Laplacemuunnosten perusteet kurssilla S1; v.1.0

Jarmo Malinen

1. joulukuuta 2009

Sisältö

1 Alkusanat

Laplace-muunnos on yksi arvokkaimpia signaalinkäsittelyn, säätöteorian ja piirianalyysin matemaattisista työkaluista. Sen avulla differentiaaliyhtälöillä erityisesti alkuarvotehtävinä kuvattuja fysikaalisia tilanteita voidaan tarkastella algebrallisina yhtälöinä. Piirianalyysissa ja säätöteoriassa Laplace-muunnos johtaa lähes välittömästi siirtofunktiotekniikoihin.

Tämä moniste on johdanto Laplace-muunnosmenetelmän käyttöön yksinkertaisimmissa tilanteissa. Sovellutuksena tarkastellaan vakiokertoimista lineaarista differentiaaliyhtälöä. Konvoluutiota, Diracin δ-funktiota, viivästettyjen ja eksp. vaimennettujen funktioiden muunnoksia ja Laplace-muunnoksen käänteismuunnoskaavoja ei käsitellä. Materiaalin laajuus on 3 – 4 luentotuntia, ja se on tarkoitettu avuksi TKK:n kurssilla "Piirianalyysi II" tarvittavaan matematiikkaan. Moniste seuraa jossain määrin Martion ja Sarvaksen kirjassa "Tavalliset differentiaaliyhtälöt" olevaa suppeaa esitystä.

Monisteesta löytyvistä (varmasti lukuisista) virheistä pyydän ilmoittamaan sähköpostitse: jmalinen@math.tkk.fi.

Jarmo Malinen

2 Määritelmiä

Ennen kuin voimme määritellä Laplace-muunnoksen erään integraalin avulla, on tarpeen rajata se joukko funktioita, joille muunnoksen laskeminen on ylipäätään mahdollista.

Määritelmä 1. *Funktio* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *on* Laplace-muuntuva[1] *mikäli* f *on paloittain jatkuva, ja on olemassa vakio* $s > 0$ *jolle*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0. \tag{1}$$

Lukua $M_f = \inf\{s > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0\}$ *kutsutaan funktion* f kasvurajaksi.

Laplace-muuntuvan funktion $f(t)$ kasvun (kun $t \to \infty$) tulee siis "hävitä" eksponenttifunktiolle e^{-st} jollain äärellisellä, mahdollisesti hyvin isolla luvulla $s > 0$. Kaikki funktiot

[1] Laplace-muuntuvuudelle voidaan antaa paljon yleisempiäkin määritelmiä, joiden avulla useammille funktioille voidaan laskea Laplace-muunnos. Tällaiset yleistykset eivät kuitenkaan ole tämän monisteen aihepiirissä.

eivät toteuta tätä; esimerkkinä tästä $g(t) = e^{t^2}$. Erikoisesti jokainen rajoitettu, paloittain jatkuva funktio on Laplace-muuntuva “kuristusperiaatteen” nojalla: jos $|f(t)| \leq M$ jokaisella $t \geq 0$, niin

$$\left|e^{-st} f(t)\right| \leq M e^{-st} \to 0 \text{ kun } t \to \infty.$$

Jokaisen rajoitetun funktion kasvuraja on aina $= 0$.

Huomautus 2. *Olkoon f Laplace-muuntuva, ja merkitään sen kasvurajaa M_f. Vaikka ehto* (1) *toteutuu tällöin jokaiselle $s > M_f$ (välittömästi joukon infimumin eli suurimman alarajan määritelmän mukaan), ehto ei välttämättä toteudu kun $s = M_f$. Esimerkiksi funktio $h(t) = e^{s_1 t}$, jolle pätee $M_h = s_1$.*

Laplace-muunnos määritellään eräällä epäoleellisella integraalilla, jossa funktiota joudutaan integroimaan koko positiivisen reaaliakselin $\mathbb{R}_+$ yli. Paloittain jatkuvan funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ epäoleellisen, joukon $\mathbb{R}_+$ yli ulotetun integraalin $\int_0^\infty g(t)\, dt$ sanotaan *olevan olemassa* eli *suppenevan*, mikäli raja-arvo on olemassa kaavassa

$$I = \lim_{M \to \infty} I_M \quad \text{jossa} \quad I_M := \int_0^M g(t)\, dt.$$

Tällöin merkitään epäoleellista[2] integraalia lyhyesti $\int_0^\infty g(t)\, dt := I$. Nyt voimme vihdoin määritellä Laplace-muunnoksen:

Määritelmä 3. *Olkoon $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ Laplace-muuntuva, ja merkitään sen kasvurajaa M_f. Tällöin*

(i) f:n Laplace-muunnos *on funktio $\hat{f} : (M_f, \infty) \to \mathbb{C}$, jonka arvot määräytyvät epäoleellisesta integraalista*

$$\hat{f}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{2}$$

(ii) Laplace-muunnosoperaattori *on kuvaus $\mathcal{L} : f \mapsto \hat{f}$, jossa f ja $\hat{f}$ toteuttavat* (2)*.*

Funktion f Laplace-muunnosta *funktiona* merkitään joko symbolilla $\hat{f}$ tai $\mathcal{L}[f]$. Näiden funktioiden arvoja pisteessä $s > M_f$ merkitään tällöin $\hat{f}(s)$ tai $\mathcal{L}[f](s)$. Muuttujaa t on tapana kutsua *aikatason muuttujaksi* tai *aikaparametriksi*. Useissa tehtävissä se todellakin vastaa fysikaalista aikaa. Muuttujaa s kutsutaan *taajuustason muuttujaksi*, ja itse Laplace-muunnosoperaation $\mathcal{L}$ sanotaan “insinöörikielellä” antavan yhteyden aikatason ja taajuustason välillä.

Lukija mieltä jää ehkä kalvamaan epäilys siitä, onko epäoleellinen integraali (2) ylipäätään olemassa millään arvolla $s > 0$; ja onko Määritelmä 3 ylipäätään varmalla pohjalla. Onneksi Laplace-muuntuvuusehdon (1) toteutuessa epäoleellinen integraali suppenee:

[2] Vaikka jokainen $\int_0^M g(t)\, dt$ on määritelty Riemann-integraalina, ei niiden raja-arvoa $\int_0^\infty g(t)\, dt$ ole suoraan määritelty Riemannin ylä/alasummien avulla. Tämän takia raja-arvoa kutsutaan epäoleelliseksi integraaliksi.

Lemma 4. *Olkoon $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ Laplace-muuntuva, ja merkitään sen kasvurajaa M_f. Tällöin epäoleellinen integraali* (2) *suppenee (itseisesti).*

Todistus. Olkoon $s > M_f$ mielivaltainen. Koska f on paloittain jatkuva ja funktio $t \mapsto e^{-st}$, on niinikään näiden funktioiden tulo $t \mapsto e^{-st}f(t)$ paloittain jatkuva joukossa $\mathbb{R}_+$. Koska paloittain jatkuvat ovat Riemann-integroituvia jokaisella osavälillä $[0, M]$, jokainen Riemann-integraali $I_M := \int_0^M e^{-st}f(t)\,dt$ on olemassa kun $M \geq 0$. Pitää siis tutkia, mitä tapahtuu luvuille I_M kun annetaan $M \to \infty$.

Vaaditun raja-arvon olemassaololle joudutaan käyttämään nk. Cauchyn konvergenssikriteeriä, jonka matemattinen perustelu ohitetaan[3]. Cauchyn kriteerin mukaan $\lim_{M\to\infty} I_M \in \mathbb{C}$ on olemassa, jos ja vain jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa luku $N = N(\epsilon) > 0$ siten että toteutuu

$$\min(M_1, M_2) > N(\epsilon) \quad \mathbb{R}ightarrow \quad |I_{M_1} - I_{M_2}| < \epsilon.$$

Olkoon nyt $\epsilon > 0$, ja poimitaan jokin luku $s_0 \in (M_f, s)$. Sovitaan että luvuista M_1 ja M_2 suurempaa merkitään aina M_2:lla. Tällöin integraalilaskun säännöillä saadaan

$$\begin{aligned}
(3) \qquad |I_{M_2} - I_{M_1}| &= \left| \int_0^{M_2} e^{-st}f(t)\,dt - \int_0^{M_1} e^{-st}f(t)\,dt \right| = \left| \int_{M_1}^{M_2} e^{-st}f(t)\,dt \right| \\
&\leq \int_{M_1}^{M_2} \left|e^{-st}f(t)\right|\,dt = \int_{M_1}^{M_2} e^{-(s-s_0)t}\left|e^{-s_0t}f(t)\right|\,dt.
\end{aligned}$$

Koska f on Laplace-muuntuva ja $s_0 > M_f$, seuraa $\lim_{t\to\infty} e^{-s_0t}f(t) = 0$. Mutta nollaan suppenevat funktiot $\mathbb{R}_+$:lla ovat selvästi rajoitettuja (yritä vaikkapa piirtää sellainen joka ei olisi!), ja on siis olemassa vakio $C > 0$ jolle pätee $|e^{-s_0t}f(t)| \leq C$ kaikilla $t \geq 0$. Nyt voidaan yllä olevaa epäyhtälöketjua jatkaa:

$$\begin{aligned}
(4) \qquad \int_{M_1}^{M_2} e^{-(s-s_0)t}\left|e^{-s_0t}f(t)\right|\,dt &\leq C\int_{M_1}^{M_2} e^{-(s-s_0)t}\,dt = \frac{-C}{s-s_0} \Big/_{M_1}^{M_2} e^{-(s-s_0)t} \\
&= \frac{Ce^{-(s-s_0)M_1}}{s-s_0}\left(1 - e^{-(s-s_0)(M_2-M_1)}\right) \leq \frac{2Ce^{-(s-s_0)M_1}}{s-s_0}.
\end{aligned}$$

Koska $s - s_0 > 0$, voidaan viimeisessä termissä lukua $M_1 = \min(M_1, M_2)$ kasvattaa riittävän isoksi (eli $> N(\epsilon)$), niin että lopulta tosiaankin toteutuu epäyhtälöistä (3) ja (4) johdettu – Cauchyn konvergenssikriteerin vahvistava – epäyhtälö

$$|I_{M_2} - I_{M_1}| \leq \frac{2Ce^{-(s-s_0)M_1}}{s-s_0} < \epsilon.$$

Jätämme lukijalle tehtäväksi laskea logaritmien avulla lauseke luvulle $N(\epsilon)$, jokaista $\epsilon > 0$ kohden. □

[3]Huomaa, että Cauchyn kriteeri on varsin järkevä: Jotta raja-arvo $\lim_{M\to\infty} I_M$ voisi olla olemassa, on tarpeen että kaikki arvot I_{M_1} ja I_{M_2} ovat lähellä toisiaan, kunhan molemmat M_1, M_2 ovat vain riittävän suuria.

Huomautus 5. *Usein Laplacemuunnoksen $\hat{f}(s)$ muuttujan s sallitaan olevan kompleksiluku, joka toteuttaa $Re\, s > M_f$.*

Huomautus 6. *Usein funktion f tarkan kasvurajan M_f määrääminen on vaikeaa. Käytännön laskujen kannalta on kuitenkin olennaista vain se, että äärellinen kasvuraja on olemassa jolloin myös Laplace-muunnos on olemassa. Tarvittavat laskut tehdään tällöin "kaikilla riittävän isoilla luvuilla $s > 0$", eikä ole niin nökönuukaa tietää kuinka isoilla luvuilla $s > M_f$ oikeastaan lasketaan.*

Käytännön esimerkki valaiskoon edellä olevaa teoreettista tarkastelua. Huomaa, että usein laskut on pakko tehdä kompleksitasossa.

Esimerkki 7. Funktion e^{at} Laplace-muunnos, kun $a \in R$.

Ei ole epäilystä, etteikö eksponenttifunktio olisi Laplace-muuntuva. Itse laskukin on lähes naiivi:

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-(s-a)t}\, dt = \lim_{M\to\infty} \Big/_0^\infty \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} = \frac{1}{s-a},$$

kunhan $s > a$. (Varmista, että ymmärrät miksi!)

Esimerkki 8. Funktion $\sin t$ Laplace-muunnos.

Tämä on jatkuva ja rajoitettu funktio, joten se on niinmuodoin Laplace-muuntuva; kasvurajan ollessa $= 0$. Olkoon $s > 0$ mielivaltainen. Eulerin kaavan avulla, epäoleellista integraalia hieman epämuodollisesti käsitellen saadaan laskettua

$$\begin{aligned}(5)\qquad \int_0^\infty e^{-st}\sin t\, dt &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\, dt = \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-(s-i)t}\, dt - \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-(s+i)t}\, dt \\ &= \frac{1}{2i}\Big/_0^\infty \frac{e^{-(s-i)t}}{-(s-i)} - \frac{1}{2i}\Big/_0^\infty \frac{e^{-(s+i)t}}{-(s+i)}.\end{aligned}$$

Jotta sijoitustermi $+\infty$:ssä saadaan laskettua, tarvitaan raja-arvot $\lim_{M\to\infty} e^{-(s\pm i)M}$ kullekin $s > 0$. Mikäli imaginääriyksikköä ei kaavassa lainkaan esiintyisi, nähtäisiin suoraan että haluttu raja-arvo on nolla, ja sofistikoitunut veikkaus olisi sama myös kompleksilukutapauksessa. "Kuristusperiaatteella" ja kompleksimuuttujan eksponenttifunktion laskusäännöillä saadaan

$$|e^{-(s\pm i)M}| = e^{Re[-(s\pm i)M]} = e^{-sM} \to 0 \quad \text{kun } M \to \infty.$$

Siis sijoitustermit $+\infty$:ssä katoavat kaavassa (5), ja saadaan alarajatermeistä (huomaa miinusmerkki!)

$$\mathcal{L}[\sin](s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin t\, dt = \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{-(s-i)} + \frac{1}{-(s+i)}\right) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Esimerkki 9. Funktion $\cos t$ Laplace-muunnos.

Kosinin Laplace-muunnos voidaan laskea suoraan sinin Laplace-muunnoksesta, käyttämällä kaavaa $\cos t = \sin(\pi/2 - t)$ ja tekemällä integraalin sisällä muuttujan vaihto $v = \pi/2 - t$, $dv = -dt$. Jätetään lukijalle helpoksi harjoitustehtäväksi, jonka tulos on $\mathcal{L}[\cos](s) = \frac{s}{s^2+1}$.

Esimerkki 10. Askelfunktion Laplace-muunnos.

Paitsi siniaaltoa, usein signaaleina käytetään myös askelfunktiota

$$\chi_{[0,a]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t \in [0,a] \\ 0, & \text{kun } t > a. \end{cases}$$

Laplace-muunnos tulee suoralla laskulla kaikille $s > 0$

$$\mathcal{L}[\chi_{[0,a]}](s) = \int_0^\infty e^{-st}\chi_{[0,a]}(t)\,dt = \int_0^a e^{-st}\,dt = \Big/_0^a \frac{e^{-st}}{-s} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sa}\right).$$

3 Laplace-muunnoksen ominaisuuksia

Johdamme seuraavaksi Laplace-muunnosoperaation $\mathcal{L}$ perusominaisuuksia, joiden takia siitä tulee käyttökelpoinen insinöörimatematiikan työkalu.

Lause 11. *Laplace-muunnosoperaatio $\mathcal{L}$ on lineaarinen kuvaus, joka on määritelty kaikilla paloittain jatkuvilla funktioilla. Jatkuvien funktioiden joukkoon $C(\mathbb{R}_+)$ rajoitettuna $\mathcal{L}$ on lisäksi injektiivinen.*

Perustelu. Että $\mathcal{L}$ on lineaarinen, seuraa suoraan (epäoleellisten) integraalien laskusäännöistä. Paloittain jatkuville funktioille $f(t)$ ja $g(t)$, sekä vakioille $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ pätee[4]

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right)\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}\left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right)\,dt$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\alpha\int_0^R e^{-st}f(t)\,dt + \beta\int_0^R e^{-st}g(t)\,dt\right)$$

$$= \alpha\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}f(t)\,dt + \beta\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}g(t)\,dt = \alpha\mathcal{L}[f](s) + \beta\mathcal{L}[g](s).$$

Yllä oleva lasku on oikea jokaiselle $s > \max(M_f, M_g)$. Erityisesti huomaa, että funktioiden kasvurajat aina toteuttavat epäyhtälön

$$M_{\alpha f + \beta g} \leq \max(M_f, M_g).$$

[4]On hyvää harjoitusta epäoleellisen integraalin laskusäännöille, jos käy edellisen päättelyketjun askel askeleelta, ajatuksen kanssa läpi.

Kuten matriisilaskussa matriisien nolla-avaruuksia tutkittaessa, injektiivisyyden tarkistamiseksi riittää osoittaa seuraava: Jokainen Laplace-muuntuva *jatkuva* funktio f, jolle pätee

$$\mathcal{L}[f](s) = 0 \quad \text{kaikilla} \quad s > M$$

(jollain vakiolla $M > M_f$) on itse asiassa nollafunktio: $f(t) = 0$ kaikilla $t > 0$. Valitettavasti tämän väitteen todistaminen vaatii edistyneempiä työkaluja, kuin tällä kurssilla voidaan esittää. □

Lineaarisuuden avulla voidaan antaa funktion $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ Laplace-muunnos välittömästi, kunhan $\hat{f}$ ja $\hat{g}$ ovat tunnettuja. Mikäli taas $\mathcal{L}$ ei olisi injektiivinen, olisi useilla eri (jatkuvilla) funktiolla samat Laplace-muunnokset. Tämä tekisi Laplace-muunnostekniikan käyttökelvottomaksi, koska käänteismuunnoksen laskeminen olisi tällöin mahdotonta.

Usein aika-akselia halutaan venyttää tai kutistaa siten, että funktion $f(t)$ sijasta halutaan tutkia funktiota $f_a(t) := f(at)$, jossa $a > 0$ on vakio:

Lause 12. *Olkoon f Laplace-muuntuva ja $a > 0$. Tällöin funktio $f_a(t) := f(at)$ on Laplace-muuntuva, ja sen muunnos toteuttaa*

$$\mathcal{L}[f_a](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right).$$

Perustelu. Tämä on harjoitus integraalilaskennon muuttujanvaihdosta: Jokaiselle $s > \max(M_f, M_{f_a})$ pätee

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_a](s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(at)\, dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-s(\tau/a)} f(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(s/a)\tau} f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right),\end{aligned}$$

jossa muuttujanvaihtona[5] käytettiin $\tau = at$, $d\tau = a\, dt$. □

Esimerkki 13. Funktioiden $\sin at$ ja $\cos at$ Laplace-muunnokset, kun $a > 0$.

Lausetta 12 soveltamalla Esimerkeissä 8 ja 9 annettuihin muunnoksiin, saadaan eritaajuisille sinivärähtelyille muunnoskaavat

$$\mathcal{L}[\sin at](s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}[\cos at](s) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Jotta differentiaaliyhtälöitä voitaisiin käsitellä Laplace-muunnoksin, tulee tietää kuinka derivointi vaikuttaa funktion Laplace-muunnokseen

[5]Mikäli yllä oleva olisi tehty matemaattisesti täsmällisemmin, olisi jokainen integraali laskettu ensin *oleellisena integraalina* välillä $[0, R]$, ja vasta lopuksi siirrytty epäoleelliseen integraaliin antamalla $R \to \infty$. Lauseen 11 todistuksessa näin jaksettiin vielä tehdä, mutta tästä eteenpäin fuskaamme hieman.

Lause 14. *Jos f ja f' ovat Laplace-muuntuvia, niin tällöin $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.*

Perustelu. Tämä on epäoleellisen integraalin osittaisintegrointia. Jokaiselle $s > \max M_{f'}, M_f)$ pätee

$$\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \Big/_0^\infty e^{-st} f(t) - \int_0^\infty (-se^{-st}) f(t)\,dt$$
$$= -f(0) + s\mathcal{L}[f](s)$$

jossa osittaisintegroinnissa käytettiin sijoitusta $U = e^{-st}$, $dV = f'(t)\,dt$, $dU = -se^{-st}$, ja $V = f(t)$. Luku s on yllä olevassa laskussa kiinteä vakio, jota kohdellaan kuin mitä tahansa kompleksilukua – erityisesti sen voi tuoda ulos integraalimerkin alta. Tehdyn sijoituksen ylärajatermi ∞:ssä katoaa, koska $\lim_{R\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$ funktion f Laplace-muuntuvuuden perusteella. ☐

Huomaa, että funktio f voi aivan hyvin olla Laplace-muuntuva, ilman että sen derivaatta f' on. Esimerkiksi kelpaa rajoitettu, jatkuvasti derivoituva funktio $f(t) = \sin e^{t^2}$, jonka kasvuraja on $M_f = 0$. Sen derivaatta $f'(t) = 2te^{t^2} \cos e^{t^2}$ kasvaa turhan monissa pisteissä nopeammin kuin mikään eksponenttifunktio – niinpä sillä ei ole äärellistä kasvurajaa. Yritä huviksesi kuvitella miltä tällainen funktio kuulostaisi kuulokkeista soitettuna.

Esimerkki 15. Funktion $\cos t$ Laplace-muunnos toisella tavalla laskettuna.

Kosinin Laplace-muunnos voidaan laskea sinin Laplace-muunnoksesta käyttämällä hyväksi tietoa $\frac{d \sin t}{dt} = \cos t$. Saadaan suoraan Lauseen 14 perusteella

$$\mathcal{L}[\cos](s) = s\mathcal{L}[\sin](s) - \sin 0 = s \cdot \frac{1}{s^2+1} - 0 = \frac{s}{s^2+1}.$$

Korkeampien derivaattojen tapaus voidaan hoitaa soveltamalla Lausetta 14 useasti peräkkäin:

Korollaari 16. *Jos funktiot $f, f', \ldots, f^{(n)}$ ovat Laplace-muuntuvia, niin tällöin*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^k \mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0). \tag{6}$$

Jokainen derivaatoista (Korollaarin oletusten ollessa voimassa) $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ on itseasiassa jatkuva funktio (miksi?). Korkeimman kertaluvun derivaatalta $f^{(n)}$ riittää vaatia, että se on ainoastaan paloittain jatkuva.

Korollaarin perustelu tapauksessa $n = 2$. Käyttämällä Lausetta 14 kaksi kertaa saadaan jokaiselle $s > \max(M_f, M_{f'}, M_{f''})$:

$$\mathcal{L}[f''](s) = s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s\,(s\mathcal{L}[f](s) - f(0)) - f'(0)$$
$$= s^2 \mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0).$$

Ken vielä epäilee yleistä kaavaa (6) vääräksi, ruoskikoon itseään induktiotodistuksella tai laskemalla auki tapaukset $n = 3$, $n = 4$... kunnes sielunrauha on saavutettu. ☐

Funktion $f(t)$ derivoiminen n kertaa kertoo siis Laplace-muunnoksen $\hat{f}$ funktiolla s^n, mikäli unohdetaan $n-1$ asteinen polynomihäiriö $\sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0)$, joka tulee sijoitustermeistä. Integroiminen aiheuttaa luonnollisesti päinvastaisen ilmiön:

Lause 17. *Olkoon $f(t)$ jatkuva, Laplace-muuntuva funktio, ja määritellään sen eräs antiderivaatta $F(t) = \int_0^t f(v)\,dv$. Tällöin F on Laplace-muuntuva, ja jokaiselle $s > \max(M_f, M_F)$ pätee*

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s).$$

Perustelu. Integraalilaskennon päälauseen mukaan $F'(t) = f(t)$ jokaisella $t > 0$. Koska lisäksi $F(0) = 0$ tällä nimenomaisella antiderivaatalla, saadaan Lauseen 14 avulla

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[F'](s) = s\mathcal{L}[F](s) - F(0) = s\mathcal{L}[F](s).$$

Jakamalla yhtälön pää ja häntä muuttujalla s saadaan väite todistetuksi. □

4 Sovellutus vakiokertoimisiin lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin

Tarkastelemme vaimentamattoman jousimassasysteemin (tai LC-piirin) analyysiä edellä kuvatulla Laplace-muunnostekniikalla. Oletetaan, että kuormatekijänä on sinimuotoinen värähtely, jolloin alkuarvotehtävä voi olla esimerkiksi muotoa

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = \sin t \quad \text{kun} \quad t > 0, \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0. \end{cases} \tag{7}$$

Olkoon nyt $x(t)$ alkuarvotehtävän yksikäsitteinen ratkaisu, joka voitaisiin löytää esimerkiksi vakioidenvariointitekniikalla. Merkitään lyhyemmin $\hat{x}(s) = \mathcal{L}[x](s)$ kaikilla riittävän suurilla $s > 0$; tehdään se (vasta myöhemmin oikeaksi osoittautuva) oletus, että ratkaisu $x(t)$ derivaattoineen on Laplace-muuntuva. Käyttämällä hyväksi annettuja alkuehtoja, saadaan Korollaarin 16 perusteella

$$\mathcal{L}[x''](s) = s^2\hat{x}(s) - sx_0 - v_0.$$

Laplace-muunnoksen lineaarisuuden perusteella (ks. Lause 11) voidaan differentiaaliyhtälö alkuarvotehtävästä (7) muuntaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}[x'' + 4x - \sin](s) = \mathcal{L}[x''](s) + 4\hat{x}(s) - \mathcal{L}[\sin](s) \\ &= \left(s^2 + 4\right)\hat{x}(s) - sx_0 - v_0 - \frac{1}{s^2+1}, \end{aligned} \tag{8}$$

jossa viimeisellä rivillä on käytetty Esimerkissä 8 johdettua kaavaa sinifunktion Laplace-muunnokselle. Koska yhtälö (8) pätee kaikille $s > M$ jollain luvulla $M > 0$, voidaan ratkaista

$$\hat{x}(s) = \frac{sx_0 + v_0}{s^2 + 4} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} \quad \text{kaikilla} \quad s > M. \tag{9}$$

Alkuarvotehtävän (7) ratkaisu edellyttäisi nyt funktion $\hat{x}(s)$ käänteis-Laplace-muuntamista, joka osoittautuu olevan tämän menetelmän työläin askel. Usein tulee käyttää valmiita Laplace-muunnostaulukoita “käänteiseen suuntaan” taitavasti ja luovasti termejä ryhmitellen.

Tutkitaanpa, kuinka yhtälöstä (9) päätellään funktion $x(t)$ muoto. Alkuehtojen määräämä termi $\frac{sx_0+v_0}{s^2+4}$ yhtälössä (9) voidaan onneksi esittää helposti kombinaationa “venytetyn” sinin ja kosinin Laplace-muunnoksista (ks. Lause 12 ja Esimerkki 13): kaikille $s > 0$ pätee nimittäin

$$
\begin{aligned}
\frac{sx_0+v_0}{s^2+4} &= x_0 \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{v_0}{2} \cdot \frac{2}{s^2+4} \\
&= x_0 \mathcal{L}\left[\cos 2t\right](s) + \frac{v_0}{2}\mathcal{L}\left[\sin 2t\right](s) = \mathcal{L}\left[x_0 \cos 2t + \frac{v_0}{2}\sin 2t\right](s).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Jälkimmäinen, differentiaaliyhtälön epähomogeenisuudesta johtuva termi yhtälössä (9) vaatii enemmän kekseliäisyyttä. Se ei ole suoraan sinin ja kosinin Laplace-muunnosten näköinen, mutta rationaalifunktioiden integraalilaskennosta tutun osamurtolukukehitelmän avulla se voidaan saattaa muotoon

$$
\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{A}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+4}
$$

eräillä vakioilla A ja B. Ristiinkertomalla saadaan yhtälö $(A+B)s^2 + (4A+B) = 1$, joka toteutuu kaikilla $s > 0$ vain jos $A+B = 0$ ja $4A+B = 1$. Ratkaisemalla saadaan $A = 1/3$ ja $B = -1/3$. Niinpä

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} &= \frac{1/3}{s^2+1} - \frac{1/3}{s^2+4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{s^2+4} \\
&= \frac{1}{3}\mathcal{L}\left[\sin t\right](s) - \frac{1}{6}\mathcal{L}\left[\sin 2t\right](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t\right](s),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

joka pätee kaikilla $s > 0$.

Yhdistämällä yhtälöt (10) ja (11) yhtälöön (9) saadaan

$$
\hat{x}(s) = \mathcal{L}\left[x_0 \cos 2t + \frac{v_0}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t\right](s) \quad \text{kaikilla} \quad x > M.
$$

Kahdella eri *jatkuvalla* funktiolla ei voi olla samaa Laplace-muunnosta (Lauseen 11 injektiivisyysväitteen takia) ja yhtälön (7) ratkaisu on jopa kahdesti derivoituva. Siksi edellisestä yhtälöstä voidaan “kuoria pois” Laplace-muunnosoperaatio $\mathcal{L}$, ja saadaan

$$
x(t) = x_0 \cos 2t + \left(\frac{v_0}{2} - \frac{1}{6}\right)\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t
$$

kaikilla $t > 0$. Tämä on alkuarvotehtävän (7) etsitty ratkaisu, joka on (rajoitettuna, jatkuvana funktiona) Laplace-muuntuva. Niinpä jokainen edellä tehty askel oli itseasiassa matemaattisesti oikea, ja lukuna M olisi voitu käyttää $M = 0$ (paitsi, että laskujen ollessa keskeneräisiä emme sitä vielä siinä vaiheessa tienneet).

Huomautus 18. *Useissa insinöörisovellutuksissa ei alkuperäiselle funktiolle* $x(t)$ *ole käyttöä, vaan laskuissa voidaan jo pysähtyä helposti saavutettuun yhtälöön kuten* (10). *Tällöin kaikki tehtävän vaatima analyysi tehdään Laplace-muunnoksen puolella, ns.* taajuusaluetekniikoilla *(engl. frequency domain techniques).*

Huomautus 19. *Monimutkaisemmat ja korkeampiasteiset tapaukset käsitellään samalla tavalla kuin edellä annettu esimerkki. Käänteismuunnoksessa vaaditut teknilliset vaiheet ovat kuitenkin monimutkaisempia.*

Huomautus 20. *Laplace-muunnoksella voidaan myös käsitellä vektoriarvoisia yhtälöitä* $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$*, mutta tarvittavat yleistykset eivät enää ole näiden luentojen aihepiirissä.*

5 Usein esiintyvien funktioiden Laplace-muunnoksia

Funktio $f(t), t \geq 0$	**Laplace-muunnos** $\hat{f}(s)$ **ja sen määrittelyjoukko**
1	$\dfrac{1}{s}$ kun $s > 0$
e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a}$ kun $s > \max(0, a)$
$\sin bx; \quad b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$ kun $s > 0$
$\cos bx; \quad b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$ kun $s > 0$
$x^n; \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ kun $s > 0$
$x^n e^{ax}; \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ kun $s > \max(0, a)$
$e^{ax} \sin bx; \quad a, b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$ kun $s > 0$
$e^{ax} \cos bx; \quad a, b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{x-a}{(s-a)^2+b^2}$ kun $s > 0.$

Laajempia taulukoita löytyy mm. ammattikirjallisuudesta ja erikoisfunktioita käsittelevien kirjojen liitteinä.