

# Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3, s 2002

Apiola/Ebeling

## 3. välikoe 12.12. 2002

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

### Sallittu: funktiolaskin

- (a) Laske määritelmän perusteella siirretyn *Heavisiden funktion*  $u(t-a)$ ,  $a \geq 0$  Laplace- muunnos. Millä reaalilla  $s$ :n arvoilla muunnosfunktio  $F(s)$  on määritelty?  
(b) Määritä käänteismuunnos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+8}{s^2+4s+5}\right\}.$$

- Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvot tehtävä

$$y'' + 9y = \begin{cases} 8 \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi, \end{cases}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$$

- Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 1 \\ \frac{2-x}{2}, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

- Piirrä  $f$ :n parittoman jatkos 4-jaksoisen jatkos kuvaaja välillä  $[-4, 4]$ .
- Muodosta (a)-kohdan tavoin jatkettua funktioita Fourier-sarjaksi, ja selvitä sen suppenemiskäytös koko  $\mathbb{R}$ :ssä.

Vihje: Sievennä ensin ja ala vasta sitten integroida. Huomaat, että lasku tulee varsin lyhyeksi. Kertoimet saat jättää muotoon, jossa esiintyy esim. tyyppiä  $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  olevia termejä.

- Tarkastellaan päistään kiinnitettyä värähtelevää kieltä, jonka pituus  $L = 2$ , ja olkoon aaltoyhtälön vakio  $c = 2$ . (aaltoyhtälö annettu alempana). Olkoon alkunopeus  $u_t(x, 0) = 0$  ja alkupoiikkeama  $u(x, 0) = f(x)$  tehtävän 3 funktio.

Käy läpi muuttujanerotusprosessi aaltoyhtälön ratkaisemiseksi, eli lähde liikkeelle yrittäessä  $u(x, t) = F(x)G(t)$ .

Riittää, kun otat ”muuttujanerotusvakioksi”  $k$  suoraan negatiivisen luvun, jota voit merkitä vaikkapa  $k = -p^2$ .

Huom! Tehtävän 3 (”kohtuullisista”) virheistä ei sakoteta tässä uudestaan.

## Laplace-muunnokset

**Määritelmä:** Annettu  $f(t)$ ,  $\mathcal{L}f = F$ ,  $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$  **Merk.**  $u(t) = H(t)$  = yksikköaskelfunktio .

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0), \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s), \quad \mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

### Laplace-taulukko

$f(t)$	$t^k$	$e^{at}$	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

## Osamurtokehitykset

Olk.  $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ , missä  $\deg(P) < \deg(Q)$

- Jos  $Q(s)$ :llä on yksinkertainen tekijä  $s - a$ , otetaan kehitelmään termi  $\frac{A}{s-a}$ .
- Jos  $Q(s)$ :llä on yksinkertainen tekijä  $s^2 + bs + c$ , tulee kehitelmään termi  $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$ , jos halutaan operoida reaalilla kertoimilla.
- Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanoikaamme  $r$ , otetaan termit  $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$  ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit  $\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c} + \dots + \frac{B_rs+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

**Käännä!**

## Fourier-sarja

$2L$ -jaksoisen funktion  $f$  Fourier-sarja:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

## Aaltoyhtälö

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

---

## Palaute ja toivotukset

Pyytäisin vielä viimeisenä palveluksena palautelomakkeen täyttööni niiltä, jotka eivät ole tähän mennessä [www-palautetta](#) lähettäneet.

Ja sitten ... Hyvää uutta vuotta ja tulevia uusia vuosia ja onnea ja menestystä elämän varrella!

t. *Heikki*