

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001

<http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/>

Laskuharjoitus 6 (viikko 10 , 5–9.3.01)

Loppuviikko, pe 9.3.

Joitakin Maple-ohjeita on työarkilla `.../H/harj6ohje.mws` (joka tulee tiistain kuluessa).

1. Oletetaan, että sähkökentän voimakkuus E riippuu paikasta ja ajasta jatkuvasti osittaisderivoituvan funktion $E = f(x, y, z, t)$ mukaan.

Määritä ruuviviivaa $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ pitkin liikkuvan mittalaitteen mittaaman sähkökentän voimakkuuden muutosnopeus ajan funktiona.

2. (a) Muunna derivaattalauseke

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

napakoordinaatteihin. Tehtävä on helpompi suorittaa ”oikealta vasemmalta”, siksi annetaan tulos ja sopiva notaatio.

Merk. $\tilde{u}(r, \Theta) = u(r \cos \Theta, r \sin \Theta)$. Paljastamme nyt tuloksen, jonka oikeaksi osoittaminen jää tehtäväksesi. (Suomalaista ei kannata uskoa, ennekuin itse näkee.)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \Theta}\right)^2$$

(b) Kokeile Maplalla. Maple osaa ketjusäännön ja soveltaa sitä määrittelemättömään funktioon, tässä u . Sopivaa on aloittaa näin:

```
> U:=u(r*cos(Theta),r*sin(Theta));  
> Diff(U,r)^2+Diff(U,Theta)^2/r^2; # Tarkistus, kirjoitinko oikein.  
# Vaihda isot D:t pieniksi  
> simplify(%);  
> subs(r*cos(Theta)=x,r*sin(Theta)=y,%);
```

Tässäpä ei juuri muuta, kuin seuraat ohjetta, mutta muista ihastella.

3. Muunna samalla tekniikalla Laplace'n yhtälö

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

napakoordinaatteihin. Käsityön suhteen riittää, kun panet homman alkuun ja sitten vain annat Maplen hoitaa likaisen työn. Menee samoilla komennoilla kuin (b)-kohta, kunhan taas oikea puoli annetaan:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r \cos(\Theta), r \sin(\Theta)) + \frac{\frac{\partial}{\partial r} u(r \cos(\Theta), r \sin(\Theta))}{r} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} u(r \cos(\Theta), r \sin(\Theta))}{r^2}$$

(Maplalla generoitua L^AT_EX:ia, kannattaa kirjoittaa samaan tyyliin kuin edellä.)

4. Maaston korkeus (merenpinnasta mitattuna) karttakoordinaattien funktiona olkoon $h(x, y) = -x^2 + 4xy - 8y^2 + 300$. Positiivinen x-akseli osoittaa itään ja positiivinen y-akseli pohjoiseen. Kulkuri K ottaa pisteestä $(1, 2, h(1, 2))$ lähtöaskeleen kaakkoon. Nouseeko hän vai laskeutuuko?

Tämä on etupäässä käsinlaskutehtävä. Kannattaa toki havainnollistaa lopuksi myös Maplalla, ainakin korkeuskäyräpiirroksella ja leikkauskäyrällä kaakko-luode-suuntaisen pystytason kanssa.

5. Suorita teht. 4 AV visualisoinnit Maplalla. Piirrä myös gradienttikenttä `fieldplot`:lla.
6. Laske funktion $f(x, y) = x^4 + 2y^2 + 4xy$ lineaarinen approksimaatio (differentiaali) pisteessä $(-3, 2)$. Piirrä tähän pisteeseen tangenttitaso. (Tarkempaa ohjetta `harj6ohje.mws`:ssä, *tangtaso*-funktio on myös `.../v201.mpl`-tiedostossa.)