Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 9 (viikko 46 , 14 – 16.11.2001)

Välikoeviikolla pidetään taas ke ja to neuvontaharjoitukset ja pe "suoritusharjoitukset".

Kirjat: GLJ ja Lay

Kannattaa käyttää hyväksi Maplea, mutta kuitenkin "käsinlaskua simuloiden".

Maple-ohjeita

`ztrans(a^k,k,z);` **Näytteenottopiirrokset**. Useissa yhteyksissä on kätevää määritellä:

```
with(plots):
jana:=k->plot([[k*T,0],[k*T,f(k*T)]],t=-0.2..k*T+0.2,color=black):
# Kutsu tapahtuu tähän tapaan:
f:=t->exp(-2*t);T:=0.1:n:=12:
display([seq(jana(k),k=0..n),plot(f,0..n*T+0.2,color=yellow,
filled=true)],axes=box);
```

Laitan tiedoston `harj9pohja.mws`, jossa mm. nämä ja vastaavia.

Lisää Maple-ohjeita myös lopussa.

1. Jatkuva-aikasignaalista $f(t) = e^{-2\omega t}$ ($\omega \in \mathbb{R}, t > 0$) otetaan näytteitä T:n välein. Kirjoita näytejonon yleinen termi ja muodosta jonon z-muunnos. Piirrä yllä neuvotulla tavalla.

2. Johda $\mathcal{Z}\{\sin k\omega T\}$, missä ω ja T ovat vakioita. (Katso tarvittaessa mallia exa 3.5:stä.) Piirrä taas huvin vuoksi.

3. Käytä 1. siirto-ominaisuutta jonon $\{y_k\}$ z-muuntamiseen, kun $y_k = \begin{cases} 0, k < 3 \\ x_k, k \geq 3 \end{cases}$, missä $x_k = (\frac{1}{2})^k$.

   Laske myös suoraan määritelmän mukaan $\mathcal{Z}\{y_k\}$

4. (a) Muodosta kausaalinen jono (x_k), jolla ei ole z-muunnosta (eli sarja hajaantuu kaikilla $z \in \mathbb{C}$.)

   (b) Todista z-muunnoksen kertomisominaisuudet (3.19) ja (3.20)

5. Muodosta vakiojonon $x_k = 1$ z-muunnos ja kertosääntöjä (3.19), (3.20) käyttäen jonojen $\{(\frac{1}{2})^k\}$, $\{k(\frac{1}{2})^k\}$,... $\{k^6(\frac{1}{2})^k\}$,....

   Käytä Maplea derivointiin. Voit tietysti tarkistaa `ztrans`:lla. Piirrä huvin vuoksi z-muunnosfunktioiden kuvajaat (rajoittumalla reaaliakseliin).

6. Määritä seuraavien funktioiden z-käänteismuunnokset: Suorita myös (b)- ja (e) - kohdissa sarjaksi kehittäminen $\frac{1}{z}$:n potenssien mukaan luennolla neuvotulla `subs-series`- yhdistelmällä (tai suoraan kehittämällä äärettömyyspisteen ympäristössä).

   (a) $\frac{z+2}{z+1}$ (b) $\frac{z}{(z-1)(z+2)}$ (jaa ensin z:lla ja sitten osamurto) (c) $\frac{z}{z^2+1}$
   (d) $1 + \frac{3}{z^2} - \frac{2}{z^9}$ (e) $\frac{2z^3+6z^2+5z+1}{z^2(2z+1)}$

   Huomaa, että jos sarjakehitelmä $\frac{1}{z}$:n potenssien suhteen jotenkin "paistaa läpi", niin homma on harvinaisen helppo.

   Käytä ihmeessa Maplen palveluja, muuten kyllä tuskastut!

7. Opiskele Exa 3.15 ss. 239–240. $y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 1$, $y_0 = 1, y_1 = 1$ ja korjaa kirjassa olevat virheet. Ratkaise tehtävä myös tyyliin (HY):n yrite: $yh_k = r^k$, (EHY)-yrite: $yp_k = k$. Yrite syntyy analogiaperiaatteella diffyhtälöön verratessa. Tässä $r = 1$ antaa HY:n rakaisun, joten yritetään $k1^k$ (vrt. $te^{\lambda t}$).

8. Oletetaan, että olet ostamassa asuntoa ja pyydät pankista lainaa. Takaisinmaksu suoritetaan kuukausittain maksettavin vakioeräisin maksuin (annuiteetti). Kokonaislaina-aika olkoon 30 vuotta.

   a) Miten suuren lainan voit ottaa, jos maksimikuukausierä, jolla pysyt hengissä, on 800 mk.

   b) Kuinka paljon kuukausierää tulee nostaa, jos haluatkin maksaa lainan 20 vuodessa.

   Oletetaan, että korkoprosentti on 5.5.

   Voit tehdä Maple-työarkin, jossa nimeät ensin kaikki asiaan vaikuttavat parametrit, niitä voit tarpeen tullen muutella.

Vaikka tehtävä on helppo ratkaista muutenkin, käytä z-muunnosta, ehkäpä se tekee pankinjohtajaasi suuren vaikutuksen.

Voit keksiä muitakin asiankuuluvia kysymyksiä, kuten korkoprosentin muutoksen vaikutus ym.

9. Fibonacci-luvut toteuttavat differenssiyhtälön $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

   Ratkaise differenssiyhtälö a) yritteellä $x_n = r^n$, b) z-muunnoksella, c) kirjoittamalla systeemiksi $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$.

   Riittää, kun ratkaiset 2:lla tavalla (joista toinen on z-muunnos), kunhan selvität kolmannenkin tavan periaatteen.

10. Ratkaise z-muunnoksen avulla kaksi seuraavista differenssiyhtälöistä: (älkää kaikki valitko samoja!)

    (a) $6y_{k+2} + 5y_{k+1} - y_k = 5$, ehdoilla $y_0 = y_1 = 0$.

    (b) $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 3y_n = 1$, ehdoilla $y_0 = 1, y_1 = 0$.

    (c) $y_{n+2} - 4y_n = 3n - 5$, ehdoilla $y_0 = y_1 = 0$. Tee käsin Maple-avusteisesti ja lisäksi automaattisemmin (samaan tyyliin kuin tehtiin L-muunnosten yhteydessä). Piirrä aikakuvat (murtoviivat).

    Pisteitä yhdistävien murtoviivojen piirtohan tapahtuu näin:

    `plot([seq([k,yy(k)],k=0..10)]);` (Lista, jonka alkioina ovat ao. pisteet esitettyinä koordinaattiparien listoina `[x,y]`.)

11. Määritä yksikköaskeljonon δ vaste, systeemissä $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = u_k$, eli ota $u = \delta$ ja $y_0 = y_1 = 1$.

12. Henkilö H päättää perustaa firman F. F:n pääoma vuoden k alussa olkoon C_k ja vuoden k kulut olkoot yhteensä E_k . Liiketoiminnan tuloksena pääoma ja kulut kehittyvät seuraavasti:

    $$\begin{cases} C_{k+1} = 1.5C_k - E_k \\ E_{k+1} = 0.21C_k + 0.5E_k \end{cases}$$

    (a) Osoita, että pitkän ajan kuluessa F:n pääoma kasvaa 20 %:n vuosi-tahtia.

    (b) Jos pääoma 1. vuoden alussa on 12000 mk ja 1. vuoden kulut ovat 7440 mk, määritä vuosi, jolloin kulut ovat minimissä ja pääoma sen vuoden alussa.

    Piirrä sekä aika- että "faasi"kuvat.

13. Teht. 19 s. 243 ("national economy").

Maple-ohjeita

Differenssiyhtälö:

Esim: `> a*y(k+2)+b*y(k+1)+c*k=u(k);`

Z-muunnosta voi soveltaa, kuten Laplace-muunnosta, samanlaiset vaiheet. (Ei tarvitse ladata mitään.)
Suositus: `alias(Z=ztrans,IZ=invztrans);`

Black box: `rsolve` (vrt. `dsolve`)

- evalc tekee usein hyvää jälkeä kompleksiluvun re-ja im-osiin jaossa. Kokeile: `evalc(exp(I*phi));`
- Tämän tyyliset kannattaa ottaa käyttöön. "symbolic" siirtää kaiken vastuun sievennysten pätevyysalueesta käyttäjälle, usein ihan hyvä. `combine(%,ln,anything,symbolic); simplify(%,ln,symbolic);`
- Osamurtohajoitelmissa kannattaa z-muunnostehtävissä aina mennä 1. asteen tekijöihin, ts. otetaan kompleksiluvut käyttöön. Jotta Maple suostuu, on tehtävä vastaavasti kuin tehtiin siinä $\sqrt{41}$-tehtävässä. Annetaan Maplen hakea tekijöihinjakoa laajennetussa "kunnassa". Tässä tapauksessa ilmoitetaan, että I on mukana:

  `lauseke:=convert(lauseke,parfrac,z,I);`
- z-käänteismuunnos saadaan suoraan funktiosta kehittämällä se $\frac{1}{z}$:n potenssien suhteen, kuten ylempänä todettiin. Maplessa voidaan series komennolla tämä saada aikaan tähän tyyliin:

  `series(F,z=infinity,10)`