Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka
Apiola

Mat-1.192 Numeerinen ja symbolinen laskenta kevät 2004
`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/H/`

Laskuharjoitus 1 (viikko 4 , 20 – 22.1.2004)

`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/maple/perusteita.mws`

Tavoite: Tehdään nämä torstaiksi 22.1. Käytetään tiistain ajasta ainakin osa tehtävien yhdessä tekemiseen. (Jos osoittautuvat odottamattoman työläiksi, tarkistetaan dead-linea.)

Yleisajatus: Harjoitukset to, ”luennot”ti, ne ovat osittain yhdessä tekemistä. (Harjoituksen ja luennon raja sumea.) Loppuvaiheessa sitten seminaareja voi olla kumpana vain.

Viittaamme Cayley-Hamilton-tehtävässä alla olevaan [TE]-prujuun, [EN] on hyvä lähde diffyhtälösysteemeissä, joita käsittelemme seuraavaksi.

[TE] Timo Eirola: Lineaarialgebran perusteet (L3)
[$E-N$] Eirola–Nevanlinna: Differentiaaliyhtälösysteemit (L3)
(Voidaan jakaa tarvittaessa vaikka prujutoimituksen kautta.)

Aloita käynnistämällä Maple ja tekemällä työarkille otsikko ”title”, joksi vaikka Numsym, harjoitus 1, tms. sopivaa ja sen alle nimesi yms. sopivaa (ei siis sopimatonta). Tee kutakin tehtävää kohti insert-valikon ”section”.

Muista: uusi kehote: CTR-J tai CTR-K, missä J, niinkuin ”jälkeen”.

1. (Tehtävä työarkilta ”`perusteita.mws`”) Tarkastellaan polynomia $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$. Määritä nollakohdat ja paikalliset minimit sekä maksimit. Piirrä funktio ja sen derivaatta. Tarkista laskemalla funktion arvot, että nollakohdat ovat nollakohtia. Käsittele polynomia ensin lausekkeena ja sitten funktiona. Mitkä ovat kunkin tavan hyvät/huonot puolet. Derivaattalauseke : `diff`
Derivaattafunktio : `D` (Käyttele helppiä) `?plot, ?solve,?fsolve ?diff, ?D`

2. Piirrä funktion $f(x) = 2x\cos 2x - (x-2)^2$ välillä $[0,5]$ (tms. sopivaa) ja määritä f:n nollakohdat (n. 6:n numeron tarkkuudella) väleillä $[2,3]$ ja $[3,4]$ käyttäen Newtonin menetelmää. (Ota alkuarvo senverran kaukaa, että voit nauttia iteroinnista.) (Kts. ..maple/perusteita.mws)

   Tässä olisi hyvä tilaisuus kokeilla samaa Matlabilla. Piirrä kuva ja suorita iterointi. Käytä hyväksesi Maplella laskettua iterointifunktion lauseketta.

   Huonoa ei olisi kokeilla Maplella valmista `fsolve`:a ja Matlabilla `fzero`:a. (`help fzero`.

3. Käy läpi huolellisesti `maple/gsg.pdf`-tiedostossa kuvattu 2.3-esimerkki (jaetut ja kommentoidut sivut 10-20. Tee tästä huoliteltu dokumentti, kenties on hyvä tehdä aivan erillinen työarkki.

   Lisäpiirteenä voisit tehdä variaation, jossa f:ää käsitellään funktiona (eikä lausekkeena).

4. Tutustu `maple/LA.mws`-työarkkiin.

   Todista Maplen avulla *Cayley–Hamiltonin* lause: Neliömatriisi toteuttaa oman karakteristisen yhtälönsä.
   [1]

   Aloita $2\times 2-$ matriisista $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   Maple-ohjeita: `with(LinearAlgebra): with(linalg);` Kokeile matriisipalettia (`view`-valikosta “palettes”). Muodosta karakteristinen polynomi: p := ...;, sijoita muuttujan paikalle matriisi A `subs`-komennolla, ja sievennä tulos matriisievaluaattorilla `evalm`.

   Kun pääset $3\times 3-$ matriisiin, saat jo aika mielenkiintoisen näköisiä lausekkeita matriisin alkioiksi. Tarjoile kullekin alkiolle Maplen perussieventäjää `simplify`. Se onnistuu “mappaamalla” simplify-komento matriisin alkioille tyyliin `map(simplify,%)`, missä `%` viittaa edelliseen tulokseen.

   Vetoamme tähän lauseeseen tuota pikaa 2×2-systeemien tapauksessa.

[1] Yleinen todistus: [TE] Lause 4.10, s. 48, perustuu *Schurin hajotelmaan*, Lause 4.7 s. 45.