

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet  
Tentti 15.11.2016

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!  
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!*

Vastauksissasi saa numeroiden lisäksi olla potensseja,  $\cdot$ ,  $/$ ,  $+$ ,  $-$ ,  $!$ , ( ja ) mutta ei esimerkiksi binomikertoimia.

**1.** Osoita induktion avulla (vaikka se olisikin mahdollista jollain muullakin tavalla), että luku  $2^{2^n} - 1$  on luvulla 3 jaollinen kun  $n \geq 1$ .

**2.** Oleta, että  $n \geq 2$  on kokonaisluku.

(a) Osoita binomikertoimen määritelmän avulla, että  $\binom{2 \cdot n}{2} = 2 \cdot \binom{n}{2} + n^2$ .

(b) Joukosta, jossa on  $2 \cdot n$  alkioita voidaan valita osajoukko, johon kuuluu 2 alkioita,  $\binom{2 \cdot n}{2}$ :lla eri tavalla. Selitä minkälaisella päättelyllä vastaukseksi tulee  $2 \cdot \binom{n}{2} + n^2$  käyttämättä (a)-kohdan tulosta (jolloin siis (a)-kohta tulee todistetuksi toisella tavalla).

**3.** Määritä lukujen 60 ja 46 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

**4.**

(a) Selitä määritelmään nojautuen miksi oletuksista  $f \in O(n)$  ja  $g \in O(n^2)$  seuraa, että  $f \cdot g \in O(n^4)$  ja miksi ei seuraa, että  $\frac{g}{f} \in O(n)$ .

(b) Ryhmä  $[G, \circ]$  on joukon  $X$  permutaatioiden aliryhmä. Mistä nähdään, ettei funktio

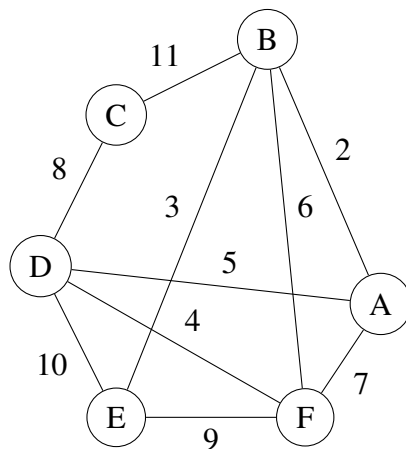
$$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{6}(t_1^4 \cdot t_2^2 + 2 \cdot t_1^2 \cdot t_2^3 + t_1^2 \cdot t_2 \cdot t_3 + t_2 \cdot t_4),$$

ole ryhmän  $G$  sykli-indeksi  $\zeta_{G,X}$ ?

(c) Ryhmän  $G$  sykli-indeksi toiminnassaan joukossa  $X$  on  $\zeta_{G,X}(t_1, t_2) = \frac{1}{4}(t_1^5 + 3 \cdot t_1 \cdot t_2^2)$ . Monellako, ryhmän  $G$  toiminnan suhteen ei-ekvivalentilla tavalla voidaan joukon  $X$  alkioita värittää jos käytettävissä on 3 väriä?

**KÄÄNNÄ!**

5. Määritä alla olevan verkon  $[V, E]$  minimaalinen virittävä puu käyttämällä algoritmia, joka takaa optimaalisen tuloksen (mutta sinun ei tarvitse osoittaa, että algoritmi antaa optimaalisen tuloksen). Selitä miten olet menetellyt esimerkiksi kirjoittamalla missä järjestyksessä olet lisännyt solmuja ja/tai kaareja.



Kaarien painot ovat siis  $w(\{A, B\}) = 2$ ,  $w(\{B, C\}) = 11$ ,  $w(\{C, D\}) = 8$ ,  $w(\{D, E\}) = 10$ ,  $w(\{E, F\}) = 9$ ,  $w(\{A, D\}) = 5$ ,  $w(\{A, F\}) = 7$ ,  $w(\{B, E\}) = 3$ ,  $w(\{B, F\}) = 6$  ja  $w(\{D, F\}) = 4$ .