

### Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2001

<http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/>

#### Laskuharjoitus 1 (viikko 37-38 , 13 - 21.9.2001)

Harjoitussysteemi:

ke 12-14: AV: Liitutaulu + Matlab/Maple

to 12-14: KV: Yhdessä työskentelyä, ohjattu harjoitus.

pe 10-12: LV: Liitutaulu+tietokone (Matlab/Maple) (Hiukan enemmän tietokoneharjoitus kuin AV.)

Oppilaat saavat (maahantuojan luvalla) asentaa kurssin ajaksi omiin koneisiin-  
sa Matlabin (5.3). Kotikoneelle kannattaa hakea ainakin

<http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/laode/dfield5.m>

Huomaa, että `dfield5`-funktion käyttö ei vaadi mitään muuta Matlab-taitoa  
kuin käynnistyksen ja polun asettamisen niin, että Matlab löytää `dfield5.m:n`.

Viikolla 37 emme voi pitää ylimääräistä Matlab-harjoitusta, koska salit ovat  
Lapio-kurssien käytössä. Opiskelkaapa siis kotona, tarkoitusta varten olen kir-  
joitellut tekstiä <http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/opas/>. (Osa  
1 alkaa olla aika valmis ja osa osasta 2). Odotan Matlab-kysymyksiä erityisesti  
viikon 37 aikana, teen [www](http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/laode/dfield5.m)-sivulle koosteen Q&A (tai FAQ).

Varaamme osan to-pe 20-21.9. harjoituksista neuvottuun Matlab (ja miksei  
vähän Maplekin)-harjoitteluun. (Siksi vain 4 tehtävää pe.)

#### Alkuviikko (AV)

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö sijoittamalla ratkaisuehdotus (RE) annet-  
tuun yhtälöön tai esim. integroimalla, arvaamalla tms.:

(a)  $y' + y = x^2 - 2$ , RE:  $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x$     (b)  $y'' + y = 0$ , RE:  
 $y = a \cos x + b \sin x$     (c)  $y''' = e^x$ ,    (d)  $x + yy' = 0$ , RE:  $x^2 + y^2 = C$   
( $C > 0$ , vakio).

Vihje (d)-kohtaan: Derivoi implisiittisesti, ts. oletta, että on olemassa de-  
rivoituva funktio  $x \mapsto y(x)$  s.e.  $x^2 + y(x) = C$  ja derivoi puolittain. (Tässä  
tapauksessa olemassaolo tiedetään, onhan  $y(x) = \sqrt{C - x^2}$  tällainen.

Tämän eksplisiittisen lausekkeen käyttö ei silti kannata, se vain mutkistaa  
asioita, olkaamme siis implisiittisiä.)

2. Lisääntymiskykyinen populaatio, jonka lisääntymistä rajoittavia tekijöitä  
ei ole, noudattaa yleensä likimain *Malthus'n* lakia, ts. nykyhetkellä kasvu-  
nopeus on verrannollinen populaation nykykokoon.

Muodosta ilmiölle differentiaaliyhtälömalli ja ratkaise.

Ratkaisussa esiintyy vakiot  $y_0 =$  populaation koko alkuhetkellä ja  $k =$   
”lisääntymiskykyvakio”.

Täydennämme vanhaa tuttua USA:n väkilukutaulukkoa arvoilla, jossa toi-  
nen rivi ilmaisee väkiluvun miljoonissa.

1800	1830	1860	1890	1920	1950	1980
5.3	13	31	63	106	150	230

Ota ajan 0-hetkeksi vuosi 1800 ja määritä  $y_0$  ja  $k$  kahden ensimmäisen  
sarakkeen perusteella. Miten hyvin malli vastaa todellisuutta?

3. Tätä tehtävää harjoitellaan Matlab-tekniisesti loppuviikon harjoituksissa.  
Osattava esittää (ke 19.9.) liitutaululla käsin piirtäen periaatteessa.

Tarkastellaan diffyhtälöä  $y' = y - x$  alueessa  $-1 \leq x \leq 1$ ,

Piirrä  $xy$ -koordinaatistoon suuntakenttä ja isokliinejä käsin ja kokeile  
myös Matlabia laskimen roolissa. Ota hilaväliksi aluksi vaikka  $h = 0.5$ .

Matlab-laskussa kannattaa muodostaa matriisi, sanokaamme  $K$ , jonka al-  
kioina ovat arvot  $y_i - x_j$ ,  $i = 1 \dots 5, j = 1 \dots 5$  tähän tapaan:

```
h=0.5; t=-1:h:1;x=0:h:2
for i=1:5
    for j=1:5
        K(i,j)=y(i)-x(j)
    end
end
```

Koska matriisissa rivi-indeksi  $i$  juoksee alaspäin, on helpompaa sijoittaa  
arvot koordinaatistoon kääntämällä matriisin sarakkeet ylösalaisin; tämä  
tapahtuu komennolla `flipud`.

Katso siis matriisista `flipud(K)` arvot ja merkitse ne kynällä piirroksen.  
Tarkista käsin (tai ”skalaarilaskimella”(Matlabkin käy)) muutama alkio  
ainakin.

(Hilan tihentäminen käy nyt helposti muuttamalla vain yllä  $h$ :ta.)



Ratkaise alkuarvotehtävä  $x' = \frac{x}{2} - e^{-t}$ ,  $x(0) = -1$ . Kyseessä on *lineaarinen epähomogeeninen* (EHY). Tämä lasku ei edellytä mitään uutta muuttujien erottelun lisäksi (ainoastaan uskomista), kaikki on tässä neuvottu.

Suorita ratkaisu näin:

- Ratkaise ensin vastaava (HY)  $x' = \frac{x}{2}$  (yleinen ratkaisu).
- Yritä keksiä jokin (EHY):n erityisratkaisu (siis mikä tahansa (EHY):n toteuttava). Keksiminen on helppoa, kun mietit exp-funktion derivointia. (Määräämätön kerroin ratkaistaan sijoittamalla yrite (EHY):yn).

Lineaaristen teoria sanoo, että (EHY):n yleinen = (HY):n yleinen + (EHY):n erikoinen.

Piirrä myös suuntakenttä ja ratkaisukäyriä (joko `dfield5` tai `suuntak`). Miten näet suuntakenttää, että yhtälö ei ole autonominen?

4. Ratkaise edellinen tehtävä integroivan tekijän menettelyllä.

## Matlab-avustusta

Kaikki Matlab-tiedostot sijoitetaan sekä kurssin `www-matlab-hakemistoon` `./matlab` että hakemistoon `/p/edu/mat-1.414/matlab/`. Jälkimmäiset saadaan Matlab-istunnossa käyttöön antamalla Matlab-komento `addpath /p/edu/mat-1.414/matlab/`. Tämä kannattaa sijoittaa omaan `$home/matlab/startup.m` -tiedostoon.

```
% Matlab-skripti: ../3/01/matlab/suuntak1.m
% Kts. myös exasuuntak.m
% HA 4.9.2001
%
% Aihe: Diffyhtälön  $y'=f(x,y)$  suuntakenttä ja isokliinit.
%
% Havainnollinen versio, jossa jananpätkät piirretään for-
% silmukassa. Oikeaoppisempi tehoversio: suuntak.m
%
clf
f=inline('y-x','x','y') % f(x,y)=y-x
```

```
%f=inline('x.*y','x','y') % Toinen esimerkki: f(x,y)=xy

h=0.5;a=-1;b=1;c=0;d=2; % Muuta tarpeen mukaan
x=a:h:b;y=c:h:d;

[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);

flipud(Z) % havainnollistukseen, tosi käytössä kommentti.

plot(X(:),Y(:),'x') % Jos haluat merkitä ristillä pisteet, joissa
% derivaatta-arvot on laskettu, poista kommentti

hold on
xx=X(:); yy=Y(:); n=length(xx);
for i=1:n
    v=[1,f(xx(i),yy(i))];v=0.5*h*v/norm(v);
    alkup=[xx(i),yy(i)]-v;loppup=[xx(i),yy(i)]+v;
    plot([alkup(1),loppup(1)],[alkup(2),loppup(2)])
end;

% Jos haluat vain suuntakentän, lopeta tähän.
%
% Piirretään edellä olevia korkeusarvoja vastaavat isokliinit.

x=linspace(a,b,30);y=linspace(c,d,30);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
ZZ=f(X,Y);
contour(x,y,ZZ,Z(:)) % Korkeusvektoriksi valitaan Z(:), tällöin
axis equal % saadaan kaikki suuntakenttäpiirroksen arvot,
axis([a,b,c,d]) % ovelaa!
grid
title('y'=f(x,y)') % Jos haluat oikean otsikon, editoi tähän
shg
```

