Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.192 Numeerinen ja symbolinen laskenta kevät 2004
`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/H/`

Laskuharjoitus 2 (viikko 5 , 27 – 29.1.2004)

Versio to 22.1., pari ode-tehtävää lisätty.
Tarkoitus: valmiiksi to 29.1. mennessä. (Täsmennetään aikataulu ti).

1. Suorita pari "Steepest descent-askelta kohdefunktiolle $f(\mathbf{x}) = 2(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2-5(x_1+x_2)$, kun alkupisteenä on $\mathbf{x_0} = [1,-2]^T$.

   Kts. `maple/harj2ohjeita.mws` ja alla olevat ohjeet. (vrt. harj. 1, teht. 3). Tällä kertaa käytetään funktioita lausekkeiden sijasta.

   Suorita ohjetyöarkilla ehdotetut visualisoinnit.

2. Piirrä funktion $f(x,y) = e^x(4x^2+2y^2+4xy+2y+1)$ korkeuskäyrä- ja pintapiirros. Piirrä myös gradienttikenttä plots-pakkauksen `fieldplot`:lla.

   Määritä f:n kriittiset pisteet (gradientin 0-kohdat) sekä niiden luonne. Voit käyttää `linalg`-pakkauksen funktioita `grad` ja `hessian`. Tässä tapauksessa saattaa jopa `solve` osata, yleensä joudutaan turvautumaan `fsolve`:een. Laske Hessen matriisin ominaisarvot kriittisissä pisteissä ja päättele "luonne"niiden avulla. Käytä `LinearAlgebra`-pakkauksen `Eigenvalues` tai `Eigenvectors`-komentoa. (Opiskele ..maple/LA.mws:ää)

   Sovella SD-menetelmää funktion $f(x,y) = e^x(4x^2+2y^2+4xy+2y+1)$ jonkin minimin (tai maksimin) etsimiseksi lähtemällä sopivan kaukaa edellä saaduista.

   Suorita samoja visualisointeja kuin edellisessä.

3. "Hiihtäjän reittiä"voidaan katsoa myös approksimaationa reitille, jossa kuljetaan joka hetki jyrkimmän laskeuman suuntaan. Jos reitti on $(x(t),y(t))$, niin on oltava $(x'(t),y'(t)) = -\nabla f(x(t),y(t)) \quad \forall t$, ts. funktiot $x(t)$ ja $y(t)$ ovat diffyhtälösysteemin

$$\begin{cases} x' = f_x(x,y) \\ y' = f_y(x,y) \end{cases}$$

   ratkaisuja, ja reitti on systeemin trajektori.
   Suorita latauskomento `with(DEtools)` ja piirrä `DEplot`-komennolla suuntakenttä ja trajektoreita, erityisesti nyt aluksi se, joka alkaa harj. 1:n hiihtäjätehtävän alkupisteestä. Mikä on alkuperäinen hiihtäjän reitti diffyhtälömenetelmänä ajateltuna?

   Tee kuva myös Matlab-funktion `pplane5` avulla. (Unix:ssa varo potenssia, grafiikkavalikot eivät salli väkästä näppäimistöltä, se on tehtävä leikkaus/liimaus- tyyliin tai sitten luettava ".pps-tekstitiedostosta".)

   Huom! Matlab-työkalu antaa paljon tarkemman tuloksen, koska Maplen `DEplot` laskee varsin karkealla, kiinteän askelpituuden numeerisella menetelmällä. Maplessa on paitsi hyvin kehittynyt analyyttinen ratkaisija `dsolve`, myös hyvä numeerinen `dsolve(...,numeric, method=..)` (useita menetelmiä valittavissa). (Toki Matlab on tehokkaampi ja monipuolisempi numeerisella puolella.)

4. Opiskele `L/odemaple.mws`-työarkin kohdat 1 ja 2 alakohtineen. [1] (myös odemaple.html olemassa).

   Muodosta kohdissa 1.1–1.5 esitetyt 2×2 lineaaristen systeemien faasitasopiirrokset näillä välineillä.

   Tee sitten sama Matlabin `pplane5`:lla. (On suoraan TKK:lla polun varrella, muita ympärostöjä varten haettavissa `matlab`-hakemistostamme.)

5. Määritä systeemin

$$\begin{cases} x' = x(1-x/2-y) \\ y' = y(x-1-y/2) \end{cases}$$

   kriittiset pisteet (KRP) ja linearisoi systeemi niissä. Piirrä faasikuva systeemistä ja erikseen kustakin linearisoidusta. Voit laittaa joukkoon myös isokliinejä.

   Käytä Jacobin matriisin muodostukseen `linalg[jacobian]`-funktiota.

   Tässä riittää tehdä faasikuvat joko Maplella tai Matlabin pplane5:llä.

Ohjeita

Jyrkimmän laskeuman menetelmä, "method of steepest descent":

Etsitään kohdefunktion $f(x,y)$ (yleisemmin $f(x_1,\ldots,x_n)$) minimiä etenemällä negatiivisen gradientin suuntaan. Harj. 1 teht. 3:ssa harjoiteltiin "hiihtäjän reittiä", joka on yksi versio asiasta. Siinä otettiin kiinteä askelpituus h (prujussa "timestep").

[1] Viittaamme L:llä kurssin luentohakemistoon ja H:lla harjoitushakemistoon

Askelpituuden määrääminen suoritetaan perusSD-menetelmässä niin, että kohdefunktio minimoidaan etsintäsuunnalla.

Työarkilla `H/harj2ohjeita.mws` on ehdotelmia alkuuunpääsemiseksi.

Määritellään funktio $\phi(t) = f(\mathbf{x}_n + t\mathbf{u})$, missä $\mathbf{u}$ on etsintäsuunnalla. (Nykypisteestä lähtevällä, $\mathbf{u}$:n suuntaisella (puoli)suoralla) Määrätään ϕ:n minimi tällä suunnalla, ohjetyöarkin tapauksessa se on helppoa.

Kriittisten pisteiden (gradientin 0-kohtien) luokittelu

Tässä peruskurssi 2:n kertausta:

Kriittinen piste (KRP) p: $\nabla f(p) = 0$.
Kriittisen pisteen laatu selviää (jos selviää) Hessen matriisin $H_f(p)$ definiittisyydestä seuraavasti:

Lause Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2 kertaa jatkuvasti derivoituva KRP:ssä p. Olkoon $H = H_f(p)$ Hessen matriisi pisteessä p, ja olkoot $\lambda_1, \dots \lambda_n$ H:n ominaisarvot.

(a) Jos $\lambda_i > 0, i = 1 \dots n$, niin KRP p on minimi.
(b) Jos $\lambda_i < 0, i = 1 \dots n$, niin KRP p on maksimi.
(c) Jos jokin $\lambda_i > 0$ ja jokin $\lambda_j < 0$, niin KRP p on satulapiste (siis ei ääriarvo).
(d) Jos kaikki ominaisarvot ovat samanmerkkiset ja jokin on $= 0$, niin "testi pettää".

Dys:n linearisointi ja (KRP):t = (TP):t

.

Diffyhtälösysteemin linearisointi tapahtuu laskemalla ensin kriittiset pisteet (KRP), eli oikean puolen 0-kohdat. (Käytetään myös nimitystä tasapainopiste (TP).) Jos $\mathbf{p_0}$ on KRP, niin linearisoidun systeemin (KRP siirretään O:oon) matriisi on diff.yhtälön määrittelevän (vektoriarvoisen) funktion $\mathbf{f}$ Jacobin matriisi $(\frac{\partial}{\partial y_j} f_i(y_1, ...y_n))_{i,j}$ pisteessä $\mathbf{p_0}$.