Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.192 Numeerinen ja symbolinen laskenta kevät 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/02/H/`

Laskuharjoitus 1 (viikko 4 , 23 – 25.1.2002)

Linkkejä, aputiedostoja

```
http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/L/fourier.html
http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/L/fourier.mws
http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/02/H/harj1ohje.mws
```

Aloitetaan tekemällä Maple-harjoitelma klassisesta insinöörimatematiikan aiheesta, jossa opetellaan käyttämään

- Fourier-sarjoja
- Diffyhtälöratkaisijaa (lineaarinen vakiokertoiminen)
- Erinäisiä sievennys- ym. komentoja
- Laplace-muunnoksia
- Maple-työn dokumentointia.

Varsinaisia tehtäviä

1. Suorita jokunen Fourier-sarjaksi kehittäminen. Alla pari esimerkkifunktiota, voit valita yhtä hyvin jotain muuta.

   Piirrä f:n kuvaaja muutaman jakson alueella. Muodosta f:n Fourier-sarja. Selvitä, missä pisteissä sarja suppenee ja missä se ei suppene kohti kyseistä funktion arvoa. Mitä arvoa kohti sarja näissä "ei-pisteissä" suppenee? Piirrä jaksollinen laajennus ja osasummafunktioiden kuvaajia.

   Tutki kokeellisesti *Gibbsin ilmiötä* (n. 9%:n "yli/aliampuminen"epäjatkuvuuskohdan ympäristössä).

   (Luultavasti ei kannata piirtää hirveää määrää osasummia, vaan valittuja muutamia harvakseen, isoilla n:n arvoilla.)

   Esim:

   (a) $f(t) = t, \quad t \in (-\pi, \pi], \quad f(t + 2\pi) = f(t).$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 100, & -4 < x < -2 \\ 0, & -2 \le x \le 4 \end{cases}, \; f(x + 8) = f(x).$

2. Tarkastellaan vaimennettua värähtelyä kuvaavaa yhtälöä

   $my'' + cy' + ky = r(t).$

   Olkoon $m = 1, c = 0.02, k = 25$ ja

   $$r(t) = \begin{cases} t + \pi/2, & -\pi < t < 0, \\ -t + \pi/2, & 0 < t < -\pi \end{cases} \quad , \quad r(t + 2\pi) = r(t)$$

   .

   Määritä "pitkän aikavälin" ("steady state") ratkaisu $y(t)$. (Tästä on homogeeniosan (ja siten alkuehtojen) vaikutus vaimentunut pois.)

   Periaate: Kehitetään $r(t)$ Fourier-sarjaksi. Etsitään kutakin sarjan termiä vastaten erityisratkaisua y_n muodossa $y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt$. Lineaarisuuden perusteella (jos sarjan termeittäin derivoiminen on sallittua) päätellään, että $\sum y_n$ on koko yhtälön ratkaisu.

   Laske ainakin 5 termiä ratkaisusarjasta ja piirrä niiden summa sekä termit erikseen. Jokin niistä on dominoiva, identifioi se. Piirrä samaan kuvaan heräte $r(t)$ ja "steady state"ratkaisu välillä $[0, 4\pi]$.

   Tutki, mitä tapahtuu, jos jousivakiolle annetaan arvo $k = 9$ sekä toisaalta jäykän jousen, vaikkapa $k = 49$ tapauksessa. Entä, jos vaimennusta lisätään?

3. Ratkaise AA-tehtävä $x'' + 2x = r, \quad x(0) = x'(0) = 0$,missä $r(t)$ on 2π-jaksoinen neliöaalto:

   $$r(t) = \begin{cases} -1, 0 < t < \pi \\ 1, \pi < t < 2\pi \end{cases} \quad .$$

   Suorita ratkaisu seuraavilla kahdella eri tavalla:

   a) Muodosta herätefunktio vaikkapa 3:n jakson alueella ja ratkaise yhtälö Laplace-muunnoksella. Saat käyttää MAPLE-funktiota `dsolve(...,method=laplace);`.

   b) Kehitä $r(t)$ Fourier-sinisarjaksi ja käytä osasummaa S_7 (eli mukana ovat termit $\sin 7t$-termiin saakka.) oikean herätteen approksimointiin.

c) Vertaa molemmilla menetelmillä saamiasi tuloksia, esitä graafisesti ja katso, miten tarkkuus paranee, kun otat korkeamman asteisia Fourier- osasummia.

Huom! Hyödynnä tietysti ennen mainittua `PeriodicExtender` (alias JJ) -funktiota.

Referenssejä:

[Kof] Ch 25 pp. 351 – 363

HAM
s. 177 ... (kts. HAM-sivun fourier-työarkki) Ota käyttöön jaksollinen laajennus.

KRE
“ Forced oscillations “

Fourier-kaavoja

T-jaksoisen funktion Fourier-sarja

Reaalimuoto Olkoon f T-jaksoinen reaalifunktio, missä $T = \frac{2\pi}{\omega}$. f:n Fourier-sarjaesitys:
$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$, missä

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin n\omega t dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Kompleksimuoto $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$, missä

$$c_n = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$