Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 12 AV (viikko 17 , 25.4.01)

Tutorointia taas pe 20.4. klo 10 – 12. salissa U345.

1. Minkä työn voimakenttä $\mathbf{F}(x,y) = x^3\mathbf{i}+xy\mathbf{j}$ tekee siirtäessään massapisteen kohdasta $(0,1)$ kohtaan $(1,e^{\pi/2})$ pitkin käyrää $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$? (Voiman yksikkö olkoon newton ja matkan metri, jolloin työ saadaan jouleissa.)

2. Laske $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, kun $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ seuraavia polkuja pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(1,1)$:

   (a) jana $y = x$
   (b) paraabeli $y = x^2$
   (c) koordinaattimurtoviiva $(0,0) \to (0,1) \to (1,1)$.

   Tarkista $\mathbf{F}$-kentän konservatiivisuus ja tee rohkeasti hypoteesi.

   Konservatiivisuusehto voidaan ilmaista muodossa $\nabla\times\mathbf{F} = 0$, missä derivoimissymboleja käsitellään lukujen tavoin. (Kysykää Juhalta!) Maple: `with(linalg): ?curl`

3. Käyräintegraalitutkielma. Tutkiskellaan integraalia $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, kun $F = -x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$.

   (a) Vahvista uskoasi riippumattomuuteen parametriesityksestä ottamalla C:ksi puoliympyrä ja vaihtelemalla parametrisointia. Aloita luonnollisella: $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0,\pi]$. Vaihda t:n tilalle ensin $-s$ ja sitten s^2 ja muuta rajat asianmukaisesti. Valitse sitten vielä jokin muu esitys. Laskuissa voit käyttää tarpeen mukaan *cint*3-funktiota, mutta tee jokin myös käsin.

   (b) Riippuvuus polusta. Integroi samojen päätepisteiden $(0,0)$ ja $(1,1)$ välillä polkuja $y = x^n$ eri n:n arvoilla. Voit toki kokeilla cint3:a, mutta tämä on pääasiassa käsinlasku.

   (c) Mitä raja-arvoa tulos lähestyy, kun $n \to \infty$? Saatko saman tuloksen integroimalla pitkin "rajapolkua"?

4. Laske ruuviviivalangan ("circular helix") $x = \cos t, y = \sin t, z = t$, $0 \le t \le 2\pi$ massa ja massakeskipiste, kun langan viivatiheys $\delta(x,y,z) = z$.

5. Mitkä seuraavista vektorikentistä ovat konservatiivisia? Määritä myönteisissä tapauksissa potentiaali.

   Riittää valita 3, joista mielellään ainakin kaksi turvallisesti konservatiivista.

   (a) $[2\,x, 4\,y, 8\,z]$ (b) $[yz, xz, xy]$ (c) $[xy, 2xy, 0]$ (d) $[ye^x, e^x, 1]$
   (e) $[\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, -\frac{xy}{z^2}]$ (f) $\frac{1}{x^2+y^2}[x,y]$

   Potentiaali tarkoittaa funktiota φ, jolle $\nabla\varphi = \mathbf{F}$. Funktiota φ voidaan lähteä etsimään ihan yllä olevan ehdon perusteella, integroimalla toisen muuttujan suhteen ja ottamalla huomioon, että "integroimisvakio"saa riippua siitä toisesta muuttujasta.

6. *Torus* (munkkirinkilä) syntyy, kun yz-tasossa oleva $(b,0)$-keskinen, a-säteinen (pikku)ympyrä ($a < b$) pyörähtää z-akselin ympäri. Muodosta toruksen parametriesitys ja valmistaudu piirtämään se plot3d:n avulla (piirto käy oikein näppärästi, kunhan saat parametriesityksen aikaan). Saitpa parametriesityksen tai et, osoita, että torus on $\mathbb{R}^3$:n yhtenäinen joukko, joka ei ole yhdesti yhtenäinen.

   Huom! Tämä tehtävä ei edellytä mitään "teoriaa", paitsi sen, että yhdesti yhtenäinen tarkoittaa, että jokainen umpinainen polku ao. joukossa voidaan kutistaa pisteeksi jatkuvalla muunnoksella siten, että pysytään koko ajan joukossa.

Maple-avustusta

Käyräintegraali

```
cint3:=proc(F,phi,a,b)
```

```
# Lasketaan R^3:n käyräintegraali
#   F   -- Vektorikenttä: funktiolista (esim. alla)
#   phi -- Parametrisointifkt. phi:[a,b] -> R^3
#   a,b -- Integrointirajat
#Esim: F:=map(unapply,[-y,-x*y,0],x,y,z); phi:=t->[cos(t),sin(t),0];
#      cint3(F,phi,0,Pi/2);  # Tasokenttä: 3. komponentti = 0
#
local intfun,k,t,dphi,tarkka,numappr;
dphi:=map(diff,phi(t),t);
intfun:=add(F[k](op(phi(t)))*dphi[k],k=1..3);
tarkka:=int(intfun,t=a..b);
numappr:=evalf(Int(intfun,t=a..b));
[tarkka,numappr];
end:
```

On v201.mpl:ssä (ainakin pian).