Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3

Apiola

Tentti 27.1.2003, tehtävät ja ratkaisut

Sallittu: funktiolaskin

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

1. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ nolla-avaruuden *Nul(A)*, sarakeavaruuden *Col(A)* ja riviavaruuden *Row(A)* kannat.

   Ratkaisu. Gaussin rivioperaatioilla saadaan porrasmuoto (”ref, row echelon form”):

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) *Nul(A)*

   Ratkaistava $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, eli

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

   Vapaasti valittavat: $x_4 = s, \quad x_3 = t$. Jälkimmäisestä saadaan $x_2 = -\frac{3}{2}s - \frac{5}{2}t$ ja ensimmäisestä: $x_1 = -5s - 6t$.

   Siis

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5\,s - 6\,t \\ -3/2\,s - 5/2\,t \\ t \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -5 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Tässä näkyvät kaksi vektoria siis virittävät Nul(A):n. Ne ovat LRT, koska ne vierekkäin ladottuna sisältävät osamatriisina 2×2-yksikkömatriisin. Siispä meillä komeilee kysytty kanta.

   (Näin käy aina, koska kustakin vapaasti valittavasta parametrista aiheutuu vastaava yksikkömatriisn sarake täydennettynä lisäalkioilla, jotka eivät vaikuta LRT-käytökseen.)

   (b) *Col(A)* Poimitaan **alkuperäisestä matriisista** tukisarakkeet:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

   Miksi? Koska **sarakkeiden LRT/LRV säilyy rivioperaatioissa**. Tässä ref(A):n 2 ensimmäistä saraketta LRT, mutta 3 (ja siis 4) LRV.

   (c) *Row(A)* Poimitaan **ref(A)**:sta (porrasmuodosta) nollasta erilliset rivit.

$$\{ \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 & -3 \end{bmatrix} \}$$

   Miksi? Koska **rivien viritys säilyy rivioperaatioissa**. Niinpä tarvitsee vain tarkistaa LRT, joka porrasmuodon takia on ilmeinen.

   Oikeita vaihtoehtoja: Row(A):lle sadaan (yleensä eri) kanta muodostamalla A^T:n sarakeavaruudelle kanta. Tällöin täytyy siis tehdä $ref(A^T)$. Vastaavasti voidaan Col(A):n kanta muodostaa $Row(A^T)$:n avulla.

   Vääriä vaihtoehtoja: Väärä päättely voi tunnetusti ”tsägällä”johtaa oikeaan tulokseen. Tässä tapauksessa oikea tulos saadaan väärällä päättelyllä riviavaruuden suhteen: Valitaan `ref(A)`:n nollasta poikkeavia rivejä vastaavat (2 ensimmäistä) riviä A:sta. Tulos on oikea, koska nämä rivit sattuvat olemaan LRT. Mutta sen näkee vain muodostamalla rref:n A^T:lle (tai A^T:n 2:lle ensimmäiselle sarakkeelle).

2. Olkoon $\mathbf{y} = [3, 1, 5, 1]^T$, ja $\mathbf{v_1} = [3, 1, -1, 1]^T$, $\mathbf{v_2} = [1, -1, 1, -1]^T$.

   Osoita, että $\mathbf{v_1}$ ja $\mathbf{v_2}$ ovat ortogonaaliset ja määritä vektorien $\mathbf{v_1}$ ja $\mathbf{v_2}$ virittämästä aliavaruudesta piste $\mathbf{y}^*$, joka on lähimpänä pistettä $\mathbf{y}$.

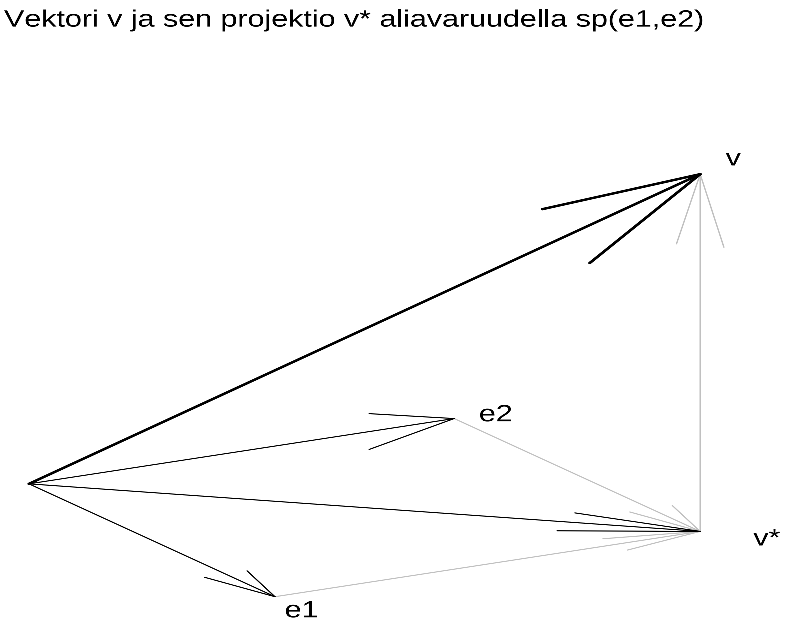
   Ratkaisu:

   $\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle = 3 - 1 - 1 - 1 = 0$, joten todellakin $\mathbf{v_1} \perp \mathbf{v_2}$

   Tarkoitus oli antaa helppo ”lahjatehtävä”. Ortogonaalisuudesta sai yhden lohdutuspisteen.

   Valitettavasti 7:stä osallistujasta vain yksi osasi.

Ratkaisun periaate on kaikessa koruttomuudessaan alla olevan kuvan mukainen, ts. vektorin kohtisuora projektio aliavaruudelle. (Kuvassa merkitsemme tehtävän $\mathbf{y}$:n sijasta $\mathbf{v}$.)



Kuva 1: Ortogonaalinen projektio, eli paras approksimaatio

Toisin sanoen, jos $\mathbf{e_1}$ ja $\mathbf{e_2}$ ovat $\mathbf{v_1}$ ja $\mathbf{v_2}$ normeerattuina (jaettuna normilla), niin $\mathbf{e_1}$ ja $\mathbf{e_2}$ muodostavat ortonormaalin joukon. Silloin vektorin $\mathbf{y}$ kohtisuora projektio $\mathbf{y}^*$ saadaan:

$$\mathbf{y}^* = \langle \mathbf{y}, \mathbf{e_1} \rangle \mathbf{e_1} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{e_2} \rangle \mathbf{e_2}.$$

Tarvitsee siten vain normeerata valmiiksi ortogonaaliset vektorit $\mathbf{v_1}$ ja $\mathbf{v_2}$. Kaava on silloin

$$\mathbf{y}^* = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v_1} \rangle}{\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle}\mathbf{v_1} + \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v_2} \rangle}{\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} \rangle}\mathbf{v_2}$$

Lasketaan sisätulot, saadaan kertoimet: $\frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v_1} \rangle}{\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle} = 1/2, \quad \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v_2} \rangle}{\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} \rangle} = 3/2.$

Tästä lasketaan:

$$\mathbf{y}^* = [3, -1, 1, -1]^T.$$

3. Ratkaise toinen (ja vain toinen) alla olevista tehtävistä (a), (b):

   (a) Syvenny systeemin $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ faasitasokuviin 1 – 4 tehtäväpaperin lopussa. Matriisilla A on jokaisessa tapauksessa kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

   Kirjoita yleinen ratkaisu ominaisvektorien $\mathbf{v_1}$ ja $\mathbf{v_2}$ sekä ominaisarvojen λ_1, λ_2 avulla.

   Selvitä kunkin kuvan kohdalla seuraavat asiat:

   - Ominaisarvojen reaalisuus ja myönteisessä tapauksessa saman-/erimerkkisyys.
   - Kompleksisten ominaisarvojen tapauksessa reaaliosan nollasta erillisyys ja erillisessä tapauksessa reaaliosan merkki.
   - Reaalisissa tapauksissa määritä ominaisvektorit (likimäärin, kuvan tarkkuudella).
   - Origon stabiilisuus/epästabiilisuus. Käytä termiä "heikosti stabiili", jos kukin trajektori on (vain) rajoitettu.

   Ratkaisu (3 a)

   Ratkaisun muoto on $\mathbf{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}$.

   Tehtävässä annettiin tieto, joka kyllä on luettavissa kuvistakin: Jokaisessa tapauksessa 2 LRT ominaisvektoria.
   Jos olisi pyydetty päättelemään, niin reaalisethan näkyvät (ja pyydetäänkin), kompleksitapauksessa on aina kaksi erillistä ominaisarvoa λ ja $\bar{\lambda}$, joten myös 2 LRT ominaisvektoria. (Muistathan: eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit LRT.)

   Kuva (1,1): $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$, epästabiili (lähde), om. vekt. $[4, 2]$ ja $[-1, 1]$.
   Kuva (1,2) reaaliset, erimerkkiset, satula, epästabiili, om. vekt: $[4, 1]$ ja $[1, 1]$.
   Kuva (2,1) kompleksiset, $\lambda = \alpha \pm i\beta$ reaaliosa $\alpha < 0$, stabiili spiraali (nieluspiraali).
   Kuva (2,2) kompleksiset $\lambda = \pm i\beta$, reaaliosa 0, keskus, heikosti stabiili.

   (b) Olkoon $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$

(a) Osoita induktiolla, että $A^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$.

(b) Määritä e^{At}. (Vrt. e^x:n sarjakehitelmä alla.)

(c) Ratkaise alkuarvotehtävä $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = [1, 2]$

Ratkaisu (3 b)

(a) Induktio: Todetaan: pätee arvolla $k = 1$.
Induktio-oletus: Pätee arvolla k. Osoitetaan, että pätee arvolla $k+1$.
Tämä tapahtuu kertolaskulla

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{bmatrix},$$

eli A^{k+1} on väitettyä muotoa.

Siis induktiotodistus on valmis ja väite siis pätee kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

(b)
Määritelmän mukaan saadaan ottamalla huomioon A^k:n edellä johdettu lauseke:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2\,(\lambda t)^2 & t\lambda t \\ 0 & 1/2\,(\lambda t)^2 \end{bmatrix} + \ldots +$$
$$\begin{bmatrix} \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} & \frac{t(\lambda\, t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \end{bmatrix} + \ldots = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} & t\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} e^{\lambda\, t} & te^{\lambda\, t} \\ 0 & e^{\lambda\, t} \end{bmatrix}$$

(c) AA-tehtävän ratkaisu on yksinkertaisesti:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} e^{\lambda\, t} & te^{\lambda\, t} \\ 0 & e^{\lambda\, t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda\, t} + 2\, te^{\lambda\, t} \\ 2\, e^{\lambda\, t} \end{bmatrix}.$$

4. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä

$$y'' + 9y = \begin{cases} 8\sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi, \end{cases}$$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

Ratkaisu

Kts. `http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/02/KOE/vk31.htmlvk3ratk` (kolmannen välikokeen tehtävä 2).

5. Piirrä funktion $f(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi]$ parittoman laajennuksen kuvaaja välillä $[-\pi, \pi]$ ja kehitä se *Fourier*-sarjaksi, ts. muodosta f:n sinisarja.

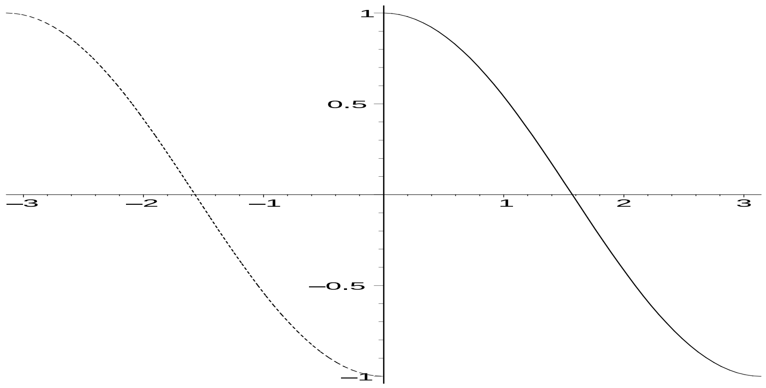
Kirjoita auki sarjan osasumma, jossa on termit $\sin 6x$:ään saakka.

Vihje: Integrointia varten konsultoi tarpeen mukaan tehtäväpaperin trigonometriaosaa.

Ratkaisu:

Pariton laajennus määritellään: $f_o(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ -\cos x, & x < 0. \end{cases}$

Kts. 2.



Kuva 2: cos:n pariton laajennus välillä $[-\pi, \pi]$

Koska integroitava on pariton, ja pariton × parillinen = pariton, ja pariton funktio integroituna origon suhteen symmetrisen välin yli antaa 0:n, ovat Fourier-sarjan cos-termien kertoimet (ja vakiokerroin) 0, eli $a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$.

Koska pariton × pariton = parillinen, saadaan b_n-kertoimet kertomalla 2:lla välin $[0, \pi]$ yli otettu integraali, eli

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Näin mallikas selitys (ja vähän vähemmän perusteellinenkin) antaisi 3 p.

Sitten se surullisen kuuluisa integrointi.

$$\begin{cases} \sin(nx+x) = \sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x) \\ \sin(nx-x) = \sin(nx)\cos(x) - \cos(nx)\sin(x) \end{cases}$$

Yhteenlaskemalla: $\sin(nx+x) + \sin(nx-x) = 2\sin(nx)\cos(x)$, joten integroinnissa tarvitsee vain katsoa, että sisäfunktion derivaatta tulee oikein. Koska siinä tulee jako $n-1$:llä, täytyy tapaus $n=1$ käsitellä erikseen.

Jos $n > 1$, saadaan

$b_n = 2\,\frac{(\cos(\pi\,n)+1)n}{\pi\,(n+1)(n-1)} = 2\,\frac{((-1)^n+1)n}{\pi\,(n^2-1)}$

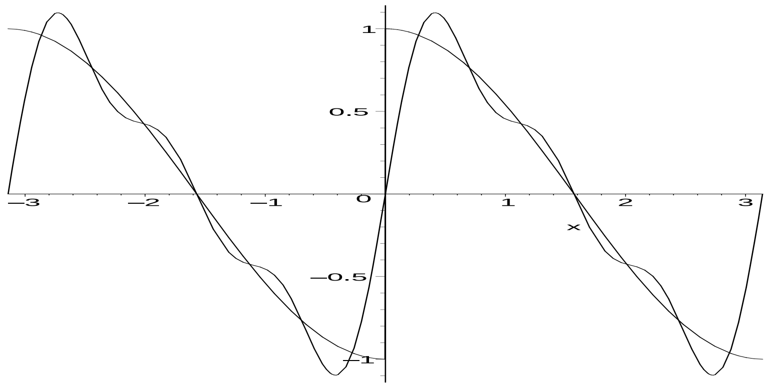
Tapauksessa $n = 1$, tulee: $b_1 = 0$. Siispä sarja saadaan muotoon:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2\,\frac{((-1)^n+1)\,n\sin(nx)}{\pi\,(n^2-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} 8\,\frac{k\sin(2\,kx)}{\pi\,(4\,k^2-1)}$$

Jälkimmäinen lauseke seuraa merkitsemällä $n = 2k$, ja ottamalla huomioon, että parittomilla n:n arvoilla $b_n = 0$.

Kysytty osasumma on siten: $8/3\,\frac{\sin(2\,x)}{\pi} + \frac{16}{15}\,\frac{\sin(4\,x)}{\pi} + \frac{24}{35}\,\frac{\sin(6\,x)}{\pi}$

Kuva näyttää tällaiselta: (Kuva 3).



Kuva 3: cos:n sinisarjan osasumma $\sin 6x$:ään saakka

Kommentteja ratkaisuista:

`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/02/KOE/v3jan03tulos.txt`