Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Harjoitus 8, 10.11.2004

1. *(keskitasoa, lyhyt)* Olkoon λ, μ ja ν äärellisiä positiivisia mittoja $(X, \mathbb{M})$:ssä, missä $\mathbb{M}$ on X:n σ-algebra. (a) Olettaen $\nu \ll \mu \ll \lambda$, todista "ketjusääntö" $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$. (b) Olettaen $\nu \ll \mu$, todista $\nu(\{x \in X \ : \ \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\}) = 0$.

2. *(keskitasoa)* Olkoon $\lambda : \mathbb{M} \to [0, \infty]$ mitta, $\mathbb{M} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mu = f\lambda$, $f \in L^1(X, \lambda)$. Todista
$$|\mu| = h\lambda,$$
missä $h(x) = |f(x)|$ λ-melkein kaikilla x.

3. *(helppo)* Todennäköisyyslaskennassa todennäköisyysavaruus $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ on mitta-avaruus, jolle $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ on σ-algebra ja $\mathbb{P}(X) = 1$. Olkoon $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\Sigma =$ Lebesgue mitalliset joukot ja
$$P_a(E) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_E e^{-|x-a|^2/2}\, dx,$$
missä $E \in \Sigma$ ja $a \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $f \in L^1(\Omega, P_a)$ ja sanotaan, että
$$\mathbb{E}_{P_a}(f) = \int_\Omega f\, dP_a$$
on satunnaismuuttujan f odotusarvo mitan P_a suhteen. Etsi funktio h_n, jolle
$$\mathbb{E}_{P_0}(f) = \mathbb{E}_{P_a}(h_n f).$$
Olkoon $a = (1, 1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Miten $h_n(a)$ käyttäytyy, kun n kasvaa?

4. *(helppo)* Osoita, että jos $\mu_j : \mathbb{M} \to [0, \infty]$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ ovat mittoja, niin
$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \ : \mathbb{M} \to [0, \infty]$$
on mitta.

5. *(vaikea, vihje: tehtävät 2, 4 ja Radon–Nikodym)* Olkoon $X = \{\mu : \mathbb{M} \to \mathbb{C} \ : \ \mu$ kompleksinen mitta $\}$ ja $\|\mu\|_X = |\mu|(X)$. Osoita, että $(X, \|\cdot\|)$ on Banach-avaruus.