

MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem)

Esimerkkejä ym., osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

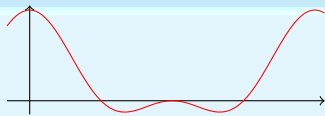
21. tammikuuta 2016

💡 Vektoreista

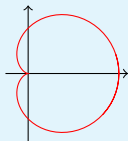
- \mathbb{R} on reaalilukujen joukko ja $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{R} \}$ on xy -tason pisteitä.
- Jokaista pistettä tai paria (x, y) voimme käsitellä vektorina, jonka voimme myös esittää joko pystyvektorina (2×1 -matriisina) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, vaakavektorina (1×2 -matriisina) $[x \ y]$ tai muodossa $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (missä siis \mathbf{i} on positiivisen x -akselin suuntainen yksikkövektori jne.)
- Jos \mathbf{u} on vaakavektori $[u(1) \ u(2)]$ ja \mathbf{v} on pystyvektori $\begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \end{bmatrix}$ niin niiden matriisitulo on $\mathbf{u}\mathbf{v} = u(1)v(1) + u(2)v(2)$. Jos emme tee eroa vaak- ja pystyvektoriden välillä voimme myös kirjoittaa tätä pistetulona (sisätulona, skalaaritulona) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
- Vektorin pituuden määritelmäksi otamme $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.
- Vektorit \mathbf{u} ja \mathbf{v} ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan jos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
- $\mathbb{R}^d = \{ (x_1, x_2, \dots, x_d) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, d \}$ ja kun \mathbb{R}^2 korvataan \mathbb{R}^d :llä niin "ainoastaan" kuvien piirtäminen tulee vaikeammaksi.

😊 Funktioista

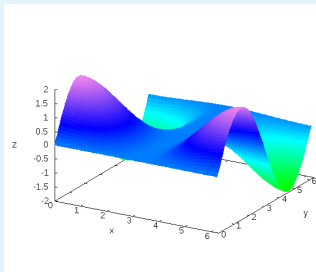
- $f(x) = (1 + \cos(x)) \cos(x)$ on yhden reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio (eli funktio: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) jolla on kuvaaja:



- Funktio $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} (1 + \cos(t)) \cos(t) \\ (1 + \cos(t)) \sin(t) \end{bmatrix}$ on yhden reaalimuuttujan vektoriarvoinen funktio (eli funktio: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$) jonka kuvajoukko on käyrä:



- Funktio $h(x, y) = (1 + \cos(x)) \sin(y)$ on kahden reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio (eli funktio: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$), jota voi myös käsitellä yhden vektorimuuttujan funktiona $h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1 + \cos(x)) \sin(y)$ ja jolla on seuraava kuvaaja:



Huomaa, että f :n kuvaaja on käyrä, jolla on parametriesitys $t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ (1 + \cos(t)) \cos(t) \end{bmatrix}$.

😊 Muuttujat, parametrit, vakiot

Jos sylinterin muotoisella putkella on pituus L , sisähalkaisija r , seinämän paksuus h ja materiaalin tiheys on ρ niin putken massa

$$m = \rho \cdot L \cdot \pi((r + h)^2 - r^2).$$

Riippuen tilanteesta voimme tämän kaavan avulla määritellä erilaisia funktioita:

- *$m = f(L) = \rho \cdot L \cdot \pi((r + h)^2 - r^2)$ kun pidämme suureita ρ , r ja h parametreina, eli käsittelemme eripituisia putken pätkiä.*
- *$m = f(L, r, h, \rho) = \rho \cdot L \cdot \pi((r + h)^2 - r^2)$ missä meillä on neljä muuttujaa.*
- *$m = f \left(\begin{bmatrix} L \\ r \\ h \end{bmatrix} \right) = \rho \cdot L \cdot \pi((r + h)^2 - r^2)$ missä meillä on yhden vektorimuuttujan funktio ja pidämme ρ :ta parametrina.*

Kaikissa näissä tapauksissa pidämme π :tä vakiona mutta jos π :n paikalle sijoitetaan (epätarkka) likiarvo ja haluamme selvittää mikä on tämän approksimaation vaikutus voi syntyä tilanteita missä π :tä käsitellään muuttujana tai parametrina.

😊 Muuttujat, parametrit, vakiot, jatk.

Jos käytämme Matlab/Octavea voimme esimerkiksi kirjoittaa

```
rho=7.87
```

```
f=@(L,r,h) rho*L*pi*((r+h)^2-r^2)
```

tai jos käytämme vektoriargumenttia

```
rho=7.87
```

```
f=@(X) rho*X(1)*pi*((X(2)+X(3))^2-X(2)^2)
```

Huomaa, että jos muutamme rho:n arvoa niin meidän pitää toistaa funktion f määritelmää!

Kuristusperiaate

Jos meidän pitää määrittää raja-arvo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^4 + y^2},$$

niin voimme yrittää käyttää kuristusperiaatetta jos arvelemme, että raja-arvo on 0 ja silloin meidän pitää korvata $\frac{5x^2y^2}{x^4+y^2}$ suuremmalla funktiolla (kun olemme ottaneet itseisarvon, mikä tässä ei ole tarpeen) jolle on helpompaa osoittaa, että raja-arvo on 0. Voimme ensin todeta, että $x^4 \geq 0$ josta seuraa, että $x^4 + y^2 \geq y^2$ jolloin

$$0 \leq \frac{5x^2y^2}{x^4 + y^2} \leq \frac{5x^2y^2}{y^2} = 5x^2.$$

Nyt on selvää (?), että

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 5x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} 5x^2 = 5 \cdot 0^2 = 0,$$

ja näin ollen saamme kuristusperiaatteen nojalla

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^4 + y^2} = 0.$$

💡 Esimerkki: Raja-arvo

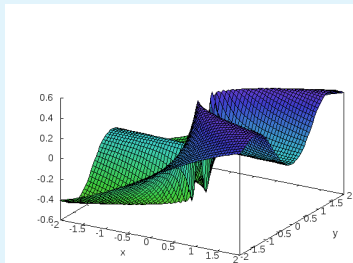
Jos haluamme määrittää raja-arvon $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, niin voimme laskea raja-arvon sädettä $(\alpha t, \beta t)$ pitkin ja kun määrittelemme $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ saamme

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\alpha t, \beta t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha t \beta^2 t^2}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} t \frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} = 0$$

Tästä seuraa (**ainoastaan!**), että jos raja-arvo on olemassa niin se on 0.

Nyt osoittautuu, että raja-arvoa ei ole olemassa koska jos valitsemme $x = t^2$ ja $y = t$ ja laskemme raja-arvon kun $t \rightarrow 0^+$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 t^2}{(t^2)^2 + t^4} = \frac{1}{2} \neq 0$,
josta seuraa ettei $f(x, y)$ ole "lähellä" 0 jos (x, y) on "riittävän lähellä" $(0, 0)$.



💡💡 Derivoimisjärjestyksen vaihto

Oleta, että funktion $f(x, y)$ osittaisderivaatat $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$ ja $f_{yx}(x, y)$ ovat olemassa (ainakin) kaikissa pisteissä (x, y) joilla $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ ja, että funktiot $f_{xy}(x, y)$ ja $f_{yx}(x, y)$ ovat jatkuvia pisteessä (x_0, y_0) . Silloin pätee $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

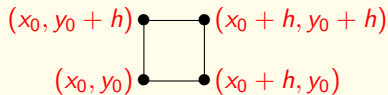
😊 Todistus

Olkkoon $0 < h < \frac{\delta}{2}$ ja määrittele funktiot u ja v siten, että

$$u(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) \quad \text{ja} \quad v(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y).$$

Funktio u on derivoituva välillä $(x_0, x_0 + h)$ ja jatkuva välillä $[x_0, x_0 + h]$ ja näin ollen väliarvolauseesta seuraa, että on olemassa luku $\theta_1 \in (0, 1)$ siten, että

$$u(x_0 + h) - u(x_0) = hu'(x_0 + \theta_1 h).$$



$$u(x_0 + h) - u(x_0) = v(y_0 + h) - v(y_0)$$

😊 Todistus, jatk.

Koska $hu'(x_0 + \theta_1 h) = h(f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0))$ voimme soveltaa väliarvolauseetta vielä kerran funktioon $y \mapsto f_x(x_0 + \theta_1 h, y)$ ja saamme

$$u(x_0 + h) - u(x_0) = h^2 f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 h),$$

missä $\theta_2 \in (0, 1)$.

"Samalla tavalla" toteamme myös, että

$$v(y_0 + h) - v(y_0) = h^2 f_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 h),$$

missä θ_3 ja $\theta_4 \in (0, 1)$. Nyt $u(x_0 + h) - u(x_0) = v(y_0 + h) - v(y_0)$ koska molemmat lausekkeet ovat

$f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)$ josta seuraa, että

$$h^2 f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 h) = h^2 f_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 h).$$

Jos nyt jaamme h^2 :lla, otamme raja-arvon kun $h \rightarrow 0$ ja käytämme hyväksi oletusta, että f_{xy} ja f_{yx} ovat jatkuvia, niin saamme väitteen

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

💡 Esimerkki: Osittaisderivaattoja

Jos $f(x, y, z) = \ln(1 + e^{x+yz^2})$ niin f :n osittaisderivaatat ovat seuraavat:

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \ln(1 + e^{x+yz^2}) = \frac{1}{1 + e^{x+yz^2}} e^{x+yz^2},$$

$$f_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \ln(1 + e^{x+yz^2}) = \frac{1}{1 + e^{x+yz^2}} e^{x+yz^2} z^2,$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \ln(1 + e^{x+yz^2}) = \frac{1}{1 + e^{x+yz^2}} e^{x+yz^2} 2yz.$$

Näin ollen funktion f derivaatta eli gradientti on

$$\begin{aligned} f'(x, y, z) &= Df(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \\ &= \left[\frac{1}{1 + e^{x+yz^2}} e^{x+yz^2}, \frac{1}{1 + e^{x+yz^2}} e^{x+yz^2} z^2, \frac{1}{1 + e^{x+yz^2}} e^{x+yz^2} 2yz \right] \\ &= \frac{1}{1 + e^{x+yz^2}} e^{x+yz^2} \mathbf{i} + \frac{1}{1 + e^{x+yz^2}} e^{x+yz^2} z^2 \mathbf{j} + \frac{1}{1 + e^{x+yz^2}} e^{x+yz^2} 2yz \mathbf{k}. \end{aligned}$$

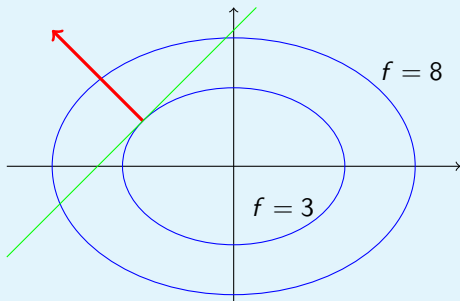
😊 Esimerkki: Gradientti ja tasa-arvokäyrä

Jos $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ niin sen gradientti eli eli derivaatta on

$$Df(x, y) = [x \quad 2y] = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

ja erityisesti pisteessä $(-2, 1)$ gradientti on $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Funktion pisteen $(-2, 1)$ kautta kulkeva tasa-arvokäyrä on (ellipsi) $\{(x, y) : \frac{1}{2}x^2 + y^2 = 3\}$ ja alla olevasta kuvioista nähdään, että gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyrää ja sen tangenttia pisteessä $(-2, 1)$ vastaan.

Koska gradientti pisteessä $(2, 1)$ on $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ niin tätä vastaan kohtisuorassa olevan, pisteen $(-2, 1)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ jolloin tämän suoran yhtälö on $y - 1 = x + 2$ eli $y = x + 3$.



😊 🚧 Derivaatta ja koordinaattisysteemi

Edellä annetun määritelmän mukaan esimerkiksi funktion $f(x, y) = xy$ derivaatta eli gradientti on $\mathbf{f}'(x, y) = [y \ x] = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, mutta tässä määritelmässä meillä on oletuksena, että koordinaattisysteemi on kiinnitetty. Jos valitsemme toisen, st -koordinaattisysteemin, esimerkiksi (kiertämällä xy -systeemin koordinaattiakseleita 45°) siten, että

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x + y \\ y - x \end{bmatrix},$$

niin $f(s, t) = \frac{1}{2}(s^2 - t^2)$ ja $f'(s, t) = [s \ -t] = s\mathbf{u} - t\mathbf{v}$ missä \mathbf{u} ja \mathbf{v} ovat s - ja t -akselien suuntaisia kantavektoreita, eli $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ ja $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{i})$.

Näin ollen voimme todeta, että derivaatta pisteessä \mathbf{x} "oikeasti" on lineaarikuvaus $\mathbf{h} \mapsto f'(\mathbf{x})\mathbf{h}$ ja tämän lineaarikuvauksen matriisiesitys (jota sitten käytetään laskuissa) riippuu käytetystä koordinaattisysteemistä. Samalla tavalla voimme sanoa, että funktion $g(x) = x^2$ derivaatta pisteessä $x = 2$ ei ole luku $g'(2) = 4$ vaan lineaarikuvaus "neljällä kertominen": $t \mapsto 4t$.

😊 Derivaatan tulosääntö ketjusäännön avulla

Derivaatan tulosääntö sanoo tunnetusti, että $(fg)' = f'g + fg'$.

Vaihtoehtoinen lähestymistapa on seuraava: Kirjoita $p(t) = f(t)g(t)$ yhdistettynä funktiona $p(t) = (h \circ k)(t) = h(k(t))$ missä $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on

$h \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = xy$ ja $k(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$. Derivaatan määritelmän nojalla

$$h' \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = [y \quad x] \quad \text{ja} \quad k'(t) = \begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{bmatrix}.$$

Ketjusäännön mukaan pätee silloin

$$p'(t) = h'(k(t))k'(t) = [g(t) \quad f(t)] \begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{bmatrix} = g(t)f'(t) + f(t)g'(t).$$

💡 Laplacen yhtälö $u_{xx} + u_{yy} = 0$ napakoordinaateissa

Oletamme, että u toteuttaa ns. Laplacen yhtälön $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ja tehtävänä on selvittää minkä yhtälön funktio $v(r, \theta) = u(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ toteuttaa. (Tässä siis v on funktio u esitettyinä napakoordinaattien funktiona).

Osittaisderivaattoja laskemalla (ja ketjusääntöä hyväksi käyttäen) toteamme, että

$$v_r(r, \theta) = u_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos(\theta) + u_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \sin(\theta),$$
$$v_\theta(r, \theta) = u_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta))(-r \sin(\theta)) + u_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r \cos(\theta).$$

Osoittautuu, että meidän ei tarvitse laskea $v_{r\theta} = v_{\theta r}$ (mutta tämä ei ole lainkaan etukäteen selvää) mutta sen sijaan meidän pitää laskea

$$v_{rr}(r, \theta) = u_{xx}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos^2(\theta) + 2u_{xy}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos(\theta) \sin(\theta) + u_{yy}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \sin^2(\theta),$$

💡 Laplacen yhtälö napakoordinaateissa, jatkuu

ja

$$\begin{aligned}v_{\theta\theta}(r, \theta) &= u_{xx}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r^2 \sin(\theta)^2 \\ &\quad + 2u_{xy}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))(-r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)) \\ &\quad + u_{yy}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r^2 \cos(\theta)^2 \\ &\quad - u_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r \cos(\theta) - u_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r \sin(\theta).\end{aligned}$$

Oletuksen mukaan $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$, erityisesti

$$u_{xx}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + u_{yy}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 0,$$

ja tämän sekä kaavan $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$ avulla näemme, että

$$v_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r}v_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$$

💡 Esimerkki: Suunnatut derivaatat

Jos funktio f on kolmen muuttujan derivoituva funktio ja en suunnatut derivaatat pisteessä \mathbf{x}_0 suuntiin $\mathbf{u}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{u}_3 = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$ ovat 1, 2 ja 3 niin voimme määrittää derivaatan pisteessä \mathbf{x}_0 koska vektorit \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 ja \mathbf{u}_3 ovat lineaarisesti riippumattomia (eli erisuuntaisia): Oletamme, että $f'(\mathbf{x}_0) = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ jolloin suunnatun derivaatan määritelmän nojalla saamme yhtälösystemin

$$1 = D_{\mathbf{u}_1} f(\mathbf{x}_0) = (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}A + \frac{1}{\sqrt{2}}B,$$

$$2 = D_{\mathbf{u}_2} f(\mathbf{x}_0) = (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}B - \frac{1}{\sqrt{2}}C,$$

$$3 = D_{\mathbf{u}_3} f(\mathbf{x}_0) = (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + \mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}A + \frac{1}{\sqrt{2}}C.$$

Matriisimuodossa tämä systeemi ja sen ratkaisu ovat

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

💡 Esimerkki: Ketjusääntö ja virtausmekaniikka

Oletamme, että neste virtaa tasossa siten, että nopeus pisteessä (x, y) hetkellä t on $u(x, y, t)\mathbf{i} + v(x, y, t)\mathbf{j}$. Jos nyt haluamme määrittää hetkellä t pisteessä (x, y) sijaitsevan "nestepartikkelin" kiihtyvyys niin ensin oletamme, että partikkelin sijainti hetkellä t on $(X(t), Y(t))$ (jolloin siis $X(t) = x$ ja $Y(t) = y$ jos se on pisteessä (x, y) hetkellä t). Silloin nopeus on $X'(t)\mathbf{i} + Y'(t)\mathbf{j}$, josta seuraa, että $X'(t) = u(X(t), Y(t), t)$ ja $Y'(t) = v(X(t), Y(t), t)$. Kiihtyvyys taas on $X''(t)\mathbf{i} + Y''(t)\mathbf{j}$ ja ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned} X''(t) &= u_x(X(t), Y(t), t)X'(t) + u_y(X(t), Y(t), t)Y'(t) \\ &\quad + u_t(X(t), Y(t), t) \\ &= u_x(X(t), Y(t), t)u(X(t), Y(t), t) + u_y(X(t), Y(t), t)v(X(t), Y(t), t) \\ &\quad + u_t(X(t), Y(t), t) \\ &= u_x(x, y, t)u(x, y, t) + u_y(x, y, t)v(x, y, t) + u_t(x, y, t), \end{aligned}$$

missä viimeisellä rivillä käytimme oletusta $x(t) = x$ ja $Y(t) = y$.

💡 Esimerkki: Ketjusääntö ja virtausmekaniikka, jatk.

Samalla tavalla saamme

$$Y''(t) = v_x(x, y, t)u(x, y, t) + v_y(x, y, t)v(x, y, t) + v_t(x, y, t).$$

Näin ollen kiihtyvyyks on

$$\begin{aligned} & (u_x(x, y, t)u(x, y, t) + u_y(x, y, t)v(x, y, t) + u_t(x, y, t)) \mathbf{i} \\ & + (v_x(x, y, t)u(x, y, t) + v_y(x, y, t)v(x, y, t) + v_t(x, y, t)) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Huomaa, että tämä on epälineaarinen lauseke eli jos u korvataan $u_1 + u_2$:lla ja samoin v korvataan $v_1 + v_2$:lla niin tulos ei ole kahden lausekkeen summa missä toisessa esiintyy u_1 ja v_1 ja toisessa u_2 ja v_2 . Suuri osa virtausmekaniikan hankaluuksista on seuraus tästä epälineaarisuudesta.

😊 Milloin pätee $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ kun $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \leq \rho$?

Jos $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuvasti derivoituva, niin jokainen komponentti f_j , $1 \leq j \leq m$, on jatkuvasti derivoituva ja löytyy luvut c_j siten, että $\|f'_j(\mathbf{v})\| \leq C$ kun $\|\mathbf{v}\| \leq \rho$. Jos nyt \mathbf{x} ja \mathbf{y} ovat sellaisia, että $\|\mathbf{x}\| \leq \rho$ ja $\|\mathbf{y}\| \leq \rho$ niin määritellään funktio h kaavalla $h_j(t) = f_j((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x})$. Silloin h_j on derivoituva reaaliarvoinen funktio ja väliarvolauseen nojalla

$$f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{y}) = h_j(1) - h_j(0) = h'_j(t_j)(1 - 0),$$

missä $t_j \in (0, 1)$. Ketjusäännön nojalla

$$h'_j(t_j) = f'_j((1-t_j)\mathbf{y} + t_j\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

joten

$$|f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{y})| = |h_j(1) - h_j(0)| \leq \|f'_j((1-t_j)\mathbf{y} + t_j\mathbf{x})\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq c_j \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

koska $\|(1-t_j)\mathbf{y} + t_j\mathbf{x}\| \leq (1-t_j)\|\mathbf{y}\| + t_j\|\mathbf{x}\| \leq \rho$. Näin ollen $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

missä $C = \sqrt{c_1^2 + \dots + c_m^2}$.

😊 Milloin pätee $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \geq c\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ kun $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \leq \rho$?

Ei välttämättä jos $d > 1$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ on jatkuvasti derivoituva, $\rho > 0$ ja $\|\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u}\| > 0$ kun $\|\mathbf{v}\| \leq \rho$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ ja $\|\mathbf{u}\| = 1$ kuten seuraava esimerkki näyttää:

Olkoon $\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \cos(\frac{2\pi t}{\rho}) \\ e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \sin(\frac{2\pi t}{\rho}) \end{bmatrix}$ kun $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$. Silloin

$$\mathbf{g}'(\mathbf{v}) = \frac{2\pi}{\rho} \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \cos(\frac{2\pi t}{\rho}) & -e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \sin(\frac{2\pi t}{\rho}) \\ e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \sin(\frac{2\pi t}{\rho}) & e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \cos(\frac{2\pi t}{\rho}) \end{bmatrix},$$

Jos $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ niin

$$\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u} = \frac{2\pi}{\rho} e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi t}{\rho})u_1 - \sin(\frac{2\pi t}{\rho})u_2 \\ \sin(\frac{2\pi t}{\rho})u_1 + \cos(\frac{2\pi t}{\rho})u_2 \end{bmatrix},$$

😊 Milloin pätee $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \geq c\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ kun $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \leq \rho$?
jatk.

joten

$$\begin{aligned}\|\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u}\|^2 &= \frac{4\pi^2}{\rho^2} e^{\frac{4\pi x}{\rho}} \left(\cos\left(\frac{2\pi t}{\rho}\right)^2 u_1^2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi t}{\rho}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{\rho}\right) u_1 u_2 \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{2\pi t}{\rho}\right)^2 u_2^2 + \sin\left(\frac{2\pi t}{\rho}\right)^2 u_1^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos\left(\frac{2\pi t}{\rho}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{\rho}\right) u_1 u_2 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\rho}\right)^2 u_2^2 \right) = e^{2x} \|\mathbf{u}\|^2.\end{aligned}$$

Tästä päättelemme, että jos $\|\mathbf{v}\| \leq \rho$, niin $s \geq -\rho$ ja

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u}\| \geq \frac{2\pi}{\rho} e^{-2\pi} \|\mathbf{u}\|,$$

kaikilla vektoreilla \mathbf{u} . Jos nyt $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix}$ niin $\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) = 0$.

😊 Esimerkki: Tangenttitaso

Jos haluamme määrittää funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ kuvaajan tangenttitason kun $x = 2$ ja $y = 1$ niin kirjoitamme ensin yhtälön muodossa $z = x^2 - y^2$ eli $g(x, y, z) = 0$ missä $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$ (vaikka se voisi yhtä hyvin olla $g(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z$). Funktion g derivaatta on $Dg(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja pisteessä $(2, 1, f(2, 1)) = (2, 1, 3)$ tämä derivaatta on $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Tämä vektori on pinnan $g(x, y, z) = 0$ normaali pisteessä $(2, 1, 3)$ ja samalla pinnan tässä pisteessä otetun tangenttitason normaali. Koska $(2, 1, 3)$ on tangenttitason piste niin $\mathbf{v} = (x - 2)\mathbf{i} + (y - 1)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k}$ on tangenttitason suuntainen vektori jos (x, y, z) on myös tangenttitason piste. Näin ollen \mathbf{v} on kohtisuorassa normaalia \mathbf{n} vastaan eli $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ ja tästä ehdosta saamme tangenttitason yhtälön

$$4(x - 2) - 2(y - 1) - (z - 3) = 0 \quad \text{eli} \quad 4x - 2y - z = 3.$$

💡 Lineaarinen approksimointi, suhteellinen virhe

Jos meidän pitää arvioida virhettä, joka syntyy kun ympyräkartion tilavuus lasketaan kaavalla $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ja tiedämme ainoastaan, että säteen r mitatun arvon virhe on korkeintaan 3% ja korkeuden h mitatun arvon virhe on korkeintaan 2% niin emme saa absoluuttista ylärajaa tilavuuden virheelle mutta saamme helposti approksimatiivisen ylärajan suhteelliselle virheelle seuraavalla tavalla: Lineaarisen approksimoinnin perusteella:

$$\Delta V = V(r + \Delta r, h + \Delta h) - V(r, h) \approx V_r(r, h)\Delta r + V_h(r, h)\Delta h,$$

josta seuraa, että

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\frac{1}{3}2\pi rh\Delta r}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} + \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 \Delta h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = 2 \cdot \frac{\Delta r}{r} + 1 \cdot \frac{\Delta h}{h}.$$

Koska oletamme, että $|\frac{\Delta r}{r}| \leq 0.03$ ja $|\frac{\Delta h}{h}| \leq 0.02$ niin

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| \lesssim 2 \cdot 0.03 + 1 \cdot 0.02 = 0.08,$$

eli suhteellinen virhe on korkeintaan 8%.

😊 Esimerkki: Lineaarinen approksimointi

Sylinterimäisen säiliön sisältämä nestemäärä, kun säiliön akseli on vaakasuorassa on $V = L(r^2 \arccos(1 - \frac{h}{r}) - (r - h)\sqrt{2hr - h^2})$ missä L on säiliön pituus, joka on noin 2 m, r on säde, joka on noin 50 cm ja h on nestepinnan korkeus, joka myös on noin 50 cm. Pituuden L ja säteen r pystymme mittaamaan 1 cm tarkkuudella. Miten tarkasti meidän on mitattava h jotta saisimme nestemäärän lasketuksi 50 litran tarkkuudella? Määrittelemme

$$f(L, r, h) = L\left(r^2 \arccos\left(1 - \frac{h}{r}\right) - (r - h)\sqrt{2hr - h^2}\right).$$

Silloin (funktion $\arccos(t)$ derivaatta on $-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$)

$$f_L(L, r, h) = \left(r^2 \arccos\left(1 - \frac{h}{r}\right) - (r - h)\sqrt{2hr - h^2}\right)$$

$$f_r(L, r, h) = 2Lr \arccos\left(1 - \frac{h}{r}\right) - Lr^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2}} \frac{h}{r^2} - L\sqrt{2hr - h^2} - L(r - h) \frac{h}{\sqrt{2hr - h^2}},$$

😊 Esimerkki: Lineaarinen approksimointi, jatk.

$$f_h(L, r, h) = Lr^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2}} \cdot \frac{1}{r} + L\sqrt{2hr - h^2} - L(r - h) \frac{r - h}{\sqrt{2hr - h^2}},$$

ja erityisesti

$$f_L(200, 50, 50) = \frac{\pi}{2} \cdot 2500 \approx 3927$$

$$f_r(200, 50, 50) = \frac{\pi}{2} \cdot 20000 - 10000 - 10000 \approx 11416,$$

$$f_h(200, 50, 50) = 10000 + 10000 = 20000.$$

Lineaarisella approksimoinnilla saamme

$$\Delta f \approx f_L \Delta L + f_r \Delta r + f_h \Delta h.$$

😊 Esimerkki: Lineaarinen approksimointi, jatk.

josta seuraa, että

$$|\Delta f| \lesssim |f_L||\Delta L| + |f_r||\Delta r| + |f_h||\Delta h| \leq 3927 \cdot 1 + 11416 \cdot 1 + 20000 \cdot |\Delta h|$$

koska $|\Delta L| \leq 1$ ja $|\Delta r| \leq 1$. Jos nyt haluamme, että $|\Delta f| \leq 50 \cdot 10^3$ niin meidän täytyy vaatia, että

$$3927 \cdot 1 + 21416 \cdot 1 + 20000 \cdot |\Delta h| \leq 50000,$$

ja tästä seuraa, että pitää olla $|\Delta h| \leq 2.4$.

💡 Huom

Tässä kuten muissa vastaavissa laskuissa ΔL on "virhe" tai "poikkeama" muuttujan L arvossa, eli $\Delta L = L - L_0$ mutta Δ :lla merkitään myös Laplacen differentiaalioperaattoria: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

💡 Esimerkki: Lineaarinen approksimointi

Funktiosta f tiedämme, että $f(3, 2) = 2.7$, $f(3.1, 2.2) = 2.75$ ja $f(2.9, 2.1) = 2.68$. Nyt voimme seuraavalla tavalla arvioida derivaattaa käyttäen mikä on $f(3.2, 1.9)$:

Lineaarisella approksimoinnilla saamme

$$f(3 + \Delta x, 2 + \Delta y) \approx f(3, 2) + f_x(3, 2)\Delta x + f_y(3, 2)\Delta y.$$

Jos ensin valitsemme $\Delta x = 0.1$ ja $\Delta y = 0.2$ ja sitten $\Delta x = -0.1$ ja $\Delta y = 0.1$ niin saamme "yhtälösystemin"

$$2.75 = f((3 + 0.1, 2 + 0.2) \approx 2.7 + f_x(3, 2) \cdot 0.1 + f_y(3, 2) \cdot 0.2,$$

$$2.68 = f(3 - 0.1, 2 + 0.1) \approx 2.7 + f_x(3, 2) \cdot (-0.1) + f_y(3, 2) \cdot 0.1,$$

eli

$$0.5 \approx f_x(3, 2) + 2f_y(3, 2),$$

$$-0.2 \approx -f_x(3, 2) + f_y(3, 2).$$

💡 Esimerkki: Lineaarinen approksimointi, jatk.

Laskemalla yhteen saamme ensin $f_y(3, 2) \approx 0.1$ ja sitten sijoittamalla tämän tuloksen ensimmäiseen yhtälöön saamme $f_x(3, 2) \approx 0.5 - 0.2 = 0.3$. Jos nyt valitsemme $\Delta x = 0.2$ ja $\Delta y = -0.1$ niin lineaarisella approksimoinnilla saamme

$$\begin{aligned} f(3.2, 1.9) &= f(3 + 0.2, 2 - 0.1) \\ &\approx f(3, 2) + f_x(3, 2) \cdot 0.2 + f_y(3, 2) \cdot (-0.1) \\ &\approx 2.7 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot (-0.1) \\ &= 2.7 + 0.06 - 0.01 = 2.75. \end{aligned}$$

Huomaa, että tässä virhelähteenä on myös epätarkkuudet osittaisderivaattojen arvoissa.

😊 🚧 Differentiaali??

Sanomme, että

$$\psi = a(x, y) dx + b(x, y) dy,$$

on 1. kertaluvun differentiaalimuoto (tai differentiaalimuotokenttä koska kertoimet a ja b ovat muuttujien x ja y funktioita) tai lyhyemmin vain differentiaali. Tässä 1. kertaluvun tapauksessa voimme pitää dx symbolina, jota vastaa x -akselin suuntaista yksikkövektoria ja samoin dy symbolina jota vastaa y -akselin suuntaista yksikkövektoria jolloin differentiaalia ψ vastaa vektorifunktio $[a(x, y) \quad b(x, y)]$.

Tällaista differentiaalia voimme (kunhan kertoimet ovat esim. jatkuvia) integroida käyrää pitkin: Jos $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t \in [a, b]$ on suunnatun käyrän C parametriesitys (ja funktiot $x(t)$ ja $y(t)$ ovat esim. paloittain jatkuvasti derivoituvia) niin

$$\int_C \psi = \int_a^b (a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)) dt.$$

😊 ⚠ Differentiaali??, jatk.

Jos nyt $a(x, y) = f_x(x, y)$ ja $b(x, y) = f_y(x, y)$ niin ketjusäännön nojalla integroitavana on derivaatta jolloin saamme integraalin suoraan sijoittamalla ja

$$\int_C \psi = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = f(C:n \text{ loppupiste}) - f(C:n \text{ alkupiste}).$$

Jos siis $a(x, y) = f_x(x, y)$ ja $b(x, y) = f_y(x, y)$ niin kirjoitamme $\psi = df$, sanomme, että ψ on funktion f kokonaisdifferentiaali ja

$$df = f_x dx + f_y dy,$$

ja tämän vastine on approksimointikaavaa

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y.$$

Mutta jos ei päde $a(x, y) = f_x(x, y)$ ja $b(x, y) = f_y(x, y)$ jollain funktiolla f niin $\int_C \psi$ on edelleen laskettavissa mutta tulos ei enää riipu pelkästään differentiaalista ψ ja käyrän päätepisteistä vaan myös siitä miten käyrä kulkee alkupisteestä loppupisteeseen.

😊 Miksi Newtonin menetelmä konvergoi niin nopeasti kun se konvergoi?

Oletamme, että funktio $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ on derivoituva ja sellainen, että on olemassa vakioita L ja M siten, että

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\| \leq L\|\mathbf{v}\| \quad \text{ja} \quad \|\mathbf{f}'(\mathbf{x})^{-1}\| \leq M,$$

kaikilla \mathbf{x} ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ (tai ainakin kun $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ ja $\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|$). Lisäksi oletamme, että $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$. Jos käytämme Newtonin menetelmää yhtälösystemin $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ratkaisemiseksi ja laskemme $(\mathbf{x}_n)_{n=0}^{\infty}$ niin pätee

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_*\| \leq \frac{1}{2}ML\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_*\|^2, \quad n \geq 1.$$

Perustelu tähän on seuraava: Jos $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ on jatkuvasti derivoituva niin pätee $\mathbf{g}(1) - \mathbf{g}(0) - \mathbf{g}'(0) = \int_0^1 (\mathbf{g}'(t) - \mathbf{g}'(0)) dt$. Jos $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$ niin $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(\mathbf{x} + t\mathbf{h})\mathbf{h}$ jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h} &= \mathbf{g}(1) - \mathbf{g}(0) - \mathbf{g}'(0) \\ &= \int_0^1 (\mathbf{f}'(\mathbf{x} + t\mathbf{h})\mathbf{h} - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}) dt. \end{aligned}$$

😊 Miksi Newtonin menetelmä konvergoi niin nopeasti kun se konvergoi? jatk.

Tästä epäyhtälöstä ja oletuksista seuraa, että

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\| &\leq \int_0^1 \|\mathbf{f}'(\mathbf{x} + t\mathbf{h})\mathbf{h} - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\| dt \\ &\leq \int_0^1 Lt\|\mathbf{h}\|^2 dt = \frac{1}{2}L\|\mathbf{h}\|^2.\end{aligned}$$

Jos nyt valitsemme $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ ja $\mathbf{h} = \mathbf{x}_ - \mathbf{x}_n$ niin $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{h}) = \mathbf{0}$ ja*

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_* = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_* - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{h}),$$

ja oletuksesta edellä johdetusta epäyhtälöstä seuraa, että

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_*\| \leq M\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{h}\| \leq \frac{1}{2}ML\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_*\|^2.$$

Tästä tuloksesta seuraa, että ainakin jos $\frac{1}{2}ML\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_\| < 1$ jollain $m \geq 0$ niin vektorit \mathbf{x}_n suppenevat kohti ratkaisua \mathbf{x}_* ja kun $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_*\|$ on riittävän pieni, niin etäisyys ratkaisuun pienenee hyvin nopeasti.*