Aalto-yliopisto

Gripenberg, Saari

MS-C1420 Fourier-analyysi
Tentti 13.5.2014

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

1.

(a) Esitä signaalin $h(t) = s(4t)$, $t \in \mathbb{R}$ Fourier-muunnos $\hat{h}$ signaalin s Fourier-muunnoksen $\hat{s}$ avulla.

(b) Signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fourier-muunnoksesta tiedetään, että $\hat{s}(-\nu) = -\hat{s}(\nu)$ kaikilla $\nu \in \mathbb{R}$. Mitä voidaan tämän perusteella sanoa signaalista s? (Voit olettaa, että $\int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu)| \, \mathrm{d}\nu < \infty$ ja $\int_{\mathbb{R}} |s(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$.)

Ratkaisu: (a) Määritelmän mukaan

$$\hat{h}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} h(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(4t) \, \mathrm{d}t \overset{4t = \tau}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu \frac{\tau}{4}} s(\tau) \frac{1}{4} \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{4} \hat{s}\left(\frac{\nu}{4}\right).$$

(b) Fourier-muunnoksen käänteiskaavan nojalla saadaan

$$\begin{aligned} s(-t) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(-t)\nu} \hat{s}(\nu) \, \mathrm{d}\nu \overset{\nu = -\omega}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\omega} \hat{s}(-\omega) \, \mathrm{d}\omega \\ &\overset{s(-\omega) = -s(\omega)}{=} - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\omega} \hat{s}(\omega) \, \mathrm{d}\omega = -s(t). \end{aligned}$$

Jos signaali on reaalinen niin voidaan lisäksi osoittaa, että Fourier-muunnos on puhtaasti imaginaarinen.

---

2. Jatkuva signaali $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on jaksollinen jaksolla 1. Millä ehdolla signaali $h(t) = \int_0^t s(\tau) \, \mathrm{d}\tau$ on myös jaksollinen jaksolla 1 ja mikä on $\hat{h}(k)$ esitettynä s:n Fourier-kertoimien avulla kun $k \neq 0$?

Ratkaisu: Koska $h(0) = 0$ niin välttämätön ehto sille, että h on jaksollinen jaksolla 1 on, että $h(1) = \int_0^1 s(\tau) \, \mathrm{d}\tau = 0$. Tämä on myös riittävä ehto koska s:n jaksollisuuden nojalla

$$\begin{aligned} h(t+1) &= \int_0^{t+1} s(\tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t s(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \int_t^{t+1} s(\tau) \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t s(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \int_t^{\lceil t \rceil} s(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \int_{\lceil t \rceil}^{t+1} s(\tau) \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t s(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \int_t^{\lceil t \rceil} s(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \int_{\lceil t \rceil - 1}^{t+1-1} s(\tau) \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t s(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \int_{\lceil t \rceil - 1}^{\lceil t \rceil} s(\tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t s(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \int_0^1 s(\tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t s(\tau) \, \mathrm{d}\tau = h(t). \end{aligned}$$

Signaalin h Fourier-kertoimet $\hat{h}(k)$ kun $k \neq 0$ ovat

$$\hat{h}(k) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} \int_0^t s(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \Big/_0^1 \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} \int_0^t s(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^1 \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} s(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi k}\int_0^1 s(\tau)\,\mathrm{d}\tau - 0 + \frac{1}{\mathrm{i}2\pi k}\hat{s}(k) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi k}\hat{s}(k).$$

Kun $k = 0$ saadaan (mutta tätä ei kysytty)

$$\hat{h}(0) = \int_0^1 \int_0^t s(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \int_0^1 s(\tau) \int_\tau^1 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = \int_0^1 s(\tau)(1-\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\int_0^1 \tau s(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

3.

(a) Funktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on sellainen, että $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(\nu)|\,\mathrm{d}\nu < \infty$ ja $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{h}(j+\nu) = 1$ kaikilla ν. Osoita, että $h(0) = 1$ ja $h(k) = 0$ jos $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(b) Mitä tarkoittaa lyhenne FFT?

Ratkaisu: (a) Olkoon k kokonaisluku. Fourier-muunnoksen käänteiskaavan ja funktion $\nu \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k\nu}$ jaksollisuuden nojalla saamme

$$h(k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k\nu}\hat{h}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_j^{j+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k\nu}\hat{h}(\nu)\,\mathrm{d}\nu \overset{\nu=\omega+j}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k(\omega+j)}\hat{h}(\omega+j)\,\mathrm{d}\omega$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k\omega}\hat{h}(\omega+j)\,\mathrm{d}\omega = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k\omega} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{h}(\omega+j)\,\mathrm{d}\omega$$
$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k\omega} 1\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 1, \text{jos } k = 0, \\ 0, \text{muuten.} \end{cases}$$

(b) Fast Fourier Transform, eli algoritmi, jolla voidaan tehokkaasti laske disktreetin signaalin diskreetti Fourier-muunnos.

---

4. Signaalista $s(t) = \sin(2\pi 9t)$ otetaan näytteitä $\mathbf{q}(j) = s(j \cdot 0.4)$, $j = 0, 1, \ldots, 5999$ ja lasketaan tämän jonon diskreetti Fourier-muunnos. Suunnilleen millä indeksin j, $0 \le j \le 5999$, arvoilla luvut $|\hat{\mathbf{q}}(j)|$ ovat suurimmillaan?

Ratkaisu: Koska $\sin(2\pi 9t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 9t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 9t})$ niin tämä signaali sisältää taajuudet 9 ja -9. Diskreetin Fourier-muunnoksen kannalta olennaisia ovat luvut $\mathrm{mod}\,(0.4\cdot 9, 1) = \mathrm{mod}\,(3.6, 1) = 0.6$ ja $\mathrm{mod}\,(0.4 \cdot (-9), 1) = \mathrm{mod}\,(-3.6, 1) = 0.4$. (Tässä siis $\mathrm{mod}\,(x, 1) = y$ jos $0 \le y < 1$ ja $x = n + y$ missä $n \in \mathbb{Z}$.) Koska näytteitä on $N = 6000$ niin diskreetti Fourier-muunnos saa itseisarvoltaan suurimmat arvot kun $j \approx N\mathrm{mod}\,(\nu\Delta t, 1)$ eli tässä tapauksessa kun $j \approx 0.6 \cdot 6000 = 3600$ ja $j \approx 0.4 \cdot 6000 = 2400$.

5.

(a) Olkoon $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (eli ψ on äärettömän monta kertaa derivoituva ja $\sup_{t\in\mathbb{R}}|t^k s^{(m)}(t)| < \infty$ kaikilla k ja $m \geq 0$). Osoita, että funktio $\nu \mapsto \nu\hat{\psi}(\nu)$ on funktion $t \mapsto \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\psi'(t)$ Fourier-muunnos.

(b) Olkoon $s(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Tästä funktiosta saadaan vaimennettu distribuutio $s_{\to\mathrm{D}}$ kaavalla $s_{\to\mathrm{D}}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$. Määritä tämän vaimennetun distribuution $s_{\to\mathrm{D}}$ Fourier-muunnos (a)-kohdan tuloksen avulla.

Ratkaisu: (a) Olkoon $h(t) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\psi'(t)$. Tämän funktion Fourier-muunnos on määritelmän mukaan

$$\hat{h}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\psi'(t)\,\mathrm{d}t = \Big/_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\psi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}(-\mathrm{i}2\pi\nu)\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\psi(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \nu\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\psi(t)\,\mathrm{d}t = \nu\hat{\psi}(\nu).$$

(b) Vaimennetun distrbuution Fourier-muunnoksen määritelmän, (a)-kohdan tuloksen ja Fourier-muunnoksen käänteiskaavan nojalla pätee

$$\mathcal{F}(\to Ds)(\psi) = s_{\to\mathrm{D}}(\hat{\psi}) = \int_{\mathbb{R}} t\hat{\psi}(t)\mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 0 t}t\hat{\psi}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\psi'(0).$$

Näin ollen $s_{\to\mathrm{D}}$:n Fourier-muunnos on vaimennettu distribuutio jonka arvo testifunktiolla ψ on $\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\psi'(0)$ joten voimme myös kirjoittaa $\widehat{s_{\to\mathrm{D}}} = -\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\delta_0'$ missä δ_0 on vaimennettu distribuutio jonka arvo testifunktiolla ψ on $\psi(0)$ ja δ_0' on sen derivaatta..