7.1

Kulmanopeuden $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ ratkaiseminen rotaatiohtälöstä (3.161) $\overline{\mathbf{I}}_{\theta\theta}\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{\mathbf{F}}_\theta - \tilde{\overline{\boldsymbol{\omega}}}\,\overline{\mathbf{I}}_{\theta\theta}\,\overline{\boldsymbol{\omega}}$ edellyttää ulkoisen momentin esitystä kappalekoordinaatistossa, joten tarvitaan kappale- ja globaalin koordinaatiston välistä muunnosta $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{\theta} = [0.7 \quad 0.1 \quad -0.7 \quad 0.1]^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{E} = \left[-\overline{\boldsymbol{\theta}} \;\middle|\; \tilde{\overline{\boldsymbol{\theta}}} + \theta_0 \boldsymbol{I}\right] \qquad \overline{\mathbf{E}} = \left[-\overline{\boldsymbol{\theta}} \;\middle|\; -\tilde{\overline{\boldsymbol{\theta}}} + \theta_0 \boldsymbol{I}\right]$$

$$\overline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.7 \\ 0.7 & -0.1 & 0.7 & 0.1 \\ -0.1 & -0.7 & -0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \mathbf{E}\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -0.28 & -0.96 \\ 0 & 0.96 & -0.28 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \frac{(\mathrm{rad})}{\mathrm{s}}$$

$$\overline{\mathbf{F}}_\theta = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0.28 & 0.96 & 0 \\ -0.96 & -0.28 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \mathrm{Nm} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{Nm} \qquad \overline{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^{-1}\left(\overline{\mathbf{F}}_\theta - \tilde{\overline{\boldsymbol{\omega}}}\,\overline{\mathbf{I}}_{\theta\theta}\,\overline{\boldsymbol{\omega}}\right)$$

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -20 & 10 \\ 20 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \right) \frac{(\mathrm{rad})}{\mathrm{s}^2} = \begin{bmatrix} -590 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{(\mathrm{rad})}{\mathrm{s}^2}$$

Shabanan kaava (3.159) esittää kulmakiihtyvyyden Eulerin parametrien ja niiden toisten derivaattojen avulla. Ilmeinen lupaava kandidaatti kaavan (3.159) kääntämiseksi on kertoa vasemmalta matriisilla $\frac{1}{2}\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ (vrt harjoitukset 3.3 & 4.3).

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} = 2\overline{\mathbf{E}}\dot{\boldsymbol{\theta}} \qquad \frac{1}{2}\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\omega}} = \overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{E}}\,\dot{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\right)\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}} = [2.5 \quad -7.5 \quad 2.5 \quad 7.5]^{\mathrm{T}}\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}} = 2\overline{\mathbf{E}}\ddot{\boldsymbol{\theta}} \qquad \frac{1}{2}\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{E}}\,\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\right)\ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

$\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}$ esittää *projektiota $\boldsymbol{\theta}$:n normaalitasoon.* Toisin kuin $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ ei ole kohtisuorassa vektoriin $\boldsymbol{\theta}$ nähden, joten $\boldsymbol{\theta}$:n suuntainen $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$:n komponentti täytyy ratkaista erikseen. Se onnistuu yhtälöstä $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}}) = 2\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + 2\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}} = 0$, mikä tietysti on seurausta $\boldsymbol{\theta}$:n yksikköpituudesta $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta} \equiv 1$.

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\right)\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\theta}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -0.1 & 0.7 & -0.1 \\ 0.7 & -0.1 & -0.7 \\ 0.1 & 0.7 & -0.1 \\ 0.7 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -590 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}^2} - \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.1 \\ -0.7 \\ 0.1 \end{bmatrix} \left(2.5^2 + 7.5^2 + 2.5^2 + 7.5^2\right)\frac{1}{\mathrm{s}^2} = \begin{bmatrix} -58 \\ -219 \\ 58 \\ -219 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

Vaikka tehtävänannon kysymyksiin saatiinkin jo vastaukset, pohditaan vielä tovi rotaatioon liittyvien yleistettyjen voimien laskemista.
Sivun 158 alalaidan kaava $\overline{\mathbf{F}}_\theta = \frac{1}{4}\overline{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{Q}}_\theta = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{Q}}_\theta$ pätee ainoastaan Eulerin parametreille; yleisempi yhteys rotaatioparametreihin liittyvien yleistettyjen voimien ja ulkoisen momentin välille voidaan johtaa seuraavasti:
Rotaatiossa käytetty todellinen fysikaalinen teho on riippumaton siitä, esitetetäänkö se suoraan momentin ja kulmanopeuden avulla, vai jotenkin muuten parametrisoituna.

$$P = \bar{\mathbf{Q}}_\theta^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \overline{\mathbf{F}}_\theta^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\omega}} = \overline{\mathbf{F}}_\theta^{\mathrm{T}}(\overline{\mathbf{G}}\dot{\boldsymbol{\theta}}) = (\overline{\mathbf{F}}_\theta^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{G}})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \left(\overline{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{F}}_\theta\right)^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{Q}}_\theta = \overline{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{F}}_\theta$$

$$\text{Eulerin parametreille} \quad \Rightarrow \quad \left(\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\right)\bar{\mathbf{Q}}_\theta = \overline{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{F}}_\theta = 2\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{F}}_\theta\ ,$$

missä jälkimmäinen tulos on jälleen seurausta siitä, että Eulerin parametreille $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ ei sisällä täyttä määrää riippumattomia komponentteja, vaan $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}} = 0$. Osoittautuu kuitenkin, että myös Eulerin parametreille yleistetty voima voidaan laskea tunnetusta ulkoisesta momentista kaavalla $\bar{\mathbf{Q}}_\theta = \overline{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{F}}_\theta = 2\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{F}}_\theta$, koska puuttuva $\boldsymbol{\theta}$-suuntainen yleistetty voimakomponentti määräytyy joka tapauksessa sidosyhtälön perusteella.

Seuraavassa on vielä esitetty *Matlab*-komennot tehtävän laskujen ratkaisemiseksi sekä joitain tuloksia. Rotaatioyhtälön (3.157) toteutumista on myös tarkasteltu, koska se ilmentää oleellista Eulerin paramereihin liittyvää piirrettä.

```
thet=[0.7 0.1 -0.7 0.1]'; thev=thet(2:4);
E=[-thev,thet(1)*eye(3)+spin(thev)]; Ev=[-thev,thet(1)*eye(3)-spin(thev)];
omv=[0 10 20]'; Ft=[0 0 10]'; Ittv=diag([1 3 6]); A=E*Ev'; Ftv=A'*Ft;
omxIom = spin(omv)*Ittv*omv
alphv  = inv(Ittv)*(Ftv-spin(omv)*Ittv*omv);
dthet  = 0.5*Ev'*omv;
ddthet = 0.5*Ev'*alphv-thet*(dthet'*dthet)

dthev=dthet(2:4); dEv=[-dthev,dthet(1)*eye(3)-spin(dthev)];
Q = 2*Ev'*Ftv
mtt=4*Ev'*Ittv*Ev
righthand=(Q-4*dEv'*Ittv*omv)
lefthandh=(mtt*ddthet)

omxIom =
   600
     0
     0
mtt =
    6.1600    0.5600    6.0800   -1.1200
    0.5600   13.8400    1.1200   -9.9200
    6.0800    1.1200    6.1600   -0.5600
   -1.1200   -9.9200   -0.5600   13.8400

lefthandh =       righthand =
  118.0000              3898
 -826.0000              -286
 -118.0000             -3898
 -826.0000              -286
```

Rotaatioyhtälö (3.157) ei toteudu, kun ratkaistut Eulerin parametrien toinen aikaderivaatta $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$, massamatriisi rotaatio-osuus $\mathbf{m}_{\theta\theta}$, ulkoisesta voimasta aiheutuva yleistetty voima $\bar{\mathbf{Q}}_\theta$ ja neliöllinen nopeusvektori $-2\dot{\overline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}\overline{\boldsymbol{\omega}}$ sijoitetaan. Tämä johtuu siitä, että Eulerin parametreja käytettäessä rotaatioyhtälöihin liittyy erottamattomasti sidosyhtälö $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta} = 1$ ja siitä seuraava rajoitusvoima. Vaikka rajoitusvoima tunnettaisiin, yhtälöä (3.157) ei silti voi sellaisenaan käyttää $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$:n ratkaisemiseen, koska $\mathbf{m}_{\theta\theta}$ on singulaarinen — $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ ratkaisu vaatii sidosyhtälön käyttämistä.

Kun sidosyhtälö otetaan huomioon, päädytään muotoa (3.140) olevaan yhtälösysteemiin, jossa rajoitusvoima $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\lambda$ on nimenomaan $\boldsymbol{\theta}$:n suuntainen. Tämä oikeuttaa edellä esitetyn yleistetyn voiman laskukaavan, jossa $\boldsymbol{\theta}$:n suuntainen komponentti oli jätetty huomiotta: rajoitusvoima määräytyy siten, että epämääräisyys $\boldsymbol{\theta}$-suunnassa korjautuu. Sidosyhtälöllä täydennetyn rotaatioyhtälön kerroinmatriisi on aina kääntyvä (vrt. harjoitus 7.3).

Neliöllinen nopeusvektori $-\overline{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}\overline{\boldsymbol{\omega}}$ liittyy tilanteeseen, jossa kappaleen rotaatioakseli ei ole mikään kappaleen kolmesta päähitausakselista. Tällöin "epätasaisesti jakautunut keskipakoisvoima" pyrkii kiertämään kappaletta suuntaan, jossa rotaatio tapahtuisi suurempaa rotaatiohitautta vastaavan päähitausakselin ympäri. Rotaatioiden eri parametrisoinneissa neliöllinen nopeusvektori saa eri ulkonäköjä, mutta perusmerkitys on sama: kappale pyörii "vinosti" ja pyrkii sen vuoksi "kieppumaan".

7.2

Hitaustensorin laskemisessa tarvitaan koordinaattien neliöiden integraaleja kappaleen tilavuuden yli. Seuraavassa menettely, joka perustuu kahteen muuttujanvaihdokseen sekä ympyrän symmetrian hyväksikäyttämiseen. Kappaleen ollessa ellipsoidi integraalit tilavuuden yli voitaisiin järjestää monella eri tavalla; tämä tapa ei liene kaikkein suoraviivaisin, mutta näin laskuista selvitään pelkillä polynomi-integroinneilla.

$$
\begin{aligned}
\int_V x_1^2\,\mathrm{d}V &= \int\limits_{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}\le 1} x_1^2\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \int\limits_{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\le 1} a^2\xi_1^2\,abc\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3 = a^3bc\int_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{\xi_1^2+\xi_2^2\le 1-\xi_3^2}\xi_1^2\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\Big)\mathrm{d}\xi_3 \\
&= \frac{a^3bc}{2}\int_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{\xi_1^2+\xi_2^2\le 1-\xi_3^2}\xi_1^2\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 + \int\limits_{\xi_1^2+\xi_2^2\le 1-\xi_3^2}\xi_2^2\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\Big)\mathrm{d}\xi_3 = \frac{a^3bc}{2}\int_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{\xi_1^2+\xi_2^2\le 1-\xi_3^2}\xi_1^2+\xi_2^2\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\Big)\mathrm{d}\xi_3 \\
&= \frac{a^3bc}{2}\int_{-1}^{1}\Big(\int_0^{\sqrt{1-\xi_3^2}} r^2\,2\pi r\mathrm{d}r\Big)\mathrm{d}\xi_3 = \frac{a^3bc}{2}\int_{-1}^{1}2\pi\,\frac{1}{4}(1-\xi_3^2)^2\mathrm{d}\xi_3 = \frac{4\pi a^3bc}{15} = \frac{Va^2}{5} \\
\left(\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}\right)_{11} &= \int_V \rho(x_2^2+x_3^2)\,\mathrm{d}V = \frac{4\pi abc\,\rho}{15}(b^2+c^2) = \frac{m}{5}(b^2+c^2) \qquad \text{jne.} \\
\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta} &= \frac{4\pi abc\,\rho}{15}\begin{bmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

mikä siis on haluttu ellipsoidin hitaustensorin kaava, kun ellipsoidin keskipiste on koordinaatiston origossa ja sen pääakselit on koordinaattiakselien suuntaiset. Diagonaalin ulkopuolella olevien hitaustensorin alkioiden lausekkeissa esiintyy koordinaattien neliöiden sijaan kahden eri koordinaatin tulo, eikä paritonta astetta sisältävistä termeistä kerry symmetrisen välin yli integroitaessa mitään. Diagonaalin ulkopuoliset alkiot ovat siis nollia, kun hitaustensori esitetään pääakselikoordinaatistossa, jossa ellipsoidi on symmetrinen kaikkien koordinaattitasojen suhteen.

Kun ellipsoidin orientaatio on $\boldsymbol{\theta} = [0.7 \;\; 0.1 \;\; -0.7 \;\; 0.1]^{\mathrm{T}}$ ja $a = 0.2\,\mathrm{m}$, $b = 0.1\,\mathrm{m}$, $c = 0.4\,\mathrm{m}$, $\rho = 1\,\mathrm{kg/m^3}$, ellipsoiden hitaustensori kappalekoordinaatistossa, tarvittava koordinaatiston kierto sekä hitaustensori globaalissa koordinaatistossa ovat:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\theta} = [0.7 \;\; 0.1 \;\; -0.7 \;\; 0.1]^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{E} = \Big[-\bar{\boldsymbol{\theta}} \;\Big|\; \tilde{\bar{\boldsymbol{\theta}}} + \theta_0\boldsymbol{I}\Big] \qquad \bar{\mathbf{E}} = \Big[-\bar{\boldsymbol{\theta}} \;\Big|\; -\tilde{\bar{\boldsymbol{\theta}}} + \theta_0\boldsymbol{I}\Big] \\
&\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.7 \\ 0.7 & -0.1 & 0.7 & 0.1 \\ -0.1 & -0.7 & -0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \mathbf{E}\bar{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -0.28 & -0.96 \\ 0 & 0.96 & -0.28 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta} = \frac{4\pi abc\,\rho}{15}\begin{bmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0011 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0013 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0003 \end{bmatrix}\mathrm{kgm^2} \\
&\mathbf{I}_{\theta\theta} = \boldsymbol{A}\,\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \approx \begin{bmatrix} 0.0004 & -0.0003 & 0 \\ -0.0003 & 0.0013 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0011 \end{bmatrix}\mathrm{kgm^2}
\end{aligned}
$$

Pieni huomio koordinaatistomuunnoksista: Myös ellipsoidia esittävä neliömuoto $\mathcal{S}$ muuntuu samalla lailla kuin hitaustensori, eli toisen asteen tensorin tavoin

$$
\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathcal{S}}\,\bar{\boldsymbol{r}} \le 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\mathcal{S}\,\boldsymbol{r} \le 1 \\
&\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \qquad \bar{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{bmatrix} \qquad \mathcal{S} = \boldsymbol{A}\,\bar{\mathcal{S}}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

7.3

Tavoitteena on esittää heilurin liikeyhtälöt kirjan kaavan (3.140) muodossa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix}$$

Keräämme tähän esitysmuotoon tarvittavat suureet ja niihin liittyvät kaavat. Yleistetty ulkoinen voima $\mathbf{Q}_e$ aiheutuu gravitaatiosta, joten sille voidaan muodostaa potentiaali käyttäen hyväksi massan m kappalekoordinaatistossa muuttumatonta sijaintia $\overline{\boldsymbol{r}}$. Putoamiskiihtyvyys on hävitetty yhtälöistä annetulla "lukuarvolla" $\mathrm{g}/l = 1\,\mathrm{s}^{-2}$. Vapausasteita on vain kaksi, ja Eulerin parametreihin liittyvästä 4x4 massamatriisista on laskettu vain näihin vapausasteisiin liittyvät osat. Yhteyttä $\overline{\boldsymbol{\omega}} = 2\overline{\mathbf{E}}\dot{\boldsymbol{\theta}} = -2\dot{\overline{\mathbf{E}}}\boldsymbol{\theta}$ on käytetty $\mathbf{Q}_v$:n laskemisessa.

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_0 \quad 0 \quad \theta_2 \quad 0]^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{q} = [\theta_0 \quad \theta_2]^{\mathrm{T}} \qquad \overline{\boldsymbol{r}} = [0 \quad 0 \quad -l\,]^{\mathrm{T}}$$

$$\overline{\mathbf{I}}_{\theta\theta} = ml^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_0 & 0 & \theta_2 \\ -\theta_2 & 0 & \theta_0 & 0 \\ 0 & -\theta_2 & 0 & \theta_0 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_0 & 0 & -\theta_2 \\ -\theta_2 & 0 & \theta_0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & \theta_0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \mathbf{E}\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$$

$$V(\mathbf{q}) = mgh = mg(\mathbf{i}_3 \cdot \boldsymbol{r}) = mg\big(\mathbf{i}_3 \cdot (\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{r}})\big) = mg\big(\mathbf{i}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{r}}\big)$$

$$= -mgl\,[0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & \theta_0 & 0 & \theta_2 \\ -\theta_2 & 0 & \theta_0 & 0 \\ 0 & -\theta_2 & 0 & \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\theta_2 & 0 \\ \theta_0 & 0 & \theta_2 \\ 0 & \theta_0 & 0 \\ -\theta_2 & 0 & \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = mgl\big(\theta_2^2 - \theta_0^2\big) = \frac{ml^2}{\mathrm{s}^2}\big(\theta_2^2 - \theta_0^2\big)$$

$$\mathbf{Q}_e = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \frac{2ml^2}{\mathrm{s}^2} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ -\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$C(\mathbf{q}) = \theta_0^2 + \theta_2^2 - 1 = 0 \qquad\qquad C_{\mathbf{q}} = 2[\theta_0 \quad \theta_2]$$

$$\mathbf{Q}_c = -C_{tt} - (C_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} - 2C_{\mathbf{q}t}\dot{\mathbf{q}} = 0 - 2(\theta_0\dot{\theta}_0 + \theta_2\dot{\theta}_2)_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + 0 = -2(\dot{\theta}_0^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$\mathbf{m}_{\theta\theta} = 4\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{I}}_{\theta\theta}\overline{\mathbf{E}} = 4ml^2 \begin{bmatrix} 0 & \theta_0 & 0 & -\theta_2 \\ -\theta_2 & 0 & \theta_0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\theta_2 & 0 \\ \theta_0 & 0 & \theta_2 \\ 0 & \theta_0 & 0 \\ -\theta_2 & 0 & \theta_0 \end{bmatrix} = 4ml^2 \begin{bmatrix} \theta_2^2 & -\theta_0\theta_2 \\ -\theta_0\theta_2 & \theta_0^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_v = -4\dot{\overline{\mathbf{E}}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{I}}_{\theta\theta}\overline{\boldsymbol{\omega}} = 8\dot{\overline{\mathbf{E}}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{I}}_{\theta\theta}\dot{\overline{\mathbf{E}}}\boldsymbol{\theta} = 8ml^2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 & -\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = -8ml^2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2(\theta_2\dot{\theta}_0 - \theta_0\dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_0(\theta_0\dot{\theta}_2 - \theta_2\dot{\theta}_0) \end{bmatrix}$$

Kun nämä sijoitetaan paikoilleen, saadaan

$$\begin{bmatrix} 4ml^2\,\theta_2^2 & -4ml^2\,\theta_0\theta_2 & 2\theta_0 \\ -4ml^2\,\theta_0\theta_2 & 4ml^2\,\theta_0^2 & 2\theta_2 \\ 2\theta_0 & 2\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \frac{2ml^2}{\mathrm{s}^2} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ -\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} - 8ml^2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2(\theta_2\dot{\theta}_0 - \theta_0\dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_0(\theta_0\dot{\theta}_2 - \theta_2\dot{\theta}_0) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\dot{\theta}_0^2 + 2\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}$$

Huom.1 Kuten tehtävässä 7.1 todettiin, yleistetty voima $\mathbf{Q}_e$ voidaan laskea muodostamalla ensin ulkoinen momentti $\overline{\mathbf{F}}_\theta = -[0 \;\; 1 \;\; 0]^{\mathrm{T}} mgl\,\sin\phi = -[0 \quad 2\theta_0\theta_2 mgl \quad 0]^{\mathrm{T}}$ ja sitten $\mathbf{Q}_e = 2\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{F}}_\theta$. Näin saatu $\mathbf{Q}_e$ *ei ole sama* kuin edellä potentiaalista laskettu. Selvästi potentiaalista laskettu $\mathbf{Q}_e$ ei myöskään ole 0 heilurin alakuolokohdassa, vaikka todellista momenttia ei ole. Ylimääräinen voima "nojaa sidosyhtälöön", ja ilmeneekin, että *rajoitusehdon toteutuessa tarkasti* pätee $\big(-\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} - 2\overline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{F}}_\theta\big) \parallel \boldsymbol{\theta}$. Huomautuksen 3 perusteella tällä poikkeamalla ei ole merkitystä.

Huom.2 Neliöllisen nopeusvektorin esiintyminen tässä liikeyhtälössä voi tuntua yllättävältä, sillä rotaatio tapahtuu heilurin erään päähitausakselin ympäri. Osoittautuu jälleen, että *rajoitusehdon toteutuessa tarkasti* $\mathbf{Q}_v \parallel \boldsymbol{\theta}$, eli kyseessä on nytkin rotaation parametrisoinnista johtuva "kummallisuus", jolla ei huomautuksen 3 perusteella ole merkitystä.

Huom.3 Eulerin parametreihin liittyvien yleistettyjen voimien komponentit $\boldsymbol{\theta}$:n suuntaan saavat olla epämääräisiä, sillä rajoitusvoima $\mathbf{C_q}^{\mathrm{T}}\lambda$ "korjaa" aina $\boldsymbol{\theta}$:n suuntaiset voimat siten, että asetettu rajoitus $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{C}(\mathbf{q},t) = \mathbf{0}$ toteutuu. $\boldsymbol{\theta}$:n suuntaiset "epäselvyydet" vaikuttavat ainoastaan Lagrangen kertoimen λ arvoon, mistä ei tarvitse välittää, koska Eulerin parametreihin liittyvällä Lagrangen kertoimella ei ylipäätään liene selkeää fysikaalista tulkintaa.

Tulemme käyttämään tätä samaa systeemiä myöhemmässä harjoituksessa rajoitusehtojen "ajelehtimisen" (drift) havainnollistamiseen, ja ratkomme saatua yhtälöryhmää tulevaisuutta varten, vaikka se tämän tehtävän kannalta ei olekaan oleellista.
Liikeyhtälöitä saa muokattua siistimmäksi esim. seuraavasti: 1° Kerrotaan kolmas yhtälö molemmilla puolilla vakiolla $2ml^2$. 2° Kerrotaan yhtälön vasemmalla puolella kerroinmatriisin kolmas sarake vakiolla $2ml^2$ ja jaetaan vastaavasti kerrottavan vektorin kolmas alkio. 3° Supistetaan vakio $4ml^2$.

$$\begin{bmatrix} \theta_2^2 & -\theta_0\theta_2 & \theta_0 \\ -\theta_0\theta_2 & \theta_0^2 & \theta_2 \\ \theta_0 & \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \frac{\lambda}{2ml^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\mathrm{s}^2} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ -\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2(\theta_2\dot{\theta}_0 - \theta_0\dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_0(\theta_0\dot{\theta}_2 - \theta_2\dot{\theta}_0) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_0^2 + \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}$$

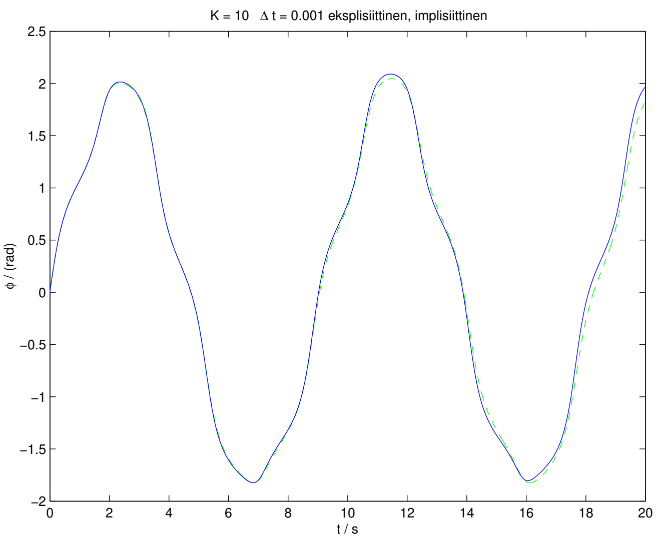
Tässä muodossa kerroinmatriisin alkiot ovat laaduttomia ja kaikki loput suureet laatua s^{-2}. Lisäksi, *mikäli rajoitusehto* $\theta_0^2 + \theta_2^2 = 1$ *toteutuu tarkasti*, kerroinmatriisi on ortogonaalinen, joten kiihtyvyydet ja λ ratkeavat helposti

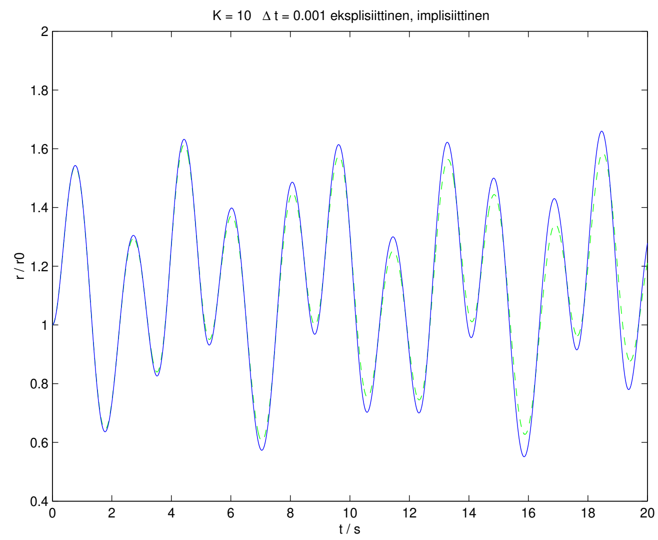
$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \frac{\lambda}{2ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2^2 & -\theta_0\theta_2 & \theta_0 \\ -\theta_0\theta_2 & \theta_0^2 & \theta_2 \\ \theta_0 & \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2\mathrm{s}^2} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ -\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2(\theta_2\dot{\theta}_0 - \theta_0\dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_0(\theta_0\dot{\theta}_2 - \theta_2\dot{\theta}_0) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_0^2 + \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} \right)$$

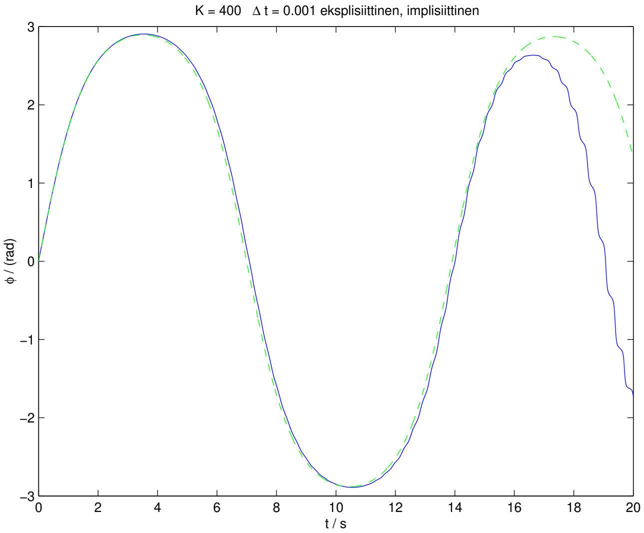
7.4

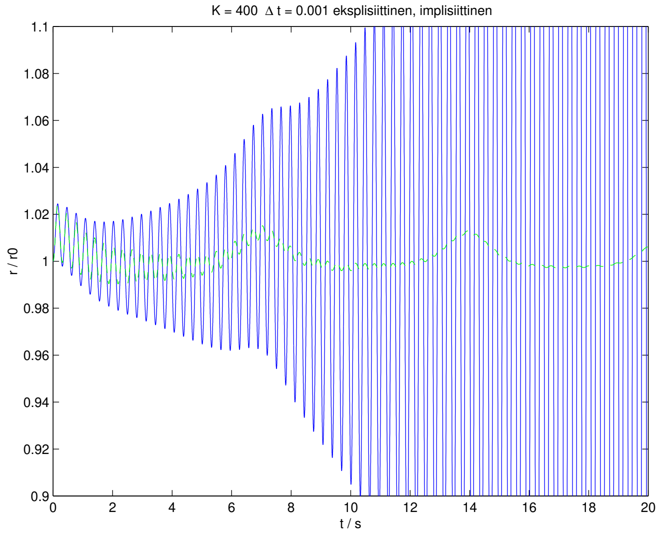
Systeemi muistuttaa luonteeltaan ja alkuehdoiltaan harjoituksen 5.1 heiluria, mutta varren joustosta seuraa, että osa systeemin energiasta sitoutuu heilunnan sijasta varren jousienergiaksi ja säteen suunnassa tapahtuvan värähtelyn liike-energiaksi. Tästä johtuen heilahdus ei tällä alkuehdolla koskaan yllä heilurin yläkuolokohtaan asti, vaikkakin liike lähestyy jäykkävartisen heilurin liikettä kun $K \to \infty$.
Jäykkyyden arvolla $K = 10\,\mathrm{s}^{-2}$ heilahtelu ja säteen suuhtainen liike kytkeytyvät voimakkaasti toisiinsa, mikä on nähtävissä ratkaisun kuvaajista.
Aika-askelen ollessa $\Delta t = 0.001\,\mathrm{s}$ integrointimenetelmien väliset erot alkavat ilmetä selvästi jäykkyyden arvolla $K = 400\,\mathrm{s}^{-2}$: Implisiittinen menetelmä vaimentaa nopeasti säteen suuntaisen värähtelymoodin, mutta vaimennus ei tunnu merkittävästi heilahdusmoodissa. Eksplisiittinen menetelmän tuottaa säteen suuntaiseen moodiin lisäenergiaa siten, että 20 s aikana kertyneen lisäenergian aiheuttama häiriö näkyy jo heilahtelumoodissakin. Näiden menetelmien vaimennus/vahvistus tehostuu, kun värähtelymoodien ominaistaajuudet kasvavat suhteessa numeerisen ratkaisun aika-askeleeseen Δt.
Jäykkyydellä $K = 10^6\,\mathrm{s}^{-2}$ eksplisiittinen ratkaisu ei enää ole järkevä tälä aika-askeleella; implisiittinen ratkaisu vaimentaa nopeamman moodin käytännössä yhden jakson aikana. Keskipistemenetelmä säilyttää molempien moodien energian jokseenkin tarkasti ja säteensuuntainen värähtely tapahtuu heilahduskulmasta riippuvan "tasapainoaseman" ympärillä taajuudella $f \approx \sqrt{K}/(2\pi)$. Kuvaan on piirretty keskipistemenetelmälle vain säteen suuntaisen värähtelyn verhokäyrät, koska kuvan 20 s aikana värähtelevä massa liikkuu verhokäyrältä toiselle n. 6000 kertaa.
Jäykkyydellä $K = 10^6\,\mathrm{s}^{-2}$ keskipistemenetelmä tuo jo esiin kriittisellä alkuvauhdilla esiintyvän jäykän heilurin taipumuksen seisahtua yläkuolokohdan lähelle; samalla askelpituudella implisiittisellä menetelmällä laskettu ratkaisu ei energiahäviöiden vuoksi jaksa kiivetä yhtä korkealle, mistä johtuen heilahdusten jaksonajat ovat menetelmillä erisuuret.

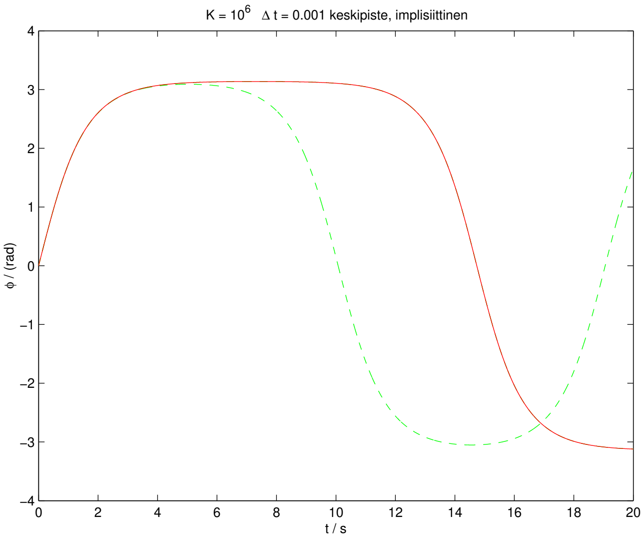
```
% Matlab scripti joustavavartisen heilurin vasteen ratkaisuun
% (muuttujan r tilalla kaytetty r/r0, eli x(3)=r/r0, x(4)=d/dt r/r0)
%
% Menetelman valinta: ekplisiittinen -> gam=0,
% implisiittinen -> gam=1, keskipiste -> gam=1/2
gam=1;
K=10;                              % varren "jousivakio" K
tmax=20; dt=0.001; t=0:dt:tmax;    % aikavali ja aika-askel
x=zeros(4,length(t));              % tulosmatriisin alustus
x(:,1)=[0 2 1 0]';                 % alkuehto
for i=1:length(t)-1;
    f=[x(2,i); ...
      -(sin(x(1,i))+2*x(2,i)*x(4,i))/x(3,i); ...
       x(4,i); ...
       (x(2,i)^2-K)*x(3,i)+K+cos(x(1,i))];
    B=[0 1 0 0; ...
       -cos(x(1,i))/x(3,i), -2*x(4,i)/x(3,i), ...
       -(2*x(2,i)*x(4,i)+sin(x(1,i)))/(x(3,i)^2), ...
       -2*x(2,i)/x(3,i);...
       0 0 0 1; ...
       -sin(x(1,i)) 2*x(2,i)*x(3,i) x(2,i)^2-K 0];
    x(:,i+1)=x(:,i)+(eye(4)-B*gam*dt)\(f*dt) ;
end;
figure(3); plot(t,x(1,:),'b');   % kiertyman phi(t) kuvaaja
figure(4); plot(t,x(3,:),'k');   % (r/r_0)(t) kuvaaja
```

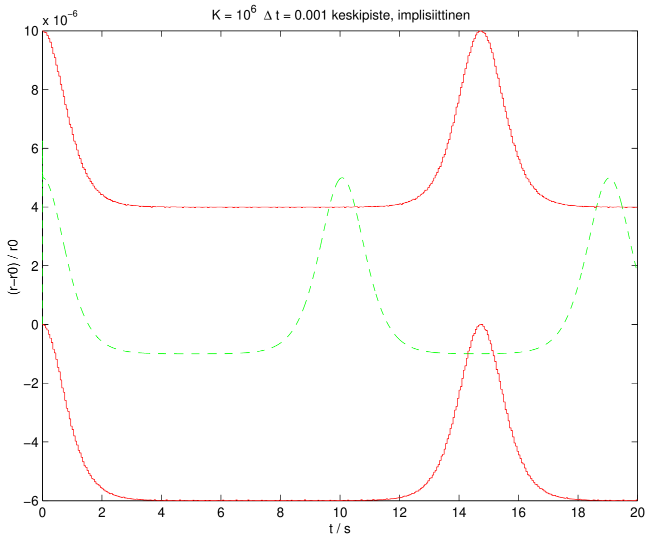

K = 10   Δ t = 0.001 eksplisiittinen, implisiittinen
φ / (rad)
t / s


K = 10   Δ t = 0.001 eksplisiittinen, implisiittinen
r / r0
t / s


K = 400   Δ t = 0.001 eksplisiittinen, implisiittinen
φ / (rad)
t / s


K = 400   Δ t = 0.001 eksplisiittinen, implisiittinen
r / r0
t / s


K = 10^6   Δ t = 0.001 keskipiste, implisiittinen
φ / (rad)
t / s


K = 10^6   Δ t = 0.001 keskipiste, implisiittinen
x 10^-6
(r−r0) / r0
t / s