Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3, s 2000

Apiola

2. välikoe 13.11. 2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) Nimi kokonaisuudessaan, opiskelijanumero+kirjain,
3) koulutusohjelma
4) nimikirjoitus.

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

   (a) Osoita induktiolla, että $A^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$.

   (b) Määritä e^{At}.

   (c) Ratkaise alkuarvotehtävä $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = [1, 2]$

2. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä

$$x'' + 2x' + (1+\pi^2)x = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$$

   $x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$

3. (a) Laske määritelmän perusteella vakiojonon $x_k = 1, k \ge 0$ z-muunnos ja sen ja sopivien kertosääntöjen avulla (ei siis taulukosta katsomalla) $\mathcal{Z}\{2^k\}$ $\mathcal{Z}\{k2^k\}$ ja $\mathcal{Z}\{k^2 2^k\}$ (Kertosäännöt löytyvät tehtäväpaperista.)

   (b) Laske funktioiden X_1 ja X_2 käänteismuunnokset, kun $X_1(z) = \frac{3z+z^2+5z^5}{z^5}$ ja $X_2(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2}$

4. Ratkaise differenssiyhtälö $y_{k+2} + 4y_k = \delta$, $y_0 = 1, y_1 = 2$, missä δ on yksikköimpulssi: $\delta_0 = 1, \delta_k = 0$, kun $k > 0$. Saata ratkaisu muotoon, josta näkyy että kyseessä on reaalilukujono.

Laplace–muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio, eli *Heavisiden funktio* .

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$

$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \;\; \mathcal{L}(f*g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \;\; \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \;\; \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Z-muunnokset

Määritelmä: Annettu jono (x_k), $\mathcal{Z}\{x_k\} = X$, $X(z) = \ldots$ (enpäs kerro)

(x_k)	$X(z)$	(x_k)	$X(z)$	(x_k)	$X(z)$	(x_k)	$X(z)$
(a^k)	$\frac{z}{z-a}$	(ka^{k-1})	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\cos k\omega T$	$\frac{(z-\cos(\omega T))z}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$	$\sin k\omega T$	$\frac{\sin(\omega T)z}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$

$\mathcal{Z}\{x_{k-k_0}\} = z^{-k_0}\mathcal{Z}\{x_k\}, \quad \mathcal{Z}\{x_{k+1}\} = z\mathcal{Z}\{x_k\} - zx_0,$
$\mathcal{Z}\{a^kx_k\} = X(a^{-1}z), \quad \mathcal{Z}\{k^nx_k\} = (-z\frac{d}{dz})^nX(z), \;\; \lim_{x\to\infty} X(z) = x_0$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) \le deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s-a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{x-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä s^2+bx+c, tulee kehitelmään termi $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa.