Solmuhedelmiä interpolaatioon

Heikki Apiola, 3.2.2019

Motiivi

Antti Laaksosen tekstissä identiteettien löytäminen sellaisille summille kuin vaikkapa 1^5+2^5+...+n^5 tai 1*2*3+2*3*4+...+n*(n+1)*(n+2) voisivat olla matalalla roikkuvia hedelmiä noin esimerkkien kannalta.

Matlabilla nautiskellaan differenssejä laskien, ja todetaan, että osasummien jonolle ekan jonon tapauksessa 7. differenssit = 0, joten osasummien jono (siihen saakka, kuin dataa on laskettu) voidaan generoida astetta 6 olevalla polynomilla.

Laskettiin interpolaatiololynomi Matlabin polyfit-funktiolla, ja saatiin hyvä yhteensopivuus. (Virheen maksimi n. 10^(-9)), kun dataa 20 arvoa.

Mutta generoiva polynomi liukulukukertoimin ei näytä ihan houkuttelevalta. Lisäksi nähdään heti Lagrangen tai Newtonin esitysmuodoista, että kokonaislukudata johtaa rationaalilukukertoimiin, joten saatavissa on ihan tarkka rationaalikertoiminen polynomi, joka saadaan käyttämällä rationaaliaritmetiikkaa. Matlab:n numeeriset rutiinit käyttävät "kaksoistarkkuuden" liukulukuja, joten tarkkoihin (ja sieviin) kertoimiin pääsemiseksi tarvitaan symbolilaskentaohjelmaa, tässä Maplea.

Data ja osasummat

$n := 20 :$

$v := seq(k^5, k = 1..n)$

$$v := 1, 32, 243, 1024, 3125, 7776, 16807, 32768, 59049, 100000, 161051, 248832, 371293, 537824, 759375, 1048576, 1419857, 1889568, 2476099, 3200000 \quad (1)$$

Kumulatiiviset summat (osasummat):

$S := [seq(sum(v[j], j = 1..k), k = 1..n)]$

$$S := [1, 33, 276, 1300, 4425, 12201, 29008, 61776, 120825, 220825, 381876, 630708, 1002001, 1539825, 2299200, 3347776, 4767633, 6657201, 9133300, 12333300] \quad (2)$$

Matlabilla laskettiin:

```
>> n=20;
>> v= (1:n).^5 ;   % Vektori [1 2 ... n] korotetaan alkioittain potensiin 5.
>> S=cumsum(v)    % Kumulatiiviset summat, eli osasummien jono.
```

Saatiin sama S kuin yllä.

```
>> diff(diff(diff(diff(diff(diff(S))))))
120   120   120   120   120   120   120   120   120  120  120 120 120 120
```

Tämä kertoo, että seuraava diff antaa 0-vektorin, ja siis astetta 6 oleva interpolaatiopolynomi interpoloi samantien koko dataa. Interpolaatiopolynomin kertoimet saadaan Matlabin polyfit-funktiolla:

```
>> c6=polyfit(1:7,S(1:7),6)
0.166666666666657   0.500000000000220   0.416666666664795 0.000000000007102
```

-0.083333333343973   0.000000000001007 0.000000000006659

```
>> y=polyval(c6,1:n);
>> max(abs(y-S))
1.6019e-07
```

Siis virhe on pieni, mutta ei aivan olematon.

Maple laskee tarkalla rationaaliaritmetiikalla (ellei käsketä toisin)

Siispä takaisin Mapleen:

$x := [seq(j, j = 1..n)]$

$$x := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] \quad (3)$$

$with(CurveFitting):$

$y := PolynomialInterpolation(x, S, t)$

$$y := \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{2}t^5 + \frac{5}{12}t^4 - \frac{1}{12}t^2 \quad (4)$$

$yf := unapply(y, t)$ *# Määritellään y t:n funktioksi.*

$$yf := t \mapsto \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{2}t^5 + \frac{5}{12}t^4 - \frac{1}{12}t^2 \quad (5)$$

$map(yf, x)$

$$[1, 33, 276, 1300, 4425, 12201, 29008, 61776, 120825, 220825, 381876, 630708, 1002001, 1539825, 2299200, 3347776, 4767633, 6657201, 9133300, 12333300] \quad (6)$$

S

$$[1, 33, 276, 1300, 4425, 12201, 29008, 61776, 120825, 220825, 381876, 630708, 1002001, 1539825, 2299200, 3347776, 4767633, 6657201, 9133300, 12333300] \quad (7)$$

Tällä polynomilla saatiin siis oikeat arvot 20:lle osasummalle, ja voidaan jatkaa niin pitkälle kuin halutaan.

Kirjoitetaan vielä M:nnen osasumman kaava:

$s[m] = yf(m)$

$$s_m = \frac{1}{6}m^6 + \frac{1}{2}m^5 + \frac{5}{12}m^4 - \frac{1}{12}m^2 \quad (8)$$

Osaisiko Maplen symbolinen summausfunktio laskea tuon?

$summa := sum(k^5, k = 1..m)$

$$summa := \frac{(m+1)^6}{6} - \frac{(m+1)^5}{2} + \frac{5(m+1)^4}{12} - \frac{(m+1)^2}{12} \quad (9)$$

$simplify(summa)$

$$\frac{1}{6}m^6 + \frac{1}{2}m^5 + \frac{5}{12}m^4 - \frac{1}{12}m^2 \quad (10)$$

Kas, kuinka hienosti! Enpä olis uskonut.