Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3, s 2000

Apiola

3. välikoe 14.12. 2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) Nimi kokonaisuudessaan, opiskelijanumero+kirjain,
3) koulutusohjelma
4) nimikirjoitus.

1. Muodosta funktion $f(t) = |\sin t|$ Fourier-sarja. Piirrä f:n kuvaaja välillä $[-\pi, \pi]$ ja hahmottele sarjan osasumman s_1 kuvaaja samalla välillä. Osasumma s_1 koostuu termeistä, joiden indeksit ovat $-1, 0, 1$, kun käytetään kompleksista esitysmuotoa.

   Evästykseksi:

   - Laskutyön voi minimoida käyttämällä kompleksimuotoista esitystä. Kannattaa myös miettiä, mikä on funktion jakso.
   - Hahmottelua varten riittää laskea osasumman arvot vaikkapa pisteissä $t = 0$ ja $t = \pi/2$ ja hyödyntää jaksollisuutta.)

2. **Huom!** Tämä tehtävä ei sisällä varsinaisesti yhtään laskentaa, älä tuhlaa aikaasi integrointitekniikkaan.

   Olkoon $f(t) = t$, kun $t \in [0, 1]$.

   a) Piirrä f:n parillisen laajennuksen f_e ja parittoman laajennuksen f_o jaksolliset laajennukset (jaksona 2) välillä $[-2, 2]$. (Alaindeksit e ja o viittavat sanoihin “even” ja “odd”.)

   b) Mitä termejä esiintyy f_e:n ja f_o:n reaalimuotoisissa Fourier-sarjoissa ? Perustelu parillisuus/parittomuus-päättelyllä.

   c) Selvitä kummankin sarjan suppeneminen: Missä pisteissä sarja suppenee kohti funktion arvoa ja missä (jos missään) jotain muuta ja mitä silloin?

   d) Selvitä, mitä tarkoittaa *Gibbsin ilmiö*, ja esiintyykö se jommassa kummassa (tai mahd. molemmissa) tapauksissa jossain kohdassa.

3. a) Laske $\mathcal{F}\chi_{[0,T]}$ Voit käyttää hyväksesi t-siirtolausetta ja yhteyttä $\chi_{[0,T]}(t) = \chi_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}(t - \frac{T}{2})$ sekä alla annettua F-muunnoskaavaa.

   b) Laske “ikkunoidun” kosinifunktion $f(t) = \chi_{[0,T]} \cos \omega_0 t$ Fourier-muunnos.

4. Jonon (g_n) diskreetti Fourier-muunnos määritellään kaavalla

   $$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_{kn} g_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

   missä $a_{kn} = e^{-i2\pi kn/N}$.

   Merkitään $A = (a_{kn})_{k,n=0}^{N-1}$. Osoita, että $A\overline{A} = NI$, missä $\overline{A}$ tarkoittaa konjugoitua matriisia $(\overline{a}_{kn})$ ja I on $N \times N$ yksikkömatriisi.

   Tämän perusteella saat A^{-1}:n , jonka avulla saat käänteismuunnoskaavan. Kirjoitapa se!

   Vihje: Kirjoita matriisitulon alkio $(A\overline{A})_{nk}$ ja erittele tapaukset $n = k$ (päälävistäjä) ja $n \neq k$. Jälkimmäisessä voit menestyksellä hyödyntää geometrisen jonon summan kaavaa. (Jos et muista, niin osaathan johtaa sen käden käänteessä: merkitään $s_N = 1 + q + q^2 + \ldots q^{N-1}$, $qs_N = \ldots$.) Luennolla esiintyi matriisi A^H, mutta transponointi on selvästi tarpeetonta.

   (Kaavoja kääntöpuolella)

Fourier-kaavoja

T-jaksoisen funktion Fourier-sarja

Reaalimuoto Olkoon f T-jaksoinen reaalifunktio, missä $T = \frac{2\pi}{\omega}$. f:n Fourier-sarjaesitys:
$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$, missä

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin n\omega t dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Kompleksimuoto $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$, missä

$$c_n = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Fourier–muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{F}f = F$, $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$.
Käänteismuunnoskaava: $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$.

Siirtolauseet Olkoon $\mathcal{F}f = F$.

t-siirto : $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-i\omega a}F(\omega)$
ω-siirto : $\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}f(t)\} = F(\omega - \omega_0)$

Eräitä funktioita ja Fourier-muunnoksia $\chi_{[a,b]}$ tarkoittaa välin $[a, b]$ karakteristista funktiota, eli $\chi_{[a,b]}(t) = H(t-a) - H(t-b)$, missä H on *Heavisiden funktio.*

$$sinc(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, t \neq 0 \\ 1, t = 0 \end{cases}$$

(Huom: Ei vakiintunut, kirjallisuudessa esiintyy modifioituja muotoja.)

$\mathcal{F}\chi_{[-T,T]} = \omega \mapsto 2T sinc(\omega T)$.

Yleishyödyllisä kaavoja *Eulerin kaava* (eräs monista):

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Ratkaisuja

Tehtävien 1 ja 2 ratkaisut: `../KOE/ratk3vkteht1_2.mws`

Teht. 3 a)

Merk. $g(t) = \chi_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}$, $f(t) = \chi_{[0,T]}(t)$, jolloin $f(t) = g(t - \frac{T}{2})$.

t-siirto : $\mathcal{F}f = \mathcal{F}\{g(t - \frac{T}{2})\} = e^{-i\omega\frac{T}{2}}G(\omega)$, missä

$G(\omega) = (\mathcal{F}g)(\omega) = T sinc(\frac{\omega t}{2})$.

Siis: $\mathcal{F}f = \omega \mapsto Te^{-i\omega\frac{T}{2}} sinc(\frac{\omega T}{2})$

Voidaan kirjoittaa monenlaisiin muotoihin käytämällä Eulerin kaavaa, sinc:n määritelmää ym, mutta tästä eivät muodot varmasti lyhene.

b)

Merkitään nyt g:llä a)-kohdan f:ää, eli $g = \chi_{[0,T]}$. Siis $G = \mathcal{F}g = \omega \mapsto Te^{-i\omega\frac{T}{2}} sinc(\frac{\omega T}{2})$.

Tehtävänä on Fourier-muuntaa $f(t) = g(t)\cos(\omega_0 t)$.

Kirjoitetaan $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$, jolloin $f(t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} g(t) + e^{-i\omega_0 t} g(t))$.

ω-siirto : $\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} g(t)\} = G(\omega - \omega_0)$, joten

$F(\omega) = (\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{2}(G(\omega - \omega_0) + G(\omega + \omega_0)) = \frac{1}{2}(T[e^{-i\omega\frac{T}{2}} sinc(\frac{\omega T}{2})]_{\omega \to \omega - \omega_0}) + T[e^{-i\omega\frac{T}{2}} sinc(\frac{\omega T}{2})]_{\omega \to \omega + \omega_0}) = \ldots = \frac{T}{2} e^{-i\omega\frac{T}{2}} (e^{i\omega_0 \frac{T}{2}} sinc(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2}) + e^{-i\omega_0 \frac{T}{2}} sinc(\frac{(\omega + \omega_0)T}{2}))$.

Teht. 4 Ratkaisu on luentoprujuissa.