Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2, kevät 2001

Apiola

3. välikoe 7.5. 2001

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

Palaute: Olen saanut (`Fri May 4 17:37:57`) 11 vastausta, kiitos niistä! Paljon hyödyllistä ja varteenotettavaa on tullut esille. Odotan saavani kaikilta muiltakin. Suositus: heti kokeen päätyttyä!

1. Muodosta kaksi askelta funktion $f(x,y) = 4x^2 - 4\,xy + 2\,y^2$ minimoimiseksi jyrkimmän laskeuman ("steepest descent") menetelmällä eli gradienttimenetelmällä, lähtien alkupisteestä $p_0 = (1,1)$. Piirrä optimointireitti p_0, p_1, p_2. Muodosta näiden pisteiden kautta kulkevien korkeuskäyrien yhtälöt ($f(x,y) = vakio$, tämä implisiittinen muoto riittää, tällöinhän voisit piirtää `implicitplot`:lla). Miten reittiviivojen suunnat suhtautuvat korkeuskäyrien suuntiin pisteissä p_0, p_1, p_2 ?

   Huom! Tarkoitus on tehdä aivan perusmenetelmä, ilman mitään Harj. 10 teht. 2- tyylisiä interpolaatiolisäyksiä.

2. Tarkastellaan kappaletta, joka on xy-tason yläpuolella ja paraboloidin $z = 1 - x^2 - y^2$ alapuolella ja jota rajoittavat ehdot $-x \le y \le \sqrt{3}x \quad (x \ge 0)$.

   Oletetaan, että kappaleen tiheys $\rho(x,y,z) = axz$, missä a on vakio. Laske kappaleen massa.

Kuva 1: Asteroidi, teht. 4

3. Laske
$$\int_C (2xyz^2 dx + (x^2z^2 + z\cos yz)dy + (2x^2yz + y\cos yz)dz),$$
   missä C on polku pisteestä $(0,0,1)$ pisteeseen $(1,\pi/4,2)$. Suorita lasku määrittämällä ensin ao. vektorikentän potentiaali.

4. Määritä käyräintegraalin avulla pinta-ala kuvassa olevalle asteroidialueelle, jota rajoittaa käyrä $\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\mathbf{i} + b\sin^3 t\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

   Muista, että integrointi muuttuu usein hyvin helpoksi siirryttäessä kaksinkertaisen kulman trigonometrisiin funktioihin.

Pari hassua kaavaa

$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA$

$\sin 2t = 2\sin t\cos t$, $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$