Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
7. harjoituksen ratkaisut

Teht. 1
Cauchyn jännityksen Truesdellin aikaderivaatta on (B3.5.2)

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathrm{div}(\mathbf{v})\,\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T, \tag{1}$$

josta saadaan

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}} - \mathrm{div}(\mathbf{v})\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T. \tag{2}$$

Yksiaksiaalisessa jännitystilassa jännityksen vaikuttaessa suunnassa x_1 on ainoa nollasta eroava jännityskomponentti σ_{11} ja venymänopeustensorin mahdolliset nollasta eroavat komponentit ovat D_{11}, D_{22} ja D_{33}, jolloin saadaan myös yhteys $\mathbf{L} = \mathbf{D}$. Käyttämällä konstitutiivista yhteyttä $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}} = \mathbf{C}^{\sigma\mathcal{T}} : \mathbf{D}$ saadaan yhtälöstä (2)

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{11} &= C^{\sigma\mathcal{T}}_{1111}D_{11} + C^{\sigma\mathcal{T}}_{1122}D_{22} + C^{\sigma\mathcal{T}}_{1133}D_{33} + D_{11}\sigma_{11} + \sigma_{11}D_{11} - \sigma_{11}\mathrm{tr}\mathbf{D}, &(3)\\
\dot{\sigma}_{22} &= C^{\sigma\mathcal{T}}_{2211}D_{11} + C^{\sigma\mathcal{T}}_{2222}D_{22} + C^{\sigma\mathcal{T}}_{2233}D_{33} = 0, &(4)\\
\dot{\sigma}_{33} &= C^{\sigma\mathcal{T}}_{3311}D_{11} + C^{\sigma\mathcal{T}}_{3322}D_{22} + C^{\sigma\mathcal{T}}_{3333}D_{33} = 0. &(5)
\end{aligned}$$

Kaksi viimeistä yhtälöä on kirjoitettu jännitystilan yksiaksiaalisuuden perusteella nollaksi. Poikittaisen isotropian tapauksessa on tangenttimodulien välillä yhteydet $C^{\sigma\mathcal{T}}_{1133} = C^{\sigma\mathcal{T}}_{1122}$ ja $C^{\sigma\mathcal{T}}_{2222} = C^{\sigma\mathcal{T}}_{3333}$. Sijoittamalla poikittainen isotropia kahteen viimeiseen yhtälöön saadaan näistä

$$\begin{aligned}
C^{\sigma\mathcal{T}}_{2211}D_{11} &= -C^{\sigma\mathcal{T}}_{2222}D_{22} - C^{\sigma\mathcal{T}}_{2233}D_{33}, &(6)\\
C^{\sigma\mathcal{T}}_{2211}D_{11} &= -C^{\sigma\mathcal{T}}_{2222}D_{22} - C^{\sigma\mathcal{T}}_{2233}D_{33}, &(7)
\end{aligned}$$

joista saadaan ratkaistua

$$D_{22} = D_{33} \qquad \text{ja} \qquad D_{22} = -\frac{C^{\sigma\mathcal{T}}_{2211}}{C^{\sigma\mathcal{T}}_{2222} + C^{\sigma\mathcal{T}}_{2233}}D_{11} = -\hat{\nu}D_{11}. \tag{8}$$

Edellä on otettu käyttöön lyhennysmerkintä $\hat{\nu}$. Venymänopeustensorin trace on tässä tapauksessa

$$\mathrm{tr}\mathbf{D} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = (1 - 2\hat{\nu})D_{11}. \tag{9}$$

Sijoittamalla tulokset (8) ja (9) yhtälöön (3) saadaan

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{11} &= C^{\sigma\mathcal{T}}_{1111}D_{11} + C^{\sigma\mathcal{T}}_{1122}D_{22} + C^{\sigma\mathcal{T}}_{1133}D_{33} + D_{11}\sigma_{11} + \sigma_{11}D_{11} - \sigma_{11}\mathrm{tr}\mathbf{D} &(10)\\
&= \big(C^{\sigma\mathcal{T}}_{1111} - \hat{\nu}(C^{\sigma\mathcal{T}}_{1122} + C^{\sigma\mathcal{T}}_{1133}) + 2\sigma_{11} - \sigma_{11}(1 - 2\hat{\nu})\big)D_{11} &(11)\\
&= \big(C^{\sigma\mathcal{T}}_{1111} - 2\hat{\nu}C^{\sigma\mathcal{T}}_{1122} + \sigma_{11}(1 + 2\hat{\nu})\big)D_{11} = E^{\sigma}D_{11}. &(12)
\end{aligned}$$

Cauchyn jännityksen Jaumannin derivaatta on (B3.5.1)

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T. \tag{13}$$

Koska nyt $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ saadaan $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ja

$$\sigma^{\nabla J} = E^{\sigma J}D_{11} = E^{\sigma}D_{11}, \qquad E^{\sigma J} = C^{\sigma\mathcal{T}}_{1111} - 2\hat{\nu}C^{\sigma\mathcal{T}}_{1122} + \sigma_{11}(1 + 2\hat{\nu}). \tag{14}$$

Yhtälöstä (1) saadaan

$$\sigma^{\nabla\mathcal{T}} = (C^{\sigma\mathcal{T}}_{1111} - 2\hat{\nu}C^{\sigma\mathcal{T}}_{1122})D_{11}, \qquad E^{\sigma\mathcal{T}} = C^{\sigma\mathcal{T}}_{1111} - 2\hat{\nu}C^{\sigma\mathcal{T}}_{1122}. \tag{15}$$

Teht. 2
Kimmoplastinen tangenttimoduli on (B5.7.7)

$$\mathbf{C}^{\tau J} = \mathbf{C}^{\tau J}_{el} - \frac{(\mathbf{C}^{\tau J}_{el} : \mathbf{r}) \otimes (f_{\mathbf{\Sigma}} : \mathbf{C}^{\tau J}_{el})}{-f_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} + f_{\mathbf{\Sigma}} : \kappa \mathbf{r} + f_{\mathbf{\Sigma}} : \mathbf{C}^{\tau J}_{el} : \mathbf{r}} \,. \tag{16}$$

Elastisuustensori on

$$\mathbf{C}^{\tau J}_{el} = \lambda^e \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{I}, \tag{17}$$

missä $\boldsymbol{I}$ on neljännen kertaluvun yksikkötensori[1]. Myötösuunta $\mathbf{r}$ ja von Mises jännitys $\bar{\sigma}$ lausuttuna tensorin $\mathbf{\Sigma}$ (*over stress*) deviaatio-osan avulla ovat (B5.7.1)

$$\mathbf{r} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \mathbf{\Sigma}^{\rm dev} \qquad \text{ja} \qquad \bar{\sigma} = \Big(\frac{3}{2} \mathbf{\Sigma}^{\rm dev} : \mathbf{\Sigma}^{\rm dev} \Big)^{1/2}. \tag{18}$$

Ratkaisemalla ensimmäisestä $\mathbf{\Sigma}^{\rm dev}$ ja sijoittamalla se jälkimmäiseen saadaan $\mathbf{r} : \mathbf{r} = 3/2$. Tätä tulosta ja tensorin $\mathbf{r}$ deviatorisuutta ($\mathrm{tr}\,\mathbf{r} = 0$) hyödyntämällä saadaan

$$\mathbf{C}^{\tau J}_{el} : \mathbf{r} = \mathbf{r} : \mathbf{C}^{\tau J}_{el} = 2\mu \mathbf{r} \qquad \text{ja} \qquad \mathbf{r} : \mathbf{C}^{\tau J}_{el} : \mathbf{r} = 2\mu \mathbf{r} : \mathbf{r} = 3\mu \,. \tag{19}$$

Myötösäänön (B5.7.3) mukaan

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{\Sigma}} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \mathbf{\Sigma}^{\rm dev} = \mathbf{r}. \tag{20}$$

Sijoittamalla edellä esitetyt tulokset kimmoplastisen tangenttimodulin lausekkeesseen, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{\tau J} &= \lambda^e \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{I} - \frac{(2\mu \mathbf{r}) \otimes (2\mu \mathbf{r})}{H + 3\kappa/2 + 3\mu} \\
&= \lambda^e \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{I} - \frac{(2\mu \mathbf{r}) \otimes (2\mu \mathbf{r})}{H + \kappa' + 3\mu} \\
&= \lambda^e \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu (\boldsymbol{I} - \frac{2\mu}{3\mu} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{1 + (H + \kappa')/(3\mu)}) \\
&= \lambda^e \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu (\boldsymbol{I} - \gamma \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}).
\end{aligned} \tag{21}$$

Kimmoplastiselle tangenttimodulille saatiin siis pyydetty lauseke

$$\mathbf{C}^{\tau J} = \lambda^e \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{I} - 2\mu\gamma \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}, \tag{22}$$

missä on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\kappa' = \frac{3\kappa}{2} \,, \qquad \gamma = \frac{1}{1 + (H + \kappa')/(3\mu)} \,, \qquad \hat{\mathbf{n}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{r} \,. \tag{23}$$

Elastisuustensori lausuttuna pallo- ja deviaatio-osan avulla on

$$\mathbf{C}^{\tau J}_{el} = K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{I}^{\rm dev}, \qquad \boldsymbol{I}^{\rm dev} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \tag{24}$$

missä $K = \lambda^e + 2\mu/3$. Näitä käyttäen voidaan kimmoplastinen tangenttimoduli kirjoittaa myös muodossa

$$\mathbf{C}^{\tau J} = K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu (\boldsymbol{I}^{\rm dev} - 2\mu\gamma \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}). \tag{25}$$

[1] Kaikilla toisen kertalvun tensoreilla $\mathbf{A}$ pätee $\boldsymbol{I} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \boldsymbol{I} = \mathbf{A}$.

Teht. 3
Indeksinotaatiota käyttäen saadaan

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}):\mathbf{C} &= (A_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \;\otimes\; B_{kl}\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l):C_{mn}\mathbf{e}_m\otimes\mathbf{e}_n \\
&= (A_{ij}B_{kl}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l):C_{mn}\mathbf{e}_m\otimes\mathbf{e}_n \\
&= A_{ij}B_{kl}C_{mn}\delta_{km}\delta_{ln}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \\
&= A_{ij}B_{kl}C_{kl}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j = (\mathbf{B}:\mathbf{C})\mathbf{A}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Saatiin siis pyydetty yhteys

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}):\mathbf{C} = (\mathbf{B}:\mathbf{C})\mathbf{A}. \tag{27}$$

Teht. 4
Kirjoitetaan venymänopeus elastisen ja plastisen venymänopeuden summana (B5.10.1)

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p. \tag{28}$$

Konstitutiivinen yhteys on (B5.10.2)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \mathbf{C}:(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p). \tag{29}$$

Myötösääntö (plastic flow rule) ja sisämuuttujien evoluutioyhtälö ovat (B5.10.3)

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q}) \qquad \text{ja} \qquad \dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda}\mathbf{h}. \tag{30}$$

Myötöehto (yield condition) on (B5.10.4)

$$f(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q}) = 0. \tag{31}$$

Konsistenssiehdosta[2] $\dot{f} = 0$ saadaan

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}} = f_{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} + f_{\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}} = 0. \tag{32}$$

Sijoittamalla tähän konstitutiivinen yhteys ja evoluutioyhtälö saadaan

$$f_{\boldsymbol{\sigma}}:(\mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e) + f_{\mathbf{q}}\cdot\dot{\lambda}\mathbf{h} = f_{\boldsymbol{\sigma}}:(\mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) + f_{\mathbf{q}}\cdot\dot{\lambda}\mathbf{h} = 0. \tag{33}$$

Käyttämällä myötösääntöä saadaan edelleen

$$f_{\boldsymbol{\sigma}}:(\mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{C}:\dot{\lambda}\mathbf{r}) + f_{\mathbf{q}}\cdot\dot{\lambda}\mathbf{h} = 0. \tag{34}$$

Tästä saadaan

$$\dot{\lambda}(f_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{h} - f_{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}:\mathbf{r}) = -f_{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \tag{35}$$

josta saadaan ratkaistuksi

$$\dot{\lambda} = \frac{f_{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{-f_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{h} + f_{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}:\mathbf{r}}\ . \tag{36}$$

Käyttämällä konstitutiivisessa yhteydessä myötösääntöä ja sijoittamalla edellä saatu $\dot{\lambda}$ saadaan

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}:(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \mathbf{C}:(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda}\mathbf{r}) = \mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{(f_{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}})}{-f_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{h} + f_{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}:\mathbf{r}}\ \mathbf{C}:\mathbf{r}\,. \tag{37}$$

Soveltamalla viimeiseen termiin tehtävän (3) yhteyttä $(\mathbf{B}:\mathbf{C})\mathbf{A} = (\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}):\mathbf{C}$ saadaan

$$\frac{(\overbrace{f_{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}}^{\mathbf{B}}:\overbrace{\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\ }^{\mathbf{C}})\overbrace{(\mathbf{C}:\mathbf{r})}^{\mathbf{A}}}{-f_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{h} + f_{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}:\mathbf{r}} = \frac{(\mathbf{C}:\mathbf{r})\otimes(f_{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}):\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{-f_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{h} + f_{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}:\mathbf{r}}\ . \tag{38}$$

[2] Jännitys pysyy myötöpinnalla plastisen muodonmuutoksen tapahtuessa.

Näin ollen voidaan konstitutiivinen yhteys kirjoittaa muodossa

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \Big(\mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C} : \mathbf{r}) \otimes (f_{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C})}{-f_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} + f_{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{r}} \Big) : \dot{\epsilon} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\epsilon} \tag{39}$$

ja kimmoplastinen tangenttimoduli on

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C} : \mathbf{r}) \otimes (f_{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C})}{-f_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} + f_{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{r}} . \tag{40}$$

Tehtävässä pyydettiin vielä tarkastelemaan tapausta

$$\mathbf{C} = K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{I}^{\mathrm{dev}}, \quad \mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \tag{41}$$

$$f = \overline{\sigma} - \sigma_y(\bar{\epsilon}), \quad \overline{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}} . \tag{42}$$

Myötösääntöä derivoimalla saadaan

$$\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big(\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} \Big)^{1/2} = \frac{1}{2\overline{\sigma}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}) = \frac{1}{2\overline{\sigma}} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} = \frac{3}{2\overline{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}. \tag{43}$$

Edellä on käytetty yleisellä toisen kertaluvun tensorilla $\mathbf{A}$ voimassa olevaa tulosta

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (\mathbf{A}^{\mathrm{dev}} : \mathbf{A}^{\mathrm{dev}}) = 2\mathbf{A}^{\mathrm{dev}}, \tag{44}$$

joka on pienellä vaivalla johdettavissa suunnatun derivaatan määritelmää käyttäen. Sisämuuttujana mallissa on ainoastaan kokonaisvenymä $\bar{\epsilon}$, joten $\mathbf{q} = q_1 = \bar{\epsilon}$, josta edelleen $\dot{q}_1 = \dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\lambda}$. Evoluutioyhtälöstä $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda}\mathbf{h} \Leftrightarrow \dot{q}_1 = \dot{\lambda} h_1$ saadaan $h_1 = 1$. Myötöehdon derivaataksi sisämuuttujien suhteen saadaan

$$f_{\mathbf{q}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\epsilon}} = -H, \tag{45}$$

missä $H = H(\bar{\epsilon})$ on yksiaksiaalinen plastinen moduli[3]. Sijoittamalla nyt kimmoplastisen modulin lausekkeeseen yhteydet $f_{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{r}$, $-f_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} = H$ ja ottamalla huomioon $\mathbf{C} : \mathbf{r} = \mathbf{r} : \mathbf{C} = 2\mu\mathbf{r}$ ja $\mathbf{r} : \mathbf{C} : \mathbf{r} = 3\mu$ saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{ep} &= \mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C} : \mathbf{r}) \otimes (f_{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C})}{-f_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} + f_{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{r}} \\
&= K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{I}^{\mathrm{dev}} - \frac{2\mu\mathbf{r} \otimes 2\mu\mathbf{r}}{H + 3\mu} \\
&= K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \Big(\boldsymbol{I}^{\mathrm{dev}} - \frac{2\mu}{3\mu} \frac{1}{1 + H/(3\mu)} \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \Big) \\
&= K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \big(\boldsymbol{I}^{\mathrm{dev}} - \gamma \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \big),
\end{aligned} \tag{46}$$

missä on käytetty merkintöjä

$$\gamma = \frac{1}{1 + H/(3\mu)} \qquad \text{ja} \qquad \hat{\mathbf{n}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \mathbf{r} . \tag{47}$$

[3] Oppikirja s.242, kuva 5.9