

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001

<http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/>

Laskuharjoitus 7 (viikko 11 , 12–16.3.01)

Loppuviikko, pe 16.3.

Joitakin Maple-ohjeita on työarkeilla .../L/ominaisarvot.mws ja ehkä myös .../H/harj7ohje.mws

1. Matriisilla $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ kertominen kiertää tason vektoreita kulmalla θ . Mieti ensin geometriselta kannalta, voiko tällä olla reaalisia ominaisarvoja jollain/millään θ :lla.

Laske sitten ominaisarvot ja -vektorit.

2. Määritä seuraavien matriisien ominaisarvot ja -vektorit. Määritä kunkin ominaisarvon algebrallinen ja geometrinen kertaluku.

(Algebrallinen kertaluku=juuren kertaluku, geom kl=ominaisavaruuden dim)

Mitkä matriisit ovat defektiivisiä ($m_\lambda < M_\lambda$)? Missä tapauksessa ominaisvektoreista saadaan koko \mathbb{R}^3 :n kanta ja missä jopa ortonormaali? (Matriisin M ortogonaalisuuden tarkistaminen käy kätevästi komennoilla `A.Transpose(A); map(simplify,%);`) Huomaa, että kukaan ei automaattisesti normeeraa ominaisvektoreita puolestasi.

Laske yksi kohta käsinlaskutyyliä Maplella simuloiden (vrt. ominaisarvot.mws) ja tarkista ominaisarvon/-vektorin määritelmän mukaan.

Loput voit tehdä suoraan `eigenvectors`:lla tai `Eigenvectors`:lla. (Kokeile molempia)

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 6 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & -6 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{bmatrix} 109 & 87 & 81 \\ 87 & 73 & 63 \\ 81 & 63 & 61 \end{bmatrix}$$

3. Määritä seuraavien lineaarikuvausten matriisit. Mieti kunkin kohdalla ominaisarvoja ja -vektoreita mieluusti ensin geometrisesti ja laske sitten. Visualisoi (\mathbb{R}^2 -kuvauksia) ominaisarvot.mws-tavoilla.

(a) \mathbb{R}^2 , Heijastus x-akselin suhteen (b) \mathbb{R}^2 , Kierro kulman $\pi/2$ verran
(c) \mathbb{R}^n , venytys kertoimella 4 (d) \mathbb{R}^2 , ortogonaalinen projektio y-akselille
(e) \mathbb{R}^3 , ortogonaalinen projektio tasolle $y = x$

(Voi hyvin tehdä pareittain.)

4. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Kyseessä on ns. stokastinen matriisi, joka esittää *Markov-prosessin* siirtymätodennäköisyyksiä. (Sarakesummat ovat = 1 ja alkiot $\in [0, 1]$)

Lähde liikkeelle jostain \mathbb{R}^3 :n vektorista u_0 (esim. $(1, 2, 3)$) ja iteroi tyyliin `u0:=<1,2,3>;u:=u0;u:=A.u;`

Laske A:n ominaisarvot ja -vektorit ja lausu alkupistevektori u_0 ominaisvektorikannan avulla. Mitä rajavektoria lähestyy iteraatiojono $A^n u_0$?

5. Määritä seuraavien neliömuotojen matriisit sekä definiittisyys:

(a) $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2$ (b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
(c) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_4^2 - 4x_2x_3$

Esitä neliömuodot pääakselikoordinaateissa.

6. Mitä kartioleikkausta esittää yhtälö $x_1^2 + 24x_1x_2 - 6x_2^2 = 5$ Muunna yhtälö pääakselimuotoon ja piirrä kuva.

(Kts. ominaisarvot.mws tai harj7ohje.mws)

Muista: Hyperbelin luonteva parametriesitys on $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$ (jos sitä sattuisit kaipaamaan).