Interpolaatio, käyrän sovitus ja lukujonot

Heikki Apiola
Aalto yliopisto, matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Lehtori emeritus
heikki.apiola@aalto.fi

Kirjoituksen lähtökohtana on solmun numerossa 1/2019 julkaistu *Antti Laaksosen* artikkeli "Kuinka löytää kaava lukujonolle".

Kirjoittaja esittelee joitakin kokonaislukujonoja, ja kysyy, miten voidaan löytää funktio, jonka arvoja jonon luvut ovat. Toki kysymys ei yleisessä muodossa ole mielekäs, onhan selvää, että ratkaisuja on ääretön määrä. Etsittävien funktioiden joukkoa tulee siis rajoittaa. Luonnollisin funktioluokka on varmasti *polynomit*, joihin kirjoittaja keskittyy.

Kysymys johtaa näin polynomi-interpolaatioon. Tuossa kirjoituksessa käsitellään asiaa laskemalla data-arvojen erotuksia. Itse asiassa tätä tekniikkaa käytetään *Newtonin interpolaatiomenetelmässä*, johon tämän kirjoituksen interpolaatiotekniikoiden esittely tietyllä tavalla huipentuu.

Noin 15 vuotta sitten kirjoitin Solmuun interpoloinnista varsin seikkaperäisesti:
https://matematiikkalehtisolmu.fi/2004/3/apiola.pdf
(viite [s04])

Kertaan tiiviisti tuossa kirjoituksessa varsin yksityiskohtaisesti esitettyjä teemoja, ja täydennän esitystä menetelmillä, joita tuolloin en ottanut mukaan.

Tarkastelen lopuksi näiden tekniikoiden sovelluksena *Antti Laaksosen* kirjoituksen hengessä eräiden muidenkin lukujonojen, erityisesti sarjojen osasummien saattamista ns. "suljettuun muotoon" interpolaatiotekniikkoja käyttäen. Tässä yhteydessä otan käyttöön symbolilaskennan ohjelmistoja. Esitän lopuksi **tietokoneavusteisen induktiotodistuksen** osasummalausekkeen yleispätevyyden osoittamiseksi.

Ohjelmointia: Kirjoituksen henki on sellainen, että esitetyt kaavat ja algoritmit pyritään saattamaan korken tason ohjelmointikieliä käyttäen mahdollisimman läpinäkyvästi koneella suoritettavaan muotoon. Suurin osa ohjelmakoodeista on MATLAB-kieltä, lähes kaikki esimerkit voi toteuttaa OCTAVE:lla, joka on vapaasti saatava MATLAB-"klooni". Lisäksi käytän symbolilaskentaohjelmia, vapaasti käytettävää MAXIMA:aa, MATLAB:n symbolic toolboxia ja MAPLE:a. Kaksi viimeksi mainittua sisältyy yleensä oppilaitosten kampuslisensseihin.
Ja mihin unohtui MATHEMATICA? Se on aivan erinomainen ohjelma, mutta kaikkea ei voi yhteen kirjoitukseen ahtaa. Sen esitystyyliä voi kokeilla *Wofram Alpha*:lla, johon myös viittaan.

Yllytän **vuorovaikutteiseen lukutapaan**. Vaikka et koodin yksityiskohtia heti ymmärrä, voit sijoittaa koodeja ohjelman komentoikkunaan tai editoriin ja kokeilla ja tehdä omia muunnelmia.

Lyhyesti: Yhdistelmä numeerista ja symbolista matematiikan tietokonekäsittelyä on tarjolla perinteisen kehittelyn lisäksi.

Ohjelmisto-ohjeita ja viitteitä:

Näihin ohjelmistoihin liittyviä käyttöesimerkkejä esiintyy kirjoituksessa. Suurin osa on MATLAB-kieltä, jota OCTAVE uskollisesti noudattaa.

1. - https://www.gnu.org/software/octave/
   - https://octave-online.net/ Ei tarvitse asentaa, rekisteröidy, niin voit käyttää skriptejä.
2. https://math.aalto.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/ Kaipaa päivittelyä, mutta päässee alkuun.
3. http://maxima.sourceforge.net/
4. http://www.wolfram.com/ Wolfran Alpha, MATHEMATICA

Neljän kohdan pikaohje:

OCTAVE:n käyttöliittymä: Kaksi pääikkunaa: *komentoikkuna* ja *editori*.

1. Voit kirjoittaa suoraan komentoikunaan tyyliin : `>> komento` tai voit kirjoittaa editori-ikkunaan ja suorittaa komennot sieltä.
2. MATLAB-nimi viittaa termiin "Matrix Laboratory", siksi erityisesti kertolasku, jakolasku ja potenssiin korotus tarkoittavat matriisilaskutoimituksia. Niinpä vaakavektorin `v` ja samanpituisen pystyvektorin `p` tulo `v*p` tarkoittaa vektorien sisätuloa: $v_1p_1 + v_2p_2 + \ldots v_np_n$.
3. *Alkioittaiset, pisteittäiset laskutoimitukset*: Usein tarvitaan esim. vektorien u ja v vastinalkioittaista tuloa `u.*v`, joka siis on vektori $[u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n]$. Vastaavasti pisteittäinen jakolasku ja potenssi.
4. Vektorin rakentaminen: Vaakavektori: `>> v=[1 2 3], tai 1:3` pystyveltori: `>> p=[1;2;3]` tai `p=v'`.

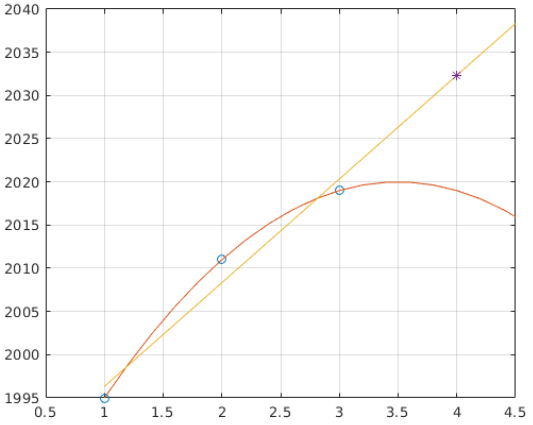
Näillä ja esimerkkikoodien kommenteilla pääsee toivottavasti eteenpäin. **Huomaa:** Tässä tekstissä oleva heittomerkki `(')` ei "copypastessa" tulkkaudu oikein, se pitää editoida itse.

Liikkeellelähtö

Ennen sitä **kysymys**: Mikä on seuraava luku jonossa $1995, 2011, 2019$? No tutkitaanpa. Avaa ohjelma OCTAVE joko asentamalla se ensin omalle koneellesi tai kirjautumalla sivulle Octave online. Kopioi seuraavat komennot OCTAVE:n editoriin vaikkapa tiedostoksi `morko.m` tai suoraan komentoikkunaan, ja anna palaa.

```
xd=1:3;     % xdata
yd=[1995 2011 2019] %ydata
a2=polyfit(xd,yd,2) % Interpolaatiopolynomin
                    % kertoimet
y4=polyval(a2,4)    % Polynomin ennnuste
xev=1:.2:5;% Tiheämpi pisteistö piirtämiseen
p2=polyval(a2,xev); % Polyn. arvot xev-pist.
plot(xd,yd,'o',xev,p2)
                  %Datapisteet ja "ennuste"
a1=polyfit(xd,yd,1)  % 1. asteen PNS-sovitus
hold on
plot(xev,polyval(a1,xev)) % .. ja kuva
plot(4,polyval(a1,4),'*') % kuvaan PNS-ennuste.
xlim([.5,4.5]); grid on
PNSennuste=polyval(a1,4) % Näytä arvo.
```

Saanet seuraavankaltaisen kuvan:



Interpolaatiopolynomi kääntyy pian kohti menneisyyttä, seuraavaksi arvoksi tulee 2019, HÖH! PNS-suora näyttää trendin, tulos 2032.3. Ken elää, se näkee!

Esimerkki havainnollistaa sitä, että interpolaatiopolynomi soveltuu yleensä huonosti tulvaisuuden ennustamiseen. Seuraavassa keskitytään kuitenkin interpolaatioon, sillä on huomattava merkitys mm. numeeristen algoritmien kehittämiselle ja sopivin muunnelmin myös matemaattiselle mallintamiselle, josta aiheeesta suunnittelen jatkokertomusta, toivottavasti ennenkuin seuraavat 15 vuotta kiitävät ohi.

Antti Laaksonen käsittelee shakkiongelmaa:"Miten monella tavalla voidaan $n \times n-$shakkilaudalla sijoittaa kaksi ratsua niin, etteivät ne uhkaa toisiaan ?" Tapaukset $n = 1$ ja $n = 2$ antavat selvästi mahdollisuuksia 0 ja 6. Kirjoittaja perustelee tapauksen $n = 3$ luettelemalla systemaattisesti kaikki mahdollisuudet, josta nähdään tulos: 28. Loppuosan jonosta hän antaa viitaten tietokonelaskelmiin. Joka tapauksessa käsillä on data, jonka esittäminen lukumääräänsä selvästi alempiasteisena polynomina antaa hypoteesin jonon jatkumisesta tätä polynomifunktiota noudattaen.

Laaksosen kirjoituksessa lasketaan datavektorin peräkkäisiä erotuksia. Katsotaanpa, miten OCTAVE:lla, jossa MATLAB:n mallin mukaan funktiot operoivat yleensä kokonaisiin vektoreihin. Tässä tarjoutuu itsestään selvästi funktio `diff`, joka laskee vektorin peräkkäisten komponenttien erotusvektorin.
Leikkaa/liimaa tai kirjoita alla olevat komennot OCTAVE:een.

```
s=[0; 6; 28; 96; 252; 550; 1056; 1848];
d0=s;
d1=diff(d0);% y-datan 1. erotukset
d2=diff(d1);% 2. erotukset
d3=diff(d2);% 3. erotukset
d4=diff(d3) % 4. erotukset (näytetään)
d5=diff(d4) % 5. erotukset (tietysti)
taulukko=[d0,[NaN;d1],[NaN;NaN;d2],...
[NaN;NaN;NaN;d3],[NaN;NaN;NaN;NaN;d4],...
[NaN;NaN;NaN;NaN;NaN;d5]]
```

Saadaan tulostukset (oikeasti pystyvektoreina):

```
  d4 =
    12    12    12    12
d5 =
     0     0     0
taulukko =
  0      NaN     NaN     NaN     NaN     NaN
  6       6      NaN     NaN     NaN     NaN
  28     22      16      NaN     NaN     NaN
  96     68      46      30      NaN     NaN
 252    156      88      42      12      NaN
 550    298      142     54      12       0
 1056   506      208     66      12       0
 1848   792      286     78      12       0
```

Siis 4. erotukset ovat vakioita, joten 5. erotukset $= 0$. Kuten Laaksonen toteaa, tästä voidaan päätellä, että koko annettu data voidaan esittää astetta 4 olevalla polynomilla. Koska `diff` lyhentää vektoria 1:llä, sijoitettiin taulukkoon täyttöalkiot `NaN`,"Not a Number". MATLAB:ssa laskutoimitus $0/0$ ei aiheuta ohjelman keskeytymistä virheeseen, vaan tuottaa tuloksen `NaN`. Sitä voidaan hyödyntää myös mm. "täyttötarkoitukseen".

Kirjoituksen lopulla palataan tähän differenssitaulukkoon.

Interpolaatio

Olkoon annettu taulukko

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

TAULUKKO 1

Voidaan ajatella, että kyse on annetun funktion taulukoiduista arvoista pisteissä $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Toisaalta taulukko voi edustaa johonkin havaintoaineistoon tai kokeeseen liittyviä mittaustuloksia, kuten lämpötilaa mitattuna vaikkapa tunnin välein, luokan oppilaiden pituuksia, kun oppilaat numeroidaan aakkosjärjestyksessä, jne.

Jos tiedetään, tai on aihetta olettaa, että luvut edustavat jonkin "sileän"[1] funktion arvoja hyvällä tarkkuudella laskettuna/mitattuna, voi olla järkevää asettaa tehtäväksi määrittää johonkin sopivaan funktioluokkaan kuuluva funktio, jonka kuvaaja kulkee tarkalleen kaikkien annettujen pisteiden kautta. Tällöin puhutaan *interpolaatiosta*.

Toisaalta, jos mittaukset ovat epätarkkoja, tai kaikkien pisteiden kautta kulkemisen vaatimus on muuten tilanteeseen sopimaton, voidaan etsiä aineistoon liittyvää pääsuuntaa, "trendiä" sopivan optimaalisuuskriteerin suhteen. Näistä eniten käytetty on ns. pienimmän neliösumman approksimaatio. Tällöin puhutaan interpolaatiota yleisemmin käyrän sovittamisesta aineistoon.

Lasketaan esimerkki Matlabin/Octaven valmiilla työkaluilla

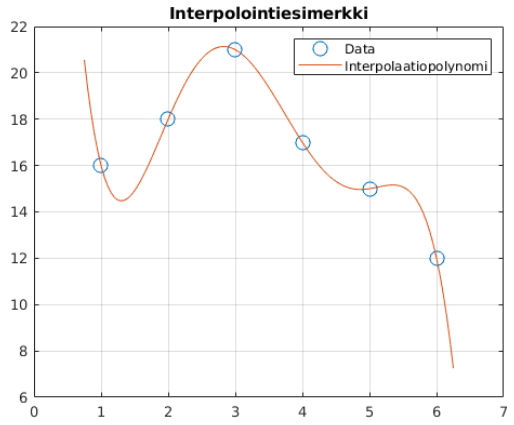
MATLAB:n ja OCTAVE:n käyttöympäristön pääosat ovat *komentoikkuna* ja *editori*. Komentoja voidaan syöttää suoran komentoikkunaan tai ne voidaan kirjoittaa editoriin ja suorittaa sieltä.

Seuraava istunto on tehty Octavella. Kehotetta (`>>`) seuraavat rivit ovat ohjelman komentoja ja muut komennon antamia tulosteita. Tuloste estetään puolipisteellä (;) komennon perässä. Lataa siis mielellään itsellesi OCTAVE tai kirjaudu Octave onlineen, kirjoita tai leikkaa/liimaa tekstistä kehotetta (`>>`) seuraavat komennot. Muista heittomerkin "copypaste"-ongelma, tässä `plot,legend,title`- komentojen yhteydessä.

```
>> xd=1:6  % xdata: [1,2,3,4,5,6]
xd =
   1   2   3   4   5   6
>> yd=[16 18 21 17 15 12]  % ydata
yd =
   16   18   21   17   15   12
>> N=length(xd);          % vektorin pituus
>> c=polyfit(xd,yd,N-1)
   % Interpolaatiopolynomin kertoimet
c =
    -0.24167     4.33333   -28.95833
     87.66667   -115.80000    69.00000
>> x=.75:.05:6.25;  % Pisteet,joissa polynomin
                    % arvot lasketaan.
```

[1] Sileydellä tarkoitamme ao. sovelluksen kannalta riittävän monen derivaatan olemassaoloa.

```
>> p=polyval(c,x);  % Polynomin arvot
                    % x-pisteissä (HUOM (;))
>> plot(xd,yd,'o',x,p); grid on
>> legend('Data','Interpolaatiopolynomi')
>> title('Interpolointiesimerkki')
```



Polynomi esitetään MATLAB:ssa kertoimien vektorina alkaen korkeimman asteen kertoimesta. Siten polynomimme on (desimaaleja karsien):

$$p(x) = -0.24x^5 + 4.33x^4 - 28.95x^3 + 87.66x^2 - 115.8x + 69$$

Huomaa, että komennossa `>> c=polyfit(xd,yd,N-1)` `N-1` on yhtä pienempi kuin datapisteiden lukumäärä, jolloin kyse on interpolaatiosta. (Kahden pisteen kautta suora, 3:n pisteen kautta paraabeli jne.)

Näemme, että tehtävä on kuvan tarkkuudella oikein ratkaistu, koska polynomimme (funktiomallimme) kulkee kaikkien datapisteiden kautta. Jos olisimme mallintamassa tähän dataan liittyvää ilmiötä, niin voisimme kuvasta nähdä joitakin ongelmakohtia.

Tarkkaavainen lukija saattaa ihmetellä, miksei `polyfit`-koodiin ole upotettu interpolaatiotehtävän kannalta turhaa parametriä `N-1` sisäisellä komennolla `N = length(xdata);` No, koska `polyfit` älyää suorittaa ns. pienimmän neliösumman polynomisovituksen, jos valitaan pienempiä `N`:n arvoja. Tämähän jo huomattiim alussa "mörkö"-esimerkissä.

Interpolaatiopolynomin muodostaminen

Edellä laskettiin polynomin kertoimet ja arvot "mustilla laatikoilla" `polyfit, polyval` . Käsittelen nyt erilaisia tapoja näiden laskentaan.

Lineaarinen yhtälöryhmä

Lähdetään liikkeelle taulukon 1 yleisestä datasta, jossa oletetaan vain, että x_k-pisteet ovat erillisiä. Etsitään polynomia:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Otetaan tässä yleisemmin kirjallisuudessa esiintyvä muoto kertoimien järjestyksen suhteen. Vaatimus:

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n.$$

Toisin sanoen:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Ratkaistavana on siten $n+1$ yhtälöä ja $n+1$ tuntematonta (kertoimet $a_0, a_1, \ldots, a_n$) käsittävä lineaarinen yhtälöryhmä:

Matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Jos matriisilaskenta ei ole tuttua, niin ylempi muoto näyttää, mitä matriisi kertaa pystyvektori tarkoittaa. Samoin kuin polynomin kerroinvektori määrää polynomin, määräävät matriisi ja oikean puolen y-vektori yhtälösysteemin.

Ratkaistaan nyt edellä käsitelty esimerkki. Tehtävä palautuu siis lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuun, johon MATLAB:ssa on suora komento: `a=V\y`, missä `V`:llä merkitään yllä olevaa matriisia. Tätä muotoa olevaa kutsutaan *Vandermonden* matriisiksi, jonka määrää x-datavektori: $x = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Yhtälöryhmän ratkaisukomennossa `a=V\y` voidaan ajatella, että takakeno (\) tarkoittaa jakoviivaa, nimittäjässä on matriisi `V`, ja siten vektori `y` "jaetaan matriisilla" `V`. Kootaan komennot skriptitiedostoon *vanderinterp.m* käyttäen OCTAVE:n editoria: (Ja älä sitten "copypasteta" `(')`-merkkiä, ettet hermostu.)

```
xd=(1:6)';  % xdata pystyvektorina
yd=[16;18;21;17;15;12];
              % ydata pystyvektorina
N=length(xd); % datapisteiden lukumäärä
ykkoset=ones(N,1); %Sama kuin [1 1 1 1 1 1]'
V=[ykkoset xd xd.^2 xd.^3 xd.^4 xd.^5];
a=V\yd; %Yhtälöryhman ratkaisu
```

Muista: `xd.^k` tarkoittaa vektorin `xd` jokaisen komponentin korottamista potensiin k, eli "pisteittäistä" potenssia.

Voit leikata/liimata komennot suoraan komentoikkunaan. Suositeltavampaa on sijoittaa ne tiedostoon *vanderinterp.m* ja ajaa `run`-painikkeella tai kirjoittamalla komentoikkunaan `vanderinterp` . Tällöin voit esim. editoida rivien loppujen puolipisteitä pois, jolloin näet välituloksia, joita emme näytä.

```
>> vanderinterp
a =
    69.00000
  -115.80000
    87.66667
   -28.95833
     4.33333
    -0.24167
```

Saadaan samat kuin edellä, mutta käännetyssä järjestyksessä, koska käsiteltiin polynomia kasvavien potenssien järjestyksessä. Kun haluamme laskea polynomin arvoja, käännetään se komennolla `flipud` (ud viittaa suuntaan "updown", vaakavektorin tapauksessa `fliplr`, "leftright"). Nyt voidaan laskea arvoja vaikkapa edellisen esimerkin vektorilla ja piirtää. Tässä komennot:

```
>> x=0.75:.05:6.25;
>> c=flipud(a); % Käännetty järjestys.
>> p=polyval(c,x);
>> clf  % Grafiikkaruudun tyhjennys.
>> p=polyval(c,x);plot(x,p);grid on
```

Huomaa, että monet komennot, kuten tässä `polyval, plot` toimivat yhtä hyvin vaaka- kuin pystyvektoreilla. Matriisialgebrassa näin ei luonnollisista syistä ole.

Kysymys: Onko yhtälöryhmällä aina yksikäsitteinen ratkaisu? Jotkut lukijat saattavat tietää, että näin on, jos matriisin V determinantti $\neq 0$. Voidaan osoittaa, että Vandermonden matriisin determinantti on xdata-vektorin erotusten tulo, ja siis $\neq 0$, kun xdatapisteet ovat erilliset. Mutta verrattomasti helpommalla päästään puhtaasti polynomien perusominaisuuden avulla:

Jos kaksi korkeintaan astetta n olevaa polynomia yhtyy (n+1):ssä pisteessä, ne yhtyvät kaikkialla, eli ovat identtiset.

Tämä perustuu siihen yksinkertaiseen havaintoon, että jos polynomilla p on nollakohta x_0, niin $p(x)$ on jaollinen $(x - x_0)$:lla. Kts: [s04] Lause 1 ja Seuraus 1.

Pyydetään avuksi herroja *Lagrange* ja *Newton*

Edellä esitty Vandermonden matriisiin perustuva menetelmä on samalla hyvä lähtökohta pienimmän neliösumman approksimaatiolle. Huonoa siinä on etenkin interpolaation kannalta matriisin "häiriöalttius", kun sen koko kasvaa. Numeerisen lineaarialgebran kannalta determinantin merkitys on vähäinen, tärkeää on "melkein singulaarisuus", josta determinantin "melkein nolla" ei kerro. Häiriöalttiutta arvioidaan erilaisella keinolla, jota ei tässä voida pitemmälle kehitellä. MATLAB:ssa on funktiot `cond` ja `rcond` tähän tarkoitukseen.

Molempien menetelmien ydin on polynomien nokkelassa esitysmuodossa. Samalla, kun herrat konstruoivat ratkaisun, he saavat ratkaisun yleisen olemassaolotodistuksen tarvitsematta mitään muuta kuin edellä mainittua polynomien perusominaisuutta. Siis olemassaolotodistus ja ratkaisun laskennan kannalta tehokas ja vähemmän virhealtis konstruktio samassa paketissa.

Lagrangen menetelmä

Kirjoitin tämän auki jutussa [s04] hyvin konkreettisesti ja seikkaperäisesti. Mennään tässä siksi suoraan yleiseen tapaukseen lyhyesti ja ytimekkäästi:

Lähdetään hakemaan eräässä mielessä ortogonaalista polynomijoukkoa ("kantaa") $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$. Asetetaan kaksi vaatimusta:

1. Polynomit $L_k(x)$ ovat astetta n.
2. Ne toteuttavat "ortogonaalisuusehdon": $L_i(x_j) = \delta_{i,j} = 1$, kun $i = j$ ja $= 0$, kun $i \neq j$.

Jos tällaiset polynomit löydetään, voidaan ratkaisupolynomi p kirjoittaa suoraan:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x).$$

Miten nämä kantapolynomit löydetään?
Tarvitaan astetta n oleva polynomi $L_k(x)$, joka saa arvon 0 kaikissa pisteissä $x_j, j \neq k$.

$$L_k(x) = c(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})\ldots(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)$$

Tässä on yksi vapaasti valittava kerroin c, joka määrätään normeerausehdosta: $L_k(x_k) = 1$, Siis, jos merkitään
$l_k(x) = (x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})\ldots(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)$,
niin

$c = \frac{1}{l_k(x_k)}$ ja siis:

$$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Sanallisesti: Osoittajassa on termit $(x - x_j), j \neq k$ ja nimittäjässä $(x_k - x_j), j \neq k$. (Nimittäjästä puuttuu termi, joka tekisi sen nollaksi.)

Interpolaatioehto toteutuu:

$$p(x_k) = \underbrace{y_0 L_0(x_k)}_{=0} + \ldots + \underbrace{y_k L_k(x_k)}_{=y_k} +$$
$$+ \underbrace{y_{k+1} L_{k+1}(x_k)}_{=0} + \ldots + \underbrace{y_n L_n(x_k)}_{=0} = y_k$$

(Jos $k = 0$, saadaan $1 + 0 + \ldots + 0$.)
Huom: Lagrangen polynomit riippuvat pelkästään x-datasta.

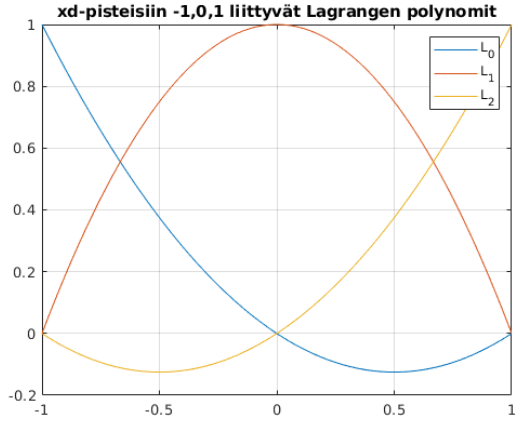
Kirjoitetaan Matlab-koodiksi (Octave:lla)

Ideoidaan ensin pienellä "manuaalisella" esimerkillä:

```
% Tiedosto Lag2.m
%% Lagrangen 2. asteen polynomit
% Muodostetaan "manuaalisesti" xd-dataan
% liittyvät Lagrangen (2. asteen) polynomit
% Huom! Vektorin indeksit alkavat 1:stä..
xd=[-1 0 1];
x=linspace(-1,1,100); Laskentapisteet, 100 kpl.
L0=(x-xd(2)).*(x-xd(3))./((xd(1)-xd(2))*...
 (xd(1)-xd(3)));
L1=(x-xd(1)).*(x-xd(3))./((xd(2)-xd(1))*...
(xd(2)-xd(3)));
L2=(x-xd(1)).*(x-xd(2))./((xd(3)-xd(1))*...
(xd(3)-xd(2)));
plot(x,L0,x,L1,x,L2); grid on
legend('L_0','L_1','L_2')
title('xd-pisteisiin liittyvät L-polynomit')
```

Huomaa, että `(x-xd(2)).*(x-xd(3))` on 100:n pituisten vektorien vastinalkioittainen tulo, samoin muut vastaavat. Nimittäjässä kerrotaan skalaareja, joten piste (.) ei ole tarpeen, mutta ei haittaisikaan.

Jos "copypastetat" tämän koodin Octave-komentoikkunaan (tai editoit sen tiedostoksi, vaikka `Lag2.m` ja kirjoitat komentoikkunaan `Lag2`), saat palkinnoksi alla olevan, Lagrangen polynomien ominaisuuksia erinomaisesti havainnollistavan kuvan, saman joka on jo [s04]-kirjoituksessa.



Kuva 2.

Tältä pohjalta on helppo rakentaa funktio, joka suorittaa Lagrangen interpolaation:

```
function y=LagrangeInterp(xd,yd,x)
N=length(xd);
y=zeros(size(x));% Summavektorin alustus: 0
for i=1:N
  y=y+yd(i)*L(i,xd,x); % skal. kertaa vektori
end
% L_k-funktio alifunktiona:
function  y  = L(k,xdata,x)
% xdata-vektoriin liittyvä Lagrangen
% kantafunktio L_k laskettuna vektorilla x.
n=length(xdata);
y=ones(size(x));% Tulovektorin alustus: 1
for j=[1:k-1 k+1:n]
    y=y.*((x-xdata(j))./(xdata(k)-xdata(j)));
end
```

Huom1: Kuten Matlab-ohjelmoinnissa hyviin tapoihin kuuluu, laskentapisteitä "pitää sallia" ainakin kokonaisen vektorin verran. Tämä hoidetaan "Pisteittäisillä" laskutoimituksilla `(.*)` ja (./)
Huom2: Kutsu `L(1,...)` johtaa indeksivektoriin: `for j=[1:0 2:n]`, joka on $[2, \ldots, n]$, kuten pitää, koska `1:0` on tyhjä vektori. Tässä Matlab, kokeile, mitä sanoo Octave.

```
>> 1:0
ans = 1×0 empty double row vector
```

Leikitäänpä vähän LagrangeInterp-työkalulla

Jotta voisit käyttää kirjoittamaamme funktiota, täytyy koodi kirjoittaa/liimata tekstitiedostoon `LagrangeInterp.m`, joka sijaitsee työhakemistossa tai matlabpolun (`matlabpath`) varrella. Funktiota kutsutaan aivan samoin kuin mitä tahansa Matlab:n sisäänrakennettua funktiota, siis komentoikkunassa kirjoitetaan esim `y=LagrangeInterp(xd,yd,x)`, kun muuttujille `xd,yd,x` on annettu ao. arvot. (Voit käyttää Octave:n omaa editoria tai mitä tahansa tekstieditoria.)

Kun halutaan muutella parametrejä ja tehdä erilaisia testiajoja, on suositeltavaa kirjoittaa tarvittavat parametrien muodostamiskomennot ja funktiokutsut skriptitiedostoon, vaikka `ajo.m` ja suorittaa komennolla `>>ajo` .
Näillä komennoilla suoritettaisiin nyt edellä `vanderinterp`-tyylillä käsitelty esimerkki. (Leikkaa/-liimaa suoraan komentoikkunaan, tai editoi ajotiedostoon ja sano `>>ajo` !)

```
xd=1:6
yd=[16 18 21 17 15 12]
x=.75:.05:6.25;
p=LagrangeInterp(xd,yd,x);
plot(xd,yd,'o',x,p,'MarkerSize',10)
grid on
```

Kannattaa huomata, että `Lagrangeinterp`-funktiomme toimii myös symbolisella argumentilla x, jos käytössä on MATLAB, jossa on "symbolic toolbox." Palataan tähän loppupuolella.

Newtonin menetelmä

Ajatellaanpa, että olemme onnistuneet tavalla tai toisella muodostamaan interpolaatiopolynomin sanokaamme datalle

x_0	x_1	x_2
y_0	y_1	y_2

Halutkaamme lisätä datapiste (x_3, y_3), ja laajentaa polynomimme tälle uudelle datapisteistölle. Edellä esitellyillä menetelmillä ei auttaisi muu kuin laskea koko homma alusta uudelleen. Mutta, entäpä jos vähän mietitään. Olkoon tuo edellä saatu polynomi $p_2(x)$. —

HEUREKA! Lisätään polynomiimme sellainen polynomi $q(x)$, joka saa arvon 0 kaikissa vanhoissa pisteissä x_0, x_1, x_2, ja on asteeltaan yhtä korkeampi. Mutta sellainenhan on:
$q(x) = c(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ Tämän polynomin lisääminen ei tuhoa interpolaatioehtoja vanhoissa pisteissä, ja siinä on yksi määrättävä vakio c, jonka avulla säädetään uusi ehto voimaan. Siispä
$y_3 = p_3(x_3) = p_2(x_3) + c\,q(x_3)$, joten

$$c = \frac{y_3 - p_2(x_3)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Aika läheistä sukua Lagrangen idealle, eikö vain?

Newtonin muoto interpolaatiopolynomille voidaan kehittää aloittamalla astetta 0 olevasta polynomista
$p_0 \equiv y_0$, sitten $p_1(x) = y0 + c_1(x - x_0)$,
$p_2(x) = p_1(x) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$, jne. Vakioiden c_k määräämiseksi saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} y_0 = c_0 \\ y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\ y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ \dots\dots \end{cases}$$

Taaskaan ei tarvita yhtälöryhmän yleistä ratkaisua, vaan voidaan edetä ylhäältä alas ratkaisemalla kullakin rivillä yksi ensimmäisen asteen yhtälö.

Näin päädytään yleiseen muotoon:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Tämä on **Newtonin interpolaatiopolynomi** ja sen konstruktiotapa on samalla aiemmista riippumaton todistus tehtävän yksikäsitteiselle ratkaisulle. Yksikäsitteisyys seuraa kunkin kertoimen yksikäsitteisestä ratkaisusta. Kaikki ratkaisutavat tuottavat siis saman polynomifunktion, mutta erilaisen, toisiinsa sievennettävissä olevan esitysmuodon.

Kirjoitetaan vielä lyheymmässä muodossa tulo- ja summasymbolien avulla:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i} (x - x_j).$$

Pikkutehtävä: Olkoot pisteet $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$, $y_0 = 2$, $y_1 = 3$, $y_2 = 6$.
Yhtälöryhmästä peräkkäisillä sijoituksilla ratkaisemalla saadaan: $c_0 = 2, c_1 = c_2 = 1$,
joten $p(x) = 2 + (x - 1) + (x - 1)(x - 2)$, ja auki kerrottuna: $x^2 - 2x + 3$.

Vähän kookkaamman polynomin auki kertominen on viheliäistä puuhaa. Kannattaa käyttää ympärillä tarjoutuvia symbolilaskentamahdollisuuksia, kuten tässä *Maxima*-ohjelmaa.

```
(%i1) expand(2+(x-1)+(x-1)*(x-2));
                          2
(%o1)                    x  - 2 x + 3
```

Kertoimet voidaan siis esimerkin tavoin laskea tuosta alakolmioyhtälöryhmästä. Niille voidaan johtaa rekursiokaava ns. "jaettujen erotusten" avulla, jolloin saadaan helposti muistettava menetelmä käsinlaskuun, ja suorastaan riemastuttavan helposti kirjoitettava MATLAB-ohjelma. Lisäkehittelyn jälkeen saadaan "tuotantokäyttöön" tehokas *Neville'n* algoritmi, mutta siihen ei nyt mennä.

Jaetut erotukset

Merkitään $y_k = f(x_k), k = 1, \dots, n$, missä f tarkoittaa (x_k, y_k)-datapisteiden määräämää funktiota (ei siis annettua reaalifunktiota, jonka arvoina y_k−luvut on laskettu). Merkitään $f[x_k] = f(x_k)$ ja tarkoittakoon $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ dataan $((x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k))$ liittyvän interpolaatiopolynomin korkeimman asteen kerrointa. Merkintä viittaa siihen, että tämä riippuu vain näistä pisteistä $(0, \dots, k)$.

Lause Jaetut erotukset toteuttavat rekursiokaavan:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Todistus Jätän todistuksen viitteen [GC] s.188 *Theorem 8.3.1* varaan sekä ajan että tilan puutteen vuoksi. Todistus on yllättävän helppo ja elegantti yllä olevan määritelmän ansioista ja Newtonin aste kerrallaan nousevasta esityksestä johtuen.

□

Jaettujen erotusten taulukko:

$$\begin{array}{llll} f[x_0] & & & \\ f[x_1] & f[x_0,x_1] & & \\ f[x_2] & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & \\ f[x_3] & f[x_2,x_3] & f[x_1,x_2,x_3] & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \end{array}$$

Taulukon 1. lävistäjä:
$(f[x_0], f[x_0,x_1], f[x_0,x_1,x_2], f[x_0,x_1,x_2,x_3])$
antaa Newtonin polynomin kertoimet (simsalabim!).

Pikkutehtävä uudestaan (laskut sarakesuunnassa):

x_j	y_j		
1	2		
2	3	$\frac{3-2}{2-1}=1$	
3	6	$\frac{6-3}{3-2}=3$	$\frac{3-1}{3-1}=1$

Saatiin siis samat kertoimet: $2, 1, 1$. Matematiikassa on magiaa!

Ja nyt kaikki osaavat rakentaa Newtonin polynomin vaikka unissaan!

Palataan shakkilautatehtävään

Koska x-data on tasavälinen, jopa niin, että askel $= 1$, ovat jakajana olevat erotukset $= 1, 2, 3, \ldots$, siis alussa esitettyyn erotuskaavioon tarvitsee vain lisätä koodissa näkyvät kertoimet $1/2, 1/3, 1/4, 1/5$.

```
xdata=0:7; % Tasavälinen askel=1
ydata=[0, 6, 28, 96, 252 550 1056 1848]';
ydiff1=[NaN;diff(ydata)];
ydiff2=[NaN;1/2*diff(ydiff1)];
ydiff3=[NaN;1/3*diff(ydiff2)];
ydiff4=[NaN;1/4*diff(ydiff3)];
ydiff5=[NaN;1/5*diff(ydiff4)];
erotustaulukko=[ydata ydiff1 ydiff2...
  ydiff3 ydiff4 ydiff5]
```

Tämä skripti tuottaa tulostuksen:

```
  erotustaulukko =
   1.0e+03 *
       0       NaN       NaN       NaN       NaN
  0.0060    0.0060       NaN       NaN       NaN
  0.0280    0.0220    0.0080       NaN       NaN
  0.0960    0.0680    0.0230    0.0050       NaN
  0.2520    0.1560    0.0440    0.0070    0.0005
  0.5500    0.2980    0.0710    0.0090    0.0005
  1.0560    0.5060    0.1040    0.0110    0.0005
  1.8480    0.7920    0.1430    0.0130    0.0005
```

Jätetään tilan puutteen takia viimeinen sarake näyttämättä, vakiosarakkeesta seuraava koostuu numeerisilta osiltaan tietysti kolmesta 0:sta.
Kuten *Newtonin* ja *Lagrangen* muodoista näkyy, ja *Vandermonde*-ratkaisustakin (Gaussin eliminaatio) selviää, kokonaislukudata johtaa aina rationaalikertoimiin. Komennetaan siksi `format rat`

```
format rat
c=diag(erotustaulukko);
c=c(1:end-1)' % Jätetään viimeinen 0 pois
syms x        % Tämä vain Matlab:ssa
p=c(1)+c(2)*x+c(3)*x*(x-1)+...
 c(4)*x*(x-1)*(x-2)+c(5)*x*(x-1)*(x-2)*(x-3)
p=expand(p)
a=sym2poly(pe)  % Symbolinen muoto ...
                % kerroinvektoriksi
arvotxdatalla=polyval(a,xdata)% Tarkistus:
         % Lasketaan polynomi datapisteissä.
```

Viemällä nämä suoraan komentoikkunaan tai editoriin, josta skripti ajetaan, saadaan:

```
c =
    0     6     8     5     1/2
p =
    x^4/2 + 2*x^3 - (3*x^2)/2 + 5*x
a =
    1/2     2     -3/2      5      0
     arvotxdatalla =
      0     6     28     96     252 ...
       550          1056          1848
```

Kappas vaan, oikein meni!

Jos/kun operoit OCTAVE:lla, voit suoraan "leikkausliimata" OCTAVE:sta MAXIMA:aan. (Sijoitusmerkki (:), pakollinen loppumerkki (;)

```
(%i1) p:6*x+ 8*x*(x-1)+ 5*x*(x-1)*(x-2)...
 + (x*(x - 1)*(x - 2)*(x - 3))/2;
(%i2) expand(p);
                    4             2
                   x       3   3 x
(%o2)              -- + 2 x  - ---- + 5 x
                   2            2
```

Toki voit sijoittaa lausekkeen myös Wofram Alphaan, joka tekee sievennyksiä, grafiikkaa ym. ihan pyytämättäkin.

Miten jono jatkuu?

Saatiin siis polynomimalli $p(x) = \frac{x^4}{2} + 2x^3 - \frac{3x^2}{2} + 5x$, joka selittää 3 ylimääräistä data-arvoa: `[550 1056 1848]` x-arvoilla :`[5 6 7]`. Lasketaan lisäarvoja:

```
>> lisapisteita=8:12;
>> lisarvoja=polyval(a,lisapisteita);
>> [lisapisteita;lisarvoja]
ans =
   8     9     10      11      12
3016   4662   6900    9856   13668
```

Pitääkö tämä yksinkertainen laskukaava yleisesti paikkansa? Jään odottamaan vastausta syvemmin kombinatoriikan menetelmiin perehtyneeltä matemaatikolta. Erityisen kiusallista on, että annettu data loppuu juuri oikean shakkilaudan kynnyksellä, joten jäämme tälle kynnykselle toivorikkaina luku 3016 taskussamme.

Symbolista summausta

Kaikkihan muistamme tarinan *Gaussista* ja laskutehtävästä: $s_n = \sum_{k=1}^{n} k$, $(n = 100)$ joka johti kaavaan $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ja yleistyi heti aritmeettiselle summalle. Myös geometrisen jonon summakaava saadaan kätevästi ilman taulukkokirjaa tai symboliohjelmaa:

$$\begin{cases} s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \\ q\,s_n = q + q^2 + \ldots + q^{n+1} \end{cases}$$

Vähentämällä ja ratkaisemalla saadaan:$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Muille jonoille ei sitten olekaan näin yksinkertaisia summakaavoja ja varsinkaan kaavojen johtoja saatavilla. Kyse on siis lausekkesta summalle

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

kun kerroinjono (a_k) on annettu. Tämä voidaan mieltää diskreettinä versiona annetun funktion integraalifunktion määräämistehtävästä. Symbolilaskentaohjelmat ovat varsin kehittyneitä tällä alueella. Toki yleisesti toimivaa algoritmia ei ole, kun ei "suljetun muodon" ratkaisuakaan aina ole.

Edellisten lausekkeiden tapaan voisimme yrittää löytää polynomi- tai rationaalifunktiokaavaa. Strategia voisi olla sellainen, että ensin kokeillaan, löytyisikö suhteellisen matalaa astetta oleva interpolaatiopolynomi, jonka asteluku ei kasva, kun jonon lukuja (dataa) lisätään. Näin saadaan hypoteesi, joka todistetaan induktiolla oikeaksi, jos pystytään. Jos polynomin asteluku on suurempi kuin esim. 3, joudutaan induktioaskeleessa varsin pitkiin sievennyksiin. Tässä kohden parhaat symbliohjelmat ovat luotettavampia kuin ihminen, ja tällä tietokoneavustuksella laadittu todistus on ilman muuta hyväksyttävä (eikö vain). Siis ihminen tietää, mihin sievennyksellä pyritään, ohjelma tekee, mitä käsketään, nopeasti ja luotettavasti.

Esimerkki:
$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$, missä p on kokonaisluku.

Tarkastellaan tapausta $p = 5$.

```
ind=(1:10)'; % Pystyvektori transponoimalla(')
jono=(ind.^5);
S=cumsum(jono); % Kumulatiiviset summat
indeksit_jono_ja_osasummat=[ind jono S]
```

Tulostus, muista: loppupuolipiste estää.

```
indeksit_jono_ja_osasummat =
       1              1              1
       2             32             33
       3            243            276
       4           1024           1300
       5           3125           4425
       6           7776          12201
       7          16807          29008
       8          32768          61776
       9          59049         120825
      10         100000         220825
```

Osasummien jaetut erotukset:

```
format rat  % Pelkkiä rationaalisia laskuja
ydiff1=[NaN;diff(S)]; % Sama kuin alkup. jono
ydiff2=[NaN;1/2*diff(ydiff1)];
ydiff3=[NaN;1/3*diff(ydiff2)];
ydiff4=[NaN;1/4*diff(ydiff3)];
ydiff5=[NaN;1/5*diff(ydiff4)];
ydiff6=[NaN;1/6*diff(ydiff5)];
erotustaulukko=[S ydiff1 ydiff2 ydiff3 ydiff4...
 ydiff5 ydiff6];
c=(diag(erotustaulukko))'%  Newtonin polynomin
                         %  kertoimet
```

Tulostus:

```
c =
     1     32      211/2      95
    125/4            4              1/6
```

Siirrytään symbolinkäsitelyyn. Teen sen nyt MATLAB:n symbolic toolboxilla, mutta tein vastaavat operaatiot myös MAXIMA:lla ja MAPLE:llä ihan leikkaus/liimauksella ko. ohjelmiin.

```
syms n
>> p=c(1)+c(2)*(n-1)+c(3)*(n-1)*(n-2)+...+
         ...                % Piilotetaan osa
    c(7)*(n-1)*(n-2)*(n-3)*(n-4)*(n-5)*(n-6);
>> p_n=simplify(p)
```

```
  p_n =
   (n^2*(n + 1)^2*(2*n^2 + 2*n - 1))/12

>> p_nplus1=subs(p,n,n+1)
% Sijoitetaan p_n:n lausekkeessa
% n:n paikalle n+1
p_nplus1 =
((n+1)^2*(n+2)^2*(2*n + 2*(n + 1)^2 + 1))/12
% Induktioaskel:
>> erotus=p_nplus1-p_n
erotus =
((n+1)^2*(n+2)^2*(2*n + 2*(n+1)^2 + 1))/12-..
  (n^2*(n + 1)^2*(2*n^2 + 2*n - 1))/12

>> simplify(erotus)
ans =
(n + 1)^5  % Mutta niinhän sen piti olla!
>> display('MOT')
MOT
```

Kaava on todettu jo useallakin n:n arvolla, ja nyt saatiin osoitetuksi yleinen askel, joten polynomikaava on voimassa kaikilla n.

Huomautuksia:
1. Vähemmällä kaavan kirjoittamisella oltaisiin päästy valmiiksi ohjelmoimallamme `Lagrangeinterp`-funktiolla. Tämä sisältyy esimerkkiskriptiin *SymsymEsim.m*, mutta soveltuu myös harjoitustehtäväksi, mikäli MATLAB ja symbolic toolbox ovat käytössä.

2. Kaikkein helpointa luulisi olevan sisäänrakennettujen MATLAB-funktioiden `polyfit,polyval` käyttö interpolointiin. Mutta ne laskevat liukuluvuilla, ja viimeisissä desimaaleissa esiintyvät pyöristysvirheet estävät muuntamisen oikeiksi rationaaliluvuiksi. Oma Lagrangeinterp-funktio toimii myös symboliselle argumentille, samoin Newtonskriptit, joista ajanpuutteen takia jäi kehittämättä valmis funktio. Molemmathan suorittavat pelkkiä rationaalilaskuja. Symboliohjelmat, kuten MAPLE (ja varmaankin myös MAXIMA) sisältävät valmiit funktiot, jotka oletusarvoisesti laskevat rationaaleilla.

3. Symboliohjelmissa on hyvä välineet symbolisten summien laskentaan, niinpä tässäkin saadaan MATLAB-toolboxilla:

```
>> syms k n;symsum(k^5,[1,n])
ans =
(n^2*(n + 1)^2*(2*n^2 + 2*n - 1))/12
```

Tehtäviä:

1. Määritä tapauksen $p = 5$ käsittelyn tyylillä lauseke summalle $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$ joillakin muilla p:n arvoilla. Kokeile ehkä ensin jotain arvoa $p < 5$, ja jos haluat lisää haastetta (ja mutkikkaampaa lauseketta), niin siitä vaan! Voit tehdä interpolaatio-osan joko `Lagarangeinterp`- funktiolla tai Newton-skriptiä modifioimalla. Induktiotodistus esim. Maximalla, tai mihin nyt pääset.

2. Selvitä muita osasummia esim. jonolle:
   $a_k = (k-1)k(k+1), k = 1, 2, 3, \ldots$

   Vastaus:`>>S=symsum((k-1)*k*(k+1),k,[1 n]);`
   expand(S) antaa:`n^4/4 + n^3/2 - n^2/4 - n/2`

3. Olkoon `xd=[0:20:100]` ja
   `yd=[76.0 105.7 131.7 179.3 226.5 281.4]`
   `xd`-arvot edustavat vuosilukuja vuoden 1900 jälkeen ja `yd`:t USA:n väestölaskentadataa miljoonan asukkaan yksiköissä.
   (a) Muodosta (käsin) *Lagrangen* menetelmän mukainen muoto 2. asteen polynomille, joka interpoloi vuosilukuihin $1900, 1920, 1940$ liittyvää väestödataa.
   (b) Muodosta *Newtonin menetelmällä* asteita $0, 1$ ja 2 olevat interpolaatiopolynomit samoille 3:lle ensimmäiselle datapisteelle, ja näytä, että saat saman 2. asteen polynomin kuin (a)-kohdassa.
   (c) Piirrä datapisteet. Sovita dataan interpolaatiopolynomi, Käytä `LagrangeInterp`-funktiotamme. Voit myös kokeilla `polyfit`-menetelmää. Tässä *Lagrengen* muoto on paremmin dataan nähden skaalattu, MATLAB:n `polyfit` varoittaa, mutta laskee kuitenkin. Piirrä polynomi samaan kuvaan. Mikä on "ennuste" vuosille $2020, 2030$?
   Voit kokeilla `polyfit`:lla alemman asteisia PNS-polynomeja realistisemman kasvuennusteen saamiseksi.

Viitteet:

[CM] https://se.mathworks.com/moler.html, MATLAB-ohjelman kehittäjän, *Cleve Molerin* kaksi erinomaista, vapaasti luettavaa verkkokirjaa: "Experiments" ja "Numerical computing" with Matlab. Erityisesti "Experiments" sisältää paljon koulumatematiikkataustaan sopivaa materiaalia.

[GC] Anne Greenbaum – Timothy P. Chartier: Numerical Methods. Design, Analysis and Computer Implementation of Algorithms, Princeton U.P. 2012

[s04] https://matematiikkalehtisolmu.fi/2004/3/apiola.pdf

[Skr] https://matematiikkalehtisolmu.fi/2019/2/skriptit/ Kirjoitukseen liittyvät skriptit ja funktiotiedostot