

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2, kevät 2001

Apiola

1. välikoe 26.2. 2001

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

1. Olkoon $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Johda n:n juuren määritelmään perustuen kaavat kaikkien $\sqrt[n]{z}$ -arvojen laskemiseksi kompleksitasossa.
2. (a) Muodosta Newtonin menetelmän mukainen iteraatioalgoritmi annetun reaaliarvon $c > 0$ positiivisen n:n juuren $\sqrt[n]{c}$ määrittämiseksi.
Seuraavissa kohdissa (b) ja (c) voit (turvallisuudentunnesyistä) ottaa $n = 2$, vaikka mitään olennaista eroa yleiseen n :ään ei olekaan.
(b) Osoita kiintopistelauseen avulla, että iteraatio suppenee kaikilla alkupisteen x_0 valinnoilla, jotka toteuttavat ehdon: $x_0 \geq \sqrt{c}$. (Tarkastele väliä $[\sqrt{c}, b]$, missä $b > \sqrt{c}$ on mielivaltainen, ja totea kiintopistelauseen ehdot.)
(c) Osoita, että iteraatio suppenee myös arvoilla $0 < x_0 < \sqrt{c}$. (Tarkkaile iterointifunktion minimiä, niin pääset käyttämään (b)-kohdan tulosta.)
3. (a) Muodosta polynomi, joka interpoloi funktiota $f(x) = \sin x + \cos x$ pisteissä $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 1$. Huom: Polynomia ei tarvitse kertoa auki.
(b) Arvioi jäännöstermin avulla yläraja virheen itseisarvolle välillä $[0, 1]$. Voit hyödyntää Maple-istuntoa:

```
> xd:=[0,0.25,0.5,1.0]:  
> tulo:=product((x-xd[k]),k=1..4);
```

$$x(x-0.25)(x-0.5)(x-1.0)$$

```
> dtulo:=diff(tulo,x);
```

$$(x-0.25)(x-0.5)(x-1.0) + x(x-0.5)(x-1.0) + x(x-0.25)(x-1.0) + x(x-0.25)(x-0.5)$$

```
> factor(dtulo);
```

$$4.0(x-0.09818699528)(x-0.3827266389)(x-0.8315863658)$$

4. Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.
(a) Määrittele käsitteet suppenemissäde ja suppenemiskiekk.
(b) Oletetaan, että on olemassa

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Osoita suhdetestin avulla, että suppenemissäde $R = q$. Riittää tarkastella tapausta $0 < q < \infty$.

(c) Anna kolme esimerkkiä potenssisarjoista, jotka osoittavat, että potenssisarja voi

- supeta itseisesti koko suppenemisympyrällä $|z - z_0| = R$
- supeta itseisesti jossain suppenemisympyrän pisteessä ja ehdollisesti jossain toisessa.
- hajaantua koko suppenemisympyrällä.