Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 5 (viikko 42 , 17 – 19.10.2001)

Tämän välikoeviikon harjoitukset pidetään niin, että ke ja to on neuvontaharjoitus ja perjantaina "esiintymisharjoitus" (harjoitellaan esiintymistä ja esitellään harjoituksia).

AV ja LV

Aiheena on numeerinen lineaarialgebra, lähteinä:[KRE], [CV] Charles van Loan: Introduction to Scientific Computing (+ CV-tiedostot)
`http://www.cs.cornell.edu/cv/Books/SCMV/Mfiles/chap6.htm` ja
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/cv/chap6.htm`
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/cv/ch6/` Viime mainitussa on skriptit ja funktiot valmiina omissa .m-tiedostoissaan. Ne ovat myös kursihakemistossa: `/p/edu/mat-1.414/matlab/cv/ch6/`, Matlabissa `addpath ...`

Harjoituksissa voidaan jakaa otteita CV-sivuista.

Huom: Matlab 6:ssa on `flops` poistunut, ne CV-skriptit, joissa sitä käytetään, kannattaa ajaa matlab53:lla.

1. Kirjoita neliömatriisin tapauksessa Gaussin algoritmi Matlab-funktioksi tähän tapaan (ja testaa toimivaksi).

```
function Ab=gausseli(A,b)
% Gaussin eliminaatio, perusversio.
% Ei rivinvaihtoja, ei mitään tarkistuksia eikä älyä.
% Jos tulee 0:lla jako, niin Matlab varoittaa ja
% palauttaa NaN-rivin, silloin yksikäsitteistä ratkaisua ei ole.
%
% Syötteet: neliömatriisi A ja oikea puoli b.
% Tulos: Alakolmiomatriisi [L,bmato]
[n,n]=size(A);
% Tähän vain j-luuppi aiemmin esillä olleen eteen
```

2. Esittele `...matlab/cv/chap6.htm`-funktion GE toiminta ja demoa skriptiä ShowGE käyttäen. Selvittele myös skriptin toimintaa, voit kokeilla muutakin dataa.

   Tee erityisesti selkoa `GEpiv`-funktion toiminnasta jaettujen prujujen sekä koodien `GEpiv, ShowGEpiv` avulla.

3. Tasoalueen reunoilla on oheisen kuvan mukaiset lämpötilat.

```
        50   20   10   0
    |----|----|----|----|----|
    |                        |
 80 |   T1   T2   T3   T4    | 80
    |                        |
 60 |   T5   T6   T7   T8    | 60
    |                        |
 40 |   T9   T10  T11  T12   | 40
    |                        |
 20 |   T13  T14  T15  T16   | 20
    |                        |
    |----|----|----|----|----|
         0    0    0    0
```

   Oletetaan, että sisäpisteiden lämpötilat $T_1, ..., T_{16}$ saadaan naapuripisteiden lämpötilojen keskiarvona. (Kullakin sisäpisteellä on 4 naapuria, pohjois-, etelä-, itä-, länsi.)

   Muodosta lineaarinen yhtälösysteemi lämpötilojen $T_1, ..., T_{16}$ ratkaisemiseksi. Rakenna yhtälösysteemi itsellesi ensin kynää ja paperia käyttäen ja syötä se sitten Matlabiin.

   Käytä ratkaisuun Matlabin valmista ratkaisijaa `T=A\b` . Piirrä lämpötilafunktion kuvaaja. Tämä käy muotoilemalla ratkaisuvektori `T` 4×4- matriisiksi `TMAT` ja soveltamalla `surf`-tyyppistä funktiota. Huom: TMAT-matriisin saa kätevästi komennon `reshape` avulla.

   Huom! Tässä on kyse ihan oikeasta numeerisesta menetelmästä *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön* ratkaisemiksi, ns. differenssimenetelmästä, jossa osittaisderivaatat korvataan differensseillä (periaatteessa erotusosamäärillä).

   "Vapaaehtoinen" jatkotehtävä (1-2 lisäpistettä)

   Tämänkokoisessa tapauksessa yhtälöiden kirjoittaminen yksi toisensa jälkeen tarkemmin indeksejä miettimättä ei ole kohtuuton työ, mutta seuraavassa vaiheessa haluamme yleisen tilanteen, jossa jaetaan m:ään osaan pystysuunnassa ja n:ään vaakasuunnassa. Nyt (viimeistään) kannattaa miettiä systemaattisemmin indeksiaritmetiikkaa.

Laskentasolmut jakaantuvat sellaisiin, joilla ei ole reunanaapuria ja niihin, joilla on (joko 1 tai 2). Indeksiä voi ajatella vaikka m-järjestelmän lukuna. (Neuvontaa annetaan lisää tarpeen mukaan.) Toisaalta kokoamisen voi tehdä kaksin indeksein ja käyttää jonoutusta $M(:)$. Matriisin voi koota myös sopivina lohkomatriiseina tai toisaalta diagonaaleina, jolloin voidaan tehdä suoraan harva (sparse) rakenne. (Tapoja on siis useita.)

```
function Tmat=lampo(North,E,S,W)
% Syöte: reuna-arvovektorit (pohjois, itä, etelä, länsi)
% Tulos: Lämpötilamatriisi.
m=length(E)-2;  % length(E):n oltava sama kuin length(W)
n=length(North)-2;  % length(North):n oltava sama kuin length(S)
N=m*n         % Yhtälösysteemi on N x N
...
...
T=A\b;
Tmat=reshape(T,m,n); % Voit lopettaa tähän, mutta mukavampaa olisi,
                     % että reunatkin olisi liitetty Tmat:iin.
Tmat=...   % Liitä vielä reunat mukaan matrisiin. (Nurkkiin voit laittaa
           % ko. arvojen keskiarvon (siltä varalta, etteivät samat.)
```

Visualisoinnissa kannattaa kokeilla `surfc(Tmat)`:n lisäksi korkeuskäyriä vaikkapa tyyliin:
`cs=contour(Tmat,10); clabel(cs);`

Varsinainen tehtävä

Olkoot länsi- ja itäreuna 0-asteessa ja

```
n=...
x=linspace(0,2,n)
pohjoinen=sin((pi/2)*x).*exp(-x);
etela=pohjoinen(n:-1:1);
```

Ratkaise tehtävä ja visualisoi ainakin tapauksissa $m = 5, n = 6$ ja $m = 9, n = 17$.

4. Laske seuraavien matriisen sekä käänteismatriisien l_1- ja l_∞ normit:
`A=[4 1;0 2]; B=[0.75 1.25;1.25 0.75]; C=[-7 13;5 -9]`

Muodosta numeerinen approksimaatio vastaaville l_2-normeille laskemalla $\max_{||x||=1} ||Ax||$ ja $\min_{||x||=1} ||Ax||$. Ota yksikköympyrältä vaikka 100:n pisteen tasavälinen otos (linspace) ja järjestä kuvavektorit matriisin sarakkeiksi, johon voit suurta nautintoa tuntien operoida.

Samaa dataa käsitellään piirrettäessä, katso
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/01/L/L13.html` kohta *lineaarikuvauksen havainnollistus*. Piirrä sitten myös mallin mukaiset kuvat.

Tarkistukseen (ja vasta siihen) funktiot `norm, cond`.

5. Kuutiollisen splinin laskentatehtävä johtaa lineaariseen yhtälösysteemiin, jonka matriisi saadaan komennoilla:

```
n=...
A=diag(ones(n-1,1),1)+diag(ones(n-1,1),-1)+diag(4*ones(n,1))
A(1,1)=-1;A(n,n)=-1
```

Kirjoita funktiotiedosto

```
fuction A=splmat(n)
...
```

Laske eri n:n arvoilla suoritusaikoja a) täytenä, b) harvana (sparse) ja c) tridiagonaalisena

Laske cond(A) eri n:n arvoilla.

6. The *Hilbert matrix* $H = (1/(i + j + 1))_{i,j}$ arises for instance in the polynomial least squares problem. The Matlab function `hilb(n)` forms such a matrix. It is known that the first entry of the exact solution of the system $H_n x = e_n$ is n^2, where $e_n = (1, 0, ..., 0)$. Form a table of values of $\mathrm{cond}(H_n)$, $1/\mathrm{rcond}(H_n)$, n^2 and the first entry of the computed solution (by Matlab) for $n = 1, ..., 15$.

7. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.01 \end{bmatrix}$.

Laske A:n häiriöluku $\|.\|_1$:n suhteen. Ratkaise lineaariset yhtälösysteemit $Ax = b$ ja $A\tilde{x} = \tilde{b}$, missä $b = (4, 4)$ ja $\tilde{b} = (3, 5)$. Laske (SVS):n (Suhteellisen virheen suurenemisepäyhtälön) molemmat puolet ja vertaa.

Muista: $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ ja vastaava matriisinormi lasketaan sarakesummia käyttäen.

8. Form the unit circle in $\mathbb{R}^2$ in a similar form as "talo" above:
`>> t=linspace(0,2*pi);x=cos(t);y=sin(t);T=[x;y];`

To visualize the matrix norm concept you can draw the unit circle along with its image under a linear transformation. Let `H=hilb(2)` (2×2 Hilbert matrix)). Plot the unit circle and its image under H in the same graphics window (use `axis('square')`). Plot in another window (`figure(2)`, hopefully works for telnet/kermit also) similarly using the inverse H^{-1}. Observe the values `cond(H)` and `rcond(H)`.