Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Harjoitus 5, 20.10.2004

1. Olkoon μ positiivinen mitta X:ssä ja $\{f_n\}$ jono mitallisia funktioita $X \to \mathbb{C}$. Sanotaan, että jono $\{f_n\}$ suppenee funktioon f mitassa (μ) (converges to f *in measure*) jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ s.e. kun $n \geq N$
$$\mu\left(\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) < \varepsilon.$$
Olkoon $\mu(X) < \infty$. Todista: Jos $f_n \to f$ m.k., niin $f_n \to f$ mitassa.

2. Olkoon $0 < p < \infty$. Oleta, että $f : X \to \mathbb{C}$ on mitallinen ja
$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty.$$
Todista, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ pätee
$$\mu\left(\{x \in X \ : \ |f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X |f|^p \, d\mu.$$
(Epäyhtälöä kutsutaan Čebyševin epäyhtälöksi.)

3. Olkoon $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Näytä, että jokaisella konveksilla funktiolla $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ on jokaisessa pisteessä $t \in (a,b)$ oikean- ja vasemmanpuoleiset derivaatat
$$\frac{d^+}{dt}\varphi(t) \quad \text{ja} \quad \frac{d^-}{dt}\varphi(t)$$
ja että
$$\frac{d^-}{dt}\varphi(t) \leq \frac{d^+}{dt}\varphi(t).$$

4. (a) Etsi pienin vakio $c \in \mathbb{R}$ s.e.
$$\ln(1 + e^t) < c + t,$$
missä $0 < t < \infty$.

   (b) Onko raja-arvo
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1 + e^{nf(x)}) \, dx$$
olemassa jokaiselle reaaliselle $f \in L^1([0,1])$? Jos on, niin mikä se on?

5. Millä p:n arvoilla seuraavat ovat totta: (1) $\frac{1}{1+|x|} \in L^p(\mathbb{R})$, (2) $\frac{1}{1+|x|} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, (3) $\frac{1}{|x|^{1/2}} \chi_{\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| < 1\}} \in L^p(\mathbb{R})$.