Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3

Apiola

Tentti 27.1.2003

Sallittu: funktiolaskin

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

1. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ nolla-avaruuden *Nul(A)*, sarakeavaruuden *Col(A)* ja riviavaruuden *Row(A)* kannat.

2. Olkoon $\mathbf{y} = [3, 1, 5, 1]^T$, ja $\mathbf{v_1} = [3, 1, -1, 1]^T$, $\mathbf{v_2} = [1, -1, 1, -1]^T$.

   Osoita, että $\mathbf{v_1}$ ja $\mathbf{v_2}$ ovat ortogonaaliset ja määritä vektorien $\mathbf{v_1}$ ja $\mathbf{v_2}$ virittämästä aliavaruudesta piste $\mathbf{y}^*$, joka on lähimpänä pistettä $\mathbf{y}$.

3. Ratkaise toinen (ja vain toinen) alla olevista tehtävistä (a), (b):

   (a) Syvenny systeemin $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ faasitasokuviin 1 – 4 tehtäväpaperin lopussa. Matriisilla A on jokaisessa tapauksessa kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

   Kirjoita yleinen ratkaisu ominaisvektorien $\mathbf{v_1}$ ja $\mathbf{v_2}$ sekä ominaisarvojen λ_1, λ_2 avulla.

   Selvitä kunkin kuvan kohdalla seuraavat asiat:

   - Ominaisarvojen reaalisuus ja myönteisessä tapauksessa saman-/erimerkkisyys.
   - Kompleksisten ominaisarvojen tapauksessa reaaliosan nollasta erillisyys ja erillisessä tapauksessa reaaliosan merkki.
   - Reaalisissa tapauksissa määritä ominaisvektorit (likimäärin, kuvan tarkkuudella).
   - Origon stabiilisuus/epästabiilisuus. Käytä termiä "heikosti stabiili", jos kukin trajektori on (vain) rajoitettu.

   (b) Olkoon $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

   (a) Osoita induktiolla, että $A^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$.

   (b) Määritä e^{At}. (Vrt. e^x:n sarjakehitelmä alla.)

   (c) Ratkaise alkuarvotehtävä $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = [1, 2]$

4. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä

$$y'' + 9y = \begin{cases} 8\sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi, \end{cases}$$

   $y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

5. Piirrä funktion $f(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi]$ parittoman laajennuksen kuvaaja välillä $[-\pi, \pi]$ ja kehitä se *Fourier*-sarjaksi, ts. muodosta f:n sinisarja.

   Kirjoita auki sarjan osasumma, jossa on termit $\sin 6x$:ään saakka.

   Vihje: Integrointia varten konsultoi tarpeen mukaan tehtäväpaperin trigonometriaosaa.

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$, $(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$, $\mathcal{L}\{u(t - a)f(t - a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1 s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_r s+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Trigonometriaa, e^x:n sarja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

Näistä saat käden käänteessä $\sin\alpha\cos\beta$ ym.-tyyppiset kaavat.

$e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$

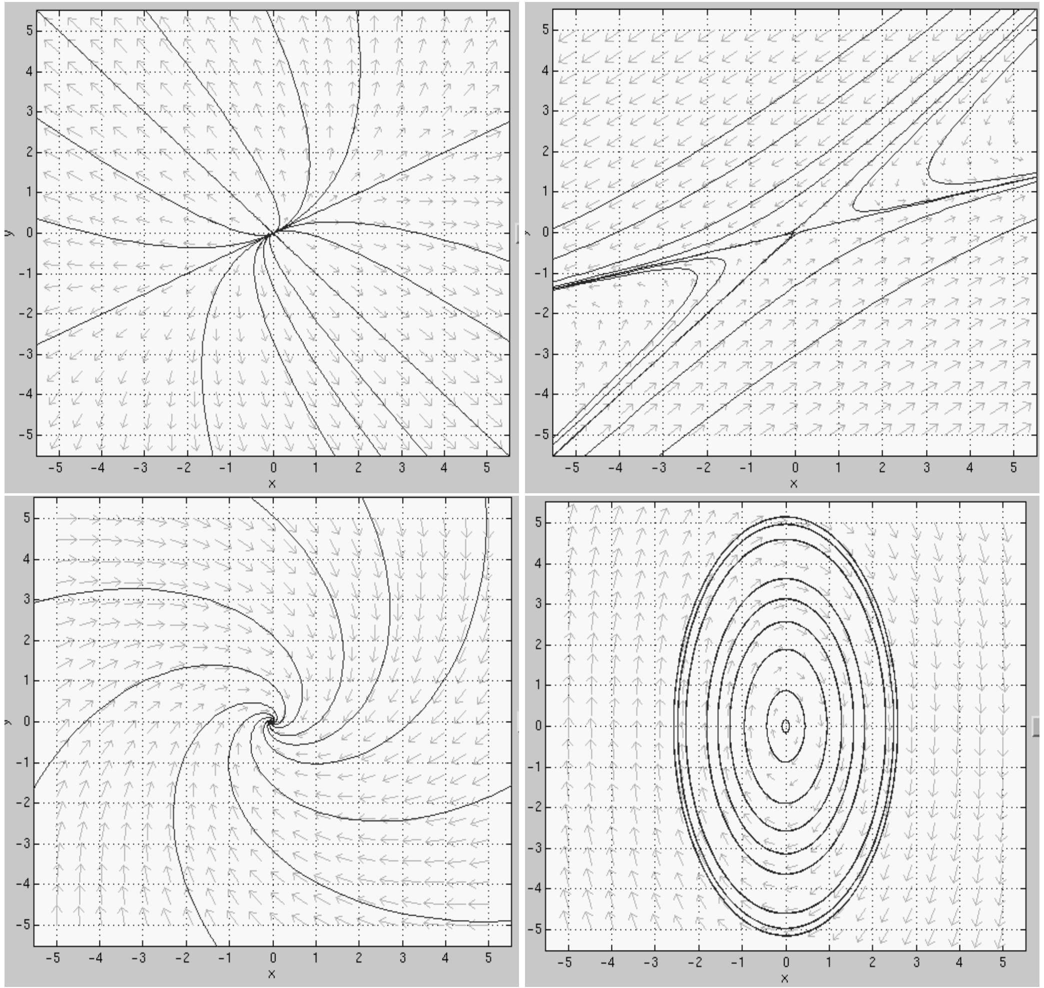
Fourier-sarja

$2L$-jaksoisen funktion f Fourier-sarja:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$



Kuva 1: [Tehtävä 3 (a)] Kuvat 1,2,3,4