Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Välikoe 1, lauantai 16.10.2004 klo 10–13.

Alla kaikissa tehtävissä (X, ρ) on metrinen avaruus, $(X, \mathbb{M}, \mu)$ mitta-avaruus, $\mu(X) < \infty$ ja $\mathbb{M}$ sisältää Borel-joukot.

1. Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ mitallinen, $|f(x)| \leq 1$ kaikilla $x \in X$. Näytä, että on olemassa yksinkertaiset funktiot $s_n : X \to \mathbb{R}$, joilla

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$
$$|s_n(x)| \leq |s_{n+1}(x)|$$

kaikilla $x \in X$.

2. Todista seuraava Borel–Cantellin lemma: Kun $A_n \subset X$ ovat mitallisia, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty,$$

niin

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Kuten luennoilla, $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n$.

3. Olkoot $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ja $f : X \to \mathbb{R}$ mitallisia. Sanomme, että jono $\{f_n\}$ suppenee kohti funktiota f mitassa, jos

$$(1) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Olkoon $1 \leq p < \infty$. Näytä, että jos

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(X;\mu)} = 0,$$

niin (1) pätee.

4. Formuloi ja todista monotonisen konvergenssin lause.