

Palauta P-tehtävät (ja vastaa S-tehtäviin) viimeistään 2.4.2015 klo. 18 HUOM!.

Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Piirrä kaikki (suuntaamattomat) ei-isomorfiset puut, joissa on 5 solmua.

Vihje: Puu on (verkkoteoriassa) määritelmän mukaan verkko, joka on yksinkertainen ja sel-lainen, että jokaisesta solmusta on täsmälleen yksi yksinkertainen polku jokaiseen toiseen sol-muun.

P2. Kahdella (suuntaamattomalla) verkolla on naapurimatriisit

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Piirrä vastaavat verkot. Ovatko nämä verkot isomorfiset? Perustele!

Vihje: Jos A on verkon naapurimatriisi niin $A(i, j) = 1$ jos ja vain jos solmujen i ja j välillä on kaari.

P3. Joukko opiskelijoita aikoo osallistua kurssien K_1, \dots, K_7 kokeisiin seuraavasti:

| | | |
|----------|-------|-------|
| Opisk. A | K_1 | K_2 |
| Opisk. B | K_1 | K_4 |
| Opisk. C | K_1 | K_6 |
| Opisk. D | K_2 | K_3 |
| Opisk. E | K_3 | K_4 |
| Opisk. F | K_3 | K_5 |
| Opisk. G | K_5 | K_6 |
| Opisk. H | K_4 | K_7 |
| Opisk. I | K_5 | K_7 |

Piirrä verkko, jonka solmut ovat $K_j, j = 1, 2, \dots, 7$ siten, että solmujen K_j ja K_k välillä on kaari jos ja vain jos ainakin yksi opiskelija aikoo osallistua sekä kurssin K_j että kurssin K_k tenttiin. Määritä verkon kromaattinen luku, eli pienin lukumäärä värejä, joilla verkon solmuja voidaan värittää niin että solmut, joiden välillä on kaari tulevat väritetyiksi eri väreillä. Mitä tämä luku kertoo tässä tapauksessa?

Vihje: Verkossa on yksinkertainen sykli, jonka pituus on pariton luku. Mikä se on ja mitä tekemistä tällä seikalla on kromaattisen luvun kanssa?

P4. Verkon $[V, E]$ solmut ovat listat $[s_1, s_2, s_3]$ missä $s_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, 3$. Solmujen $[s_1, s_2, s_3]$ ja $[t_1, t_2, t_3]$ välillä on suuntamaaton kaari jos ja vain jos $|s_1 - t_1| + |s_2 - t_2| + |s_3 - t_3| = 1$. Piirrä tämä verkko ja järjestä (eli numeroi) sen solmut siten, että ahne väritysalgoritmi käyttää 4 väriä.

Vihje: Piirrä ensin esimerkiksi solmut $[0, s_2, s_3]$ ja sitten solmut $[1, s_2, s_3]$.

P5. Olkoon $[V, E]$ yksinkertainen suuntaamaton verkko, jossa solmujen lukumäärä $|V| \geq 2$. Osoita, että ainakin kahdella solmulla on sama lukumäärä naapureita.

Vihje: Mikä on naapureiden maksimimäärä (yksinkertaisessa verkossa mikään solmu ei ole oma naapurinsa) ja mikä tämä maksimimäärä on jos verkossa on solmu, jolla ei ole naapureita?