Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2, kevät 2001

Apiola

Harj. 8av, teht. 5, ratk.

Tehtävä

Määritä ja luokittele kriittiset pisteet funktiolle

$$f(x,y) = x^2 y e^{-(x^2+y^2)}$$

Selvitä myös globaalien ääriarvojen tilanne koko $\mathbb{R}^2$:ssa.

Voit käyttää laskutyön vähentämiseksi Maple-istunnon tuloksia:

```
> restart: with(linalg):
> f:=x^2*y*exp(-x^2-y^2):
> grad(f,[x,y]):map(l->collect(l,exp(-x^2-y^2)),%);
```

$$[\left(2\,xy - 2\,x^3 y\right) e^{-x^2-y^2}, \left(x^2 - 2\,x^2 y^2\right) e^{-x^2-y^2}]$$

```
> H:=hessian(f,[x,y]);map(l->collect(l,exp(-x^2-y^2)),%):
```

$$\begin{bmatrix} \left(2\,y - 10\,x^2 y + 4\,x^4 y\right) e^{-x^2-y^2} & \left(2\,x - 2\,x^3 - 4\,xy^2 + 4\,x^3 y^2\right) e^{-x^2-y^2} \\ \left(2\,x - 2\,x^3 - 4\,xy^2 + 4\,x^3 y^2\right) e^{-x^2-y^2} & \left(-6\,x^2 y + 4\,x^2 y^3\right) e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left(2\,y - 10\,x^2 y + 4\,x^4 y\right) e^{-x^2-y^2} & \left(2\,x - 2\,x^3 - 4\,xy^2 + 4\,x^3 y^2\right) e^{-x^2-y^2} \\ \left(2\,x - 2\,x^3 - 4\,xy^2 + 4\,x^3 y^2\right) e^{-x^2-y^2} & \left(-6\,x^2 y + 4\,x^2 y^3\right) e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

Ratkaisu

Kriittiset pisteet (KRP)

KRP:t: $\nabla f = \mathbf{0} \iff$

$$\begin{cases} xy(1-x^2) = 0 \\ x^2(1-2y^2) = 0 \end{cases}$$

Eka $\iff$ $x = 0$ tai $y = 0$ tai $x = \pm 1$

a) $x = 0$ toteuttaa myös tokan riippumatta y:stä. Siis $(0, y)$ on KRP, ts. **kaikki y-akselin pisteet ovat kriittisiä pisteitä**.

b) $y = 0$ ei toteuta tokaa (ellei $x = 0$), joten siitä ei aiheudu mitään uutta.

c) $x = \pm 1 \implies y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (kaikki merkkikombinaatiot).

$$\boxed{\text{Siis } \textbf{KRP:t} \text{ ovat } (0,y), y \in \mathbb{R}, (1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), (-1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), (-1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), (-1, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})}$$

Ääriarvot, satulapisteet

a) y-akseli, eli $(0, y), y \in \mathbb{R}$. $f(0, y) = 0$.

- Jos $y > 0$, niin $f(x,y) > 0$ pisteen $(0,y)$ ympäristössä, jonka säde on korkeintaan y. Siis pisteet $(0,y), y > 0$ ovat **minimejä** (minimilaakso).
- Jos $y < 0$, niin $f(x,y) < 0$ pisteen $(0,y)$ ympäristössä, jonka säde on korkeintaan y. Siis pisteet $(0,y), y < 0$ ovat **maksimeja** (maxharjanne).
- Jos $y = 0$, eli pisteessä $(0,0)$ f:n arvo on edelleen 0, yläpuolitasossa $f > 0$ ja alapuolitasossa $f < 0$. Siten jokaisessa $(0,0)$:n ystössä f saa sekä pienempiä että suurempia arvoja kuin $(0,0)$:ssa. Kyseessä on **satulapiste (ei ääriarvo)**.

b)

$$H((\pm 1, \frac{1}{\sqrt{2}})) = -2\sqrt{2}e^{-3/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H((1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})) = 2\sqrt{2}e^{-3/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Edellisessä tapauksessa (yläpuolitasossa) H on negatiivsesti definiitti ja jälkimmäisessä (alapuolitasossa) positiivisesti definiitti suoraan definiittisyyden määritelmän nojalla. (Tietysti ominaisarvot ovat edellisessä tapauksessa negatiiviset ja jälkimmäisessä positiiviset, mutta kun matriisit on jo diagonalisoitu, ei tarvitse edes ajatella ominaisarvoja.)

Oli miten oli, neg. def. merkitsee maksimia ja pos. def. minimiä, joten **yläpuolitason pisteet** $(\pm 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ovat **maksimeja** ja **alapuolitason pisteet** $(\pm 1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ovat **minimejä**.

Globaalit ääriarvot

Koska $f(x,y) \to 0$, kun $\|(x,y)\| \to \infty$, niin riittävän suuren neliön ulkopuolella $|f| < |f(\pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})|$. Jatkuva funktio suljetussa rajoitetussa neliössä saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa, mutta tämän neliönpä valitsimme niin, ettei se reunalla kumpaakaan saavuta. Siten ainoat mahdollisuudet ovat sisäpisteet, joissa gradientin on oltava 0 (koska singulaaripisteitä ei ole). Niinpä edellä mainitut lokaalit maksimit $(\pm 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ovat myös globaaleja maksimeja ja lokaalit minimit $(\pm 1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ovat globaaleja minimejä.