Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3, s 2000

Apiola

1. välikoe 16.10. 2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) Nimi kokonaisuudessaan, opiskelijanumero+kirjain,
3) koulutusohjelma
4) nimikirjoitus.

1. Tarkastellaan lineaarista yhtälösysteemiä $Ax = b$, missä A on 3×4 matriisi. Oletetaan, että A ei ole nollamatriisi.

   a) Selvitä eri mahdollisuudet, joita on ratkaisujen olemassaolon ja ratkaisuavaruuden dimension (vapaasti valittavien parametrien lukumäärän) suhteen. Ilmoita myös kerroinmatriisin rangi $r(A)$ kussakin tapauksessa.

   Esitä perustelusi tueksi kussakin tapauksessa Gaussin eliminaatiolla saatava liitannäismatriisin ("augmented matrix") $[\tilde{A}, \tilde{b}]$ muoto, jossa on tehty sarakepermutaatiot yksinkertaiseen perusmuotoon saattamiseksi. (voit käyttää joko "row echelon" tai "reduced row echelon") muotoa.

   Käytä esitystä, jossa matriisin alkioina ovat symbolit $0, 1, \times$, missä 0 tarkoittaa lukua 0, 1 tarkoittaa $\neq 0$, $\times$ tarkoittaa jompaa kumpaa (ts. "ei vaikuta asiaan").

   b) Mikä on johtopäätös erityisesti homogeeniyhtälön tapauksessa ja miten siitä seuraa, että $\mathbb{R}^3$:n jokainen neljän vektorin joukko on lineaarisesti riippuva.

2. Laske A^{1999}, kun
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Ratkaisutavastasi riippuen voit saada pienen laskutyöavun seuraavista Maple-riveistä:

```
> A:=matrix([[a,b],[c,d]]): AId:=augment(A,diag(1,1));
> rref:=gaussjord(AId);
```

$$AId := \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{bmatrix} \; rref := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{d}{da-cb} & -\frac{b}{da-cb} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{da-cb} & \frac{a}{da-cb} \end{bmatrix}$$

3. Olkoon $n \times n$-matriisilla A reaalinen ominaisarvo λ, jonka algebrallinen kertaluku (karakteristisen polynomin juuren kertaluku) on 2 ja geometrinen kertaluku (ominaisavaruuden dimensio) on 1. Olkoon $\mathbf{v}$ tätä ominaisarvoa vastaava ominaisvektori.

   Tarkastellaan homogeenista differentiaaliyhtälösysteemiä
   (HY) $\quad \mathbf{x}' = A\mathbf{x}$

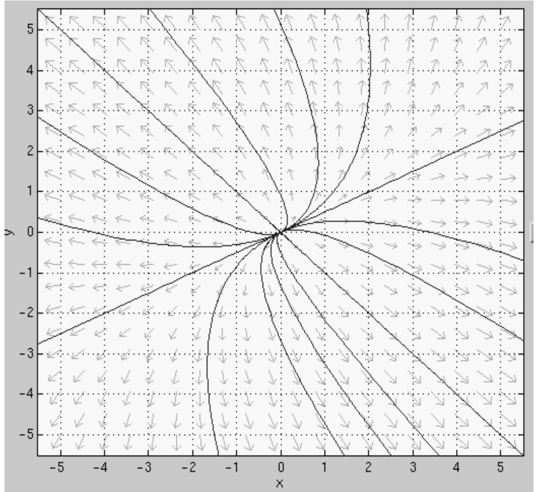
   (a) Muodosta luonnollinen ratkaisuyrite (joka toimii riippumatta kertaluvuista) ja osoita, että se on systeemin ratkaisu, merkitään sitä $\mathbf{x}^{(1)}$:llä.

   (b) Toisen, lineaarisesti riippumattoman ratkaisun etsimisyritteeksi kannattaa ottaa muotoa $\mathbf{x}^{(2)} = t\mathbf{x}^{(1)} + e^{\lambda t}\mathbf{u}$ oleva funktio. Johda vektoria $\mathbf{u}$ koskeva ehto, jolla tämä funktio on (HY):n ratkaisu.

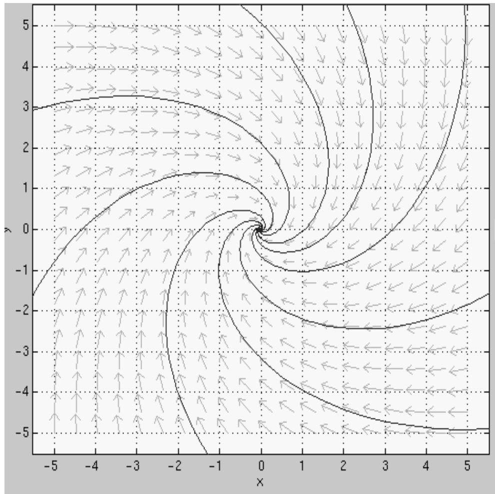
   (c) Määritä (HY):n yleinen ratkaisu, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

4. Syvenny systeemin $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ faasitasokuviin 1 – 4 alla. Selvitä kunkin kuvan kohdalla seuraavat asiat:

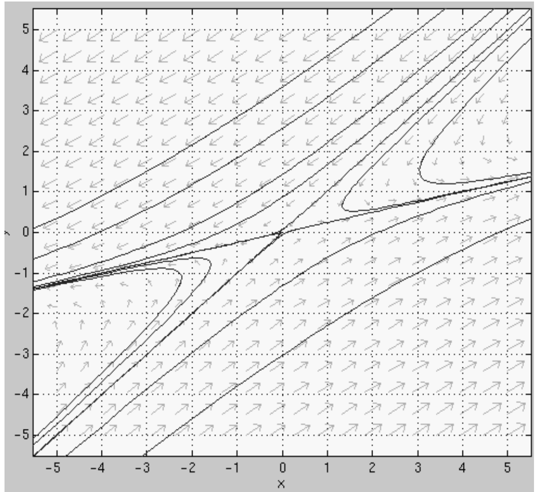
   - Ominaisarvojen reaalisuus ja myönteisessä tapauksessa saman-/erimerkkisyys.
   - Kompleksisten ominaisarvojen tapauksessa reaaliosan nollasta erillisyys ja myönteisessä tapauksessa merkki
   - Ominaisvektorit (likimäärin) reaalisissa tapauksissa.
   - Yleisen ratkaisun muoto lausuttuna ominaisarvojen ja -vektoreiden (mahd. Re- ja Im-osien) avulla. (Kompleksitapauksissa pienet muotovirheet eivät haittaa, kuten cos- ja sin- termien merkit.)
   - Origon stabiilisuus. (Käytä termiä "heikosti stabiili", jos kukin trajektori on (vain) rajoitettu).



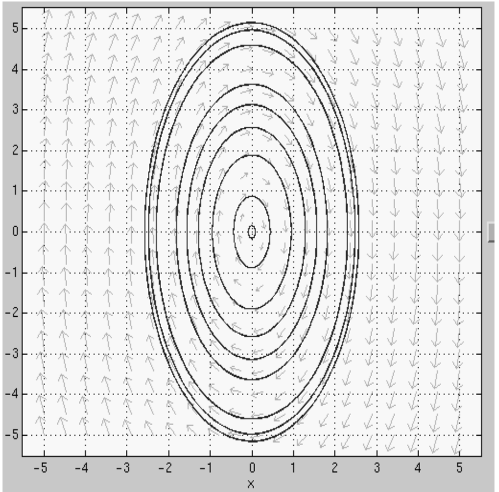
Kuva 1:



Kuva 3:



Kuva 2:



Kuva 4: