, y_1, y_2) = (-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 1, 0)$, $C = 0$
- $(x, y, y_1, y_2) = (-\frac{1}{5}, -\frac{1}{4}, \frac{25}{16}, \frac{125}{32})$, $C = 1$
- $(x, y, y_1, y_2) = (-\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{37037}{2000})$, $C = 2$.

Ratkaisukäyrät on laskettu ja piirretty nytkin [2]-lähteen ohjelman avulla.

4.3 Tapaus 5

Tapauksessa 5 matriisin

$$B = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & -2y_1 & 0 \\ 2xy_1 + 2y & 2x & x^2 - 2y_2 & -2y_1 \\ -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{x=y_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2y & 0 & -2y_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

nolla-avarus on singulariteetissa kaksiulotteinen, sillä samoin kuin tapauksessa 2 nähdään yhtälöistä $f = g = 0$, että $y = y_2^2$.

Primääridekompositioksi saadaan nyt

$$\mathcal{I}_{fg} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 \cap \mathcal{I}_4, \quad (66)$$

missä

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= (y_2 y_1 - yx, y_1^2, y_1 x, x^2) \\ \mathcal{I}_2 &= (y_1, y) \\ \mathcal{I}_3 &= (y_2 - \frac{1}{2}x^2, y_1^2, y) \\ \mathcal{I}_4 &= (y_2^2 - y_1 x - y - \frac{1}{4}x^4, y_2 y_1 - \frac{1}{2}y_1 x^2 - yx, y_2 x - y_1 - \frac{1}{2}x^3, y_1^2 - yx^2). \end{aligned} \quad (67)$$

Niitä vastaavat radikaali-ideaalit ovat

$$\begin{aligned} r(\mathcal{I}_1) &= (y_1, x) \\ r(\mathcal{I}_2) &= (y_1, y) \\ r(\mathcal{I}_3) &= (y_2 - \frac{1}{2}x^2, y_1, y) \\ r(\mathcal{I}_4) &= (y_2^2 - y_1 x - y - \frac{1}{4}x^4, y_2 y_1 - \frac{1}{2}y_1 x^2 - yx, y_2 x - y_1 - \frac{1}{2}x^3, y_1^2 - yx^2). \end{aligned} \quad (68)$$

Jätetään jälleen huomiotta muut kuin $\mathcal{I}_4 = \mathcal{I}_{fg}^\circ$ ja merkitään sen virittäjiä yhtälössä (68) esiintyvässä järjestyksessä f_1, f_2, f_3 ja f_4 . Yhtälöistä $f_1 = f_3 = 0$ voidaan nyt ratkaista suoraan

$$y = y_2^2 - y_2 x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad y_1 = y_2 x - \frac{1}{2}x^3, \quad (69)$$

jotka toteuttavat yhtälöt $f_2 = f_4 = 0$.

Ratkaisukäyrän tangentti määräytyy singulariteetissa siis neliömatriisin

$$B^\circ = \begin{bmatrix} -x^3 - y_1 & -1 & -x & 2y_2 \\ -\frac{3}{2}x^2 + y_2 & 0 & -1 & x \\ -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{x=y_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2y_2 \\ y_2 & 0 & - & 0 \\ -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

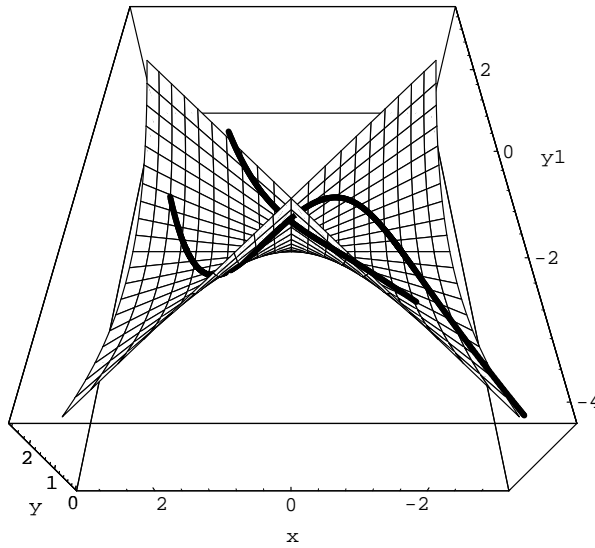
nolla-avaruudesta, joka on yksiulotteinen paitsi, kun $y_2 = 0$.

Jos $y_2 = 0$, seuraa yhtälöstä $f_1 = 0$, että $y = 0$. Tämä tilanne vastaa vain yhtä yksittäistä klassista ratkaisua: parametrin C arvon täytyy olla 0, jolloin $y = \frac{x^4}{16}$. Tällöin mistään ideaalin \mathcal{I}_3 polynomista ei saada ehtoa x - eikä y_2 -komponentille, joten ratkaisukäyrän seuraaminen ei onnistu. Systeemin jatkaminen uudelleen saattaisi tällöin tuottaa tuloksia.

Kuvassa 5 on piirrettyä kaksi tapauksen 5 ratkaisukäyrää, joiden alkupisteet ja niitä vastaavat klassisen ratkaisun

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2 \quad (71)$$

parametrin C arvot ovat:



Kuva 5: Ratkaisuja tapauksessa 5

- $(x, y, y_1, y_2) = (-2, 4, -4, 4)$, $C = 1$
- $(x, y, y_1, y_2) = (-3, \frac{25}{16}, -\frac{15}{4}, \frac{23}{4})$, $C = -1$.

Ratkaisukäyrät leikkaavat toisensa singulariteetissa korkeudella 1. Huomattakoon jälkimmäisen ratkaisun kohdalla mielenkiintoinen kulkeminen sateenvarjon “lehdeltä” toiselle “laakson” $y = 0$ kautta.

5 Yhteenveto

Systeemin jatkaminen ja primääridekomposition soveltaminen väärin komponenttien poistamiseen osoittautui Whitneyyn sateenvarjon kohdalla toimivaksi menetelmäksi singulariteetin poistamiseen.

Tapauksessa 5 jäi yksittäinen ratkaisu, jonka laskeminen ei onnistunut $J_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$:ssä eikä alkuperäisen systeemin singulariteetikohdassa. Tämä tilanne muistuttaa tapauksen 1 tilannetta, jossa vain yksi ratkaisu kulki singulariteetin kautta $J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$:ssä. Systeemin jatkaminen saattaisi auttaa molemmissa tapauksissa, mutta sitä ei kokeiltu.

Menetelmä vaatii jonkin verran käsityötä sen analysoinnissa, mitkä primääridekomposition antamista ideaaleista jätetään huomiotta, kun halutaan poistaa varieteetin epäoleelliset komponentit. Jotta menetelmästä saataisiin helpokäyttöinen algoritmi, tämä askel pitäisi saada automatisoitua. Tällöin olisi myös syytä selvittää teoreettisesti, onko tällainen ylipäättään aina mahdollista.

Merkinnät

$\underline{\Delta}$	Vastaa
$\frac{\partial}{\partial \xi}$	Moniston M lokaalin koordinaatin ξ suuntainen kantavektori tangentiavarudessa $T(M)$
$d\xi$	Moniston M koordinaattifunktion ξ differentiaali eli $T^*(M)$:n $\frac{\partial}{\partial \xi}$:lle duaalinen kantavektori
$\dim V$	Vektoriavaruuden V dimensio
$J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$	Tavallisten reaalisten differentiaaliyhtälöiden ensimmäisen kertaluvun suihkuavaruus
$J_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$	Tavallisten reaalisten differentiaaliyhtälöiden toisen kertaluvun suihkuavaruus
\mathbb{N}	Luonnollisten lukujen joukko $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathcal{N}(A)$	Matriisin A nolla-avaruus
π	Kanoninen projektio
\mathbb{R}	Reaalilukujen joukko
$T(M)$	Moniston M tangentiavaruus
$T^*(M)$	$T(M)$:n duaali eli moniston M tangentiavaruuden lineaaristen funktionaalien lineaariavaruus

Nimitykset

Distributio	Distribution	3
Integraalimonisto	Integral manifold	3
Jatkaminen, jatko	Prolongation	3.1
Kontaktimuoto	Contact form	2, 3.1
Noetherin rengas	Noetherian ring	3.2
Primääridekompositio	Primary decomposition	3.2
Suihkuavaruus	Jet space	2.1
Varieteetti	Variety	3.2

Viitteet

- [1] Teijo Arponen, Jukka Tuomela, *On the Numerical Solution of Involutive Ordinary Differential Equations: Numerical Results*, Research Report A370, Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology, 1996.
- [2] Teijo Arponen, *Differentiaaialgebrallisten yhtälöiden numeerinen laskenta*, diplomityö Teknillisen korkeakoulun teknillisen matematiikan ja fysiikan osastolla, 1996.
- [3] Thomas Becker, Volker Weispfenning, *Gröbner Bases: A Computational Approach to Commutative Algebra*, Springer-Verlag, 1993.
- [4] William M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Second Edition, Academic Press, 1986.
- [5] David Cox, John Little, Donal O'Shea, *Ideals, Varieties, Algorithms*, Springer-Verlag, 1992.
- [6] Richard D. Jenks, Robert S. Sutor, *Axiom: The Scientific Computation System*, Springer-Verlag, 1992.
- [7] Klaus Jänich, *Vektoranalysis*, 2. Auflage, Springer-Verlag, 1993.
- [8] W. Keith Nicholson, *Introduction to Abstract Algebra*, PWS-Kent, 1993.
- [9] Jukka Tuomela, *On the Numerical Solution of Involutive Ordinary Differential Equations*, Research Report A383, Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology, 1996.

Liite 1 Axiom-komentojonot

Primääridekomposition laskemiseen on käytetty seuraavia axiom-komentojonoja:

Tapaus 2

```
dp:=ODPOL(UP(x,FRAC INT));
y:=makeVariable('y)$dp;
p1:dp:=y.0*y.1**2-x^2;          -- tapaus 2
)read djaprdec
```

Tapaus 3

```
dp:=ODPOL(UP(x,FRAC INT));
y:=makeVariable('y)$dp;
p1:dp:=y.1*x**2-y.0**2;        -- tapaus 3
)read djaprdec
```

Tapaus 5

```
dp:=ODPOL(UP(x,FRAC INT));
y:=makeVariable('y)$dp;
p1:dp:=y.0*x**2-y.1**2;        -- tapaus 5
)read djaprdec
```

Näissä talletetaan Orderly DifferentialPolynomial -tyyppiseen muuttujaan $p1$ käsiteltävä polynomi $f : J_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Vapaata muuttujaa x merkitään x :llä ja ratkaisua y $y.0$:lla. Ratkaisun derivaattoja y_1 ja y_2 merkitään $y.1$:llä ja $y.2$:lla.

Lopuksi kutsutaan jäljempänä esitettävää `djaprdec`-komentojonoa.

Yhteinen osuus: `djaprdec`

```
p2:=D(p1);
pz1:=(eval(p1,[y.1=z1,y.0=z])) :: DMP([z2,z1,z,x],FRAC INT);
pz2:=(eval(p2,[y.1=z1,y.0=z,y.2=z2])) :: DMP([z2,z1,z,x],FRAC INT);
idp:=ideal([pz1,pz2]);
radical(idp)
dec:=primaryDecomp(idp);
#dec
for i in 1..#dec repeat output dec.i
for i in 1..#dec repeat output radical(dec.i)
```

Yhteisessä osuudessa derivoidaan ensin $p1$:llä merkitty polynomi f . Näin saatava jatko g talletetaan nimelle $p2$.

Seuraavaksi p_1 ja p_2 muunnetaan Distributed Multivariate Polynomial -tyyppisiksi ja tallennetaan nimille pz_1 ja pz_2 , koska primääridekompositio on määritelty axiomissa vain tämäntyyppisten olioiden virittämille ideaaleille. Näissä polynomeissa merkitään x :ää edelleen x :llä, mutta y :tä ja sen derivaattoja y_1 ja y_2 merkitään z :lla, z_1 :llä ja z_2 :lla.

Polynomien pz_1 ja pz_2 virittämä ideaali tallennetaan muuttujaan idp ja sen radikaali-ideaali lasketaan mielenkiinnon vuoksi. Seuraavaksi lasketaan idp :n primääridekompositio ja se tallennetaan muuttujaan dec . Lopuksi tulostetaan primääridekomposition ideaalit sekä niiden radikaali-ideaalit.