Aalto-yliopisto

MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem) Gripenberg, Nieminen, Ojanen, Tiilikainen, Weckman
Harjoitus 2
11.1–15.1.2016, viikko 2

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 18.1.2016 klo. 15:00.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Opiskelija O laski (jatkuvan) funktion g osittaisderivaatat ja sai vastaukseksi

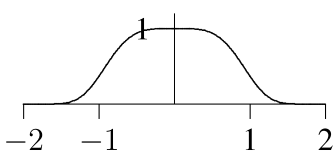
$$g_x(x,y) = 2xy^2 - \sin(xy), \quad g_y(x,y) = 2x^2y - x^2\cos(xy).$$

Mistä nähdään, että jotain on mennyt pieleen laskuissa?
Vihje: Älä määritä funktiota g vaan laske osittaisderivaattoja!

P2. Oleta, että f on jatkuvasti derivoituva funktio: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja että $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $u(t,x) = f(x - at)$ niin u on osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$u_t(t,x) + au_x(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

ratkaisu. Piirrä funktioiden $x \mapsto u(t,x)$ kuvaajat muttujan t arvoilla $t = 3$ ja $t = 6$ kun $a = 1$ ja f näyttää tällaiselta:



P3. Oleta, että B on $d \times d$-matriisi ja määrittele funktiot $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ja $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} \quad \text{ja} \quad g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}B\mathbf{x}.$$

(a) Määritä funktion $\mathbf{f}$ derivaatta pisteessä $\mathbf{x}$.
(b) Määritä funktion g derivaatta pisteessä $\mathbf{x}$. Mikä on vastaus jos B on symmetrinen?

Voit joko käyttää derivaatan määritelmää ja laske matriiseilla tai kirjoittaa $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ja $g(\mathbf{x})$ summina, joissa esiintyvät vektorin $\mathbf{x}$ komponentit x_j ja B:n elementit $B(i,j)$ ja sitten laskea osittaisderivaatat.
Vihje: (a)-kohta on yhtä yksinkertainen kuin tapauksessa $d = 1$ ja derivaatan määritelmän käyttäminen tarkoittaa, että sinun pitää kirjoittaa $g(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - g(\mathbf{x})$ muodossa $L\mathbf{h} + \eta(\mathbf{h})$ missä $|\eta(\mathbf{h})|/\|\mathbf{h}\| \to 0$ kun $\|\mathbf{h}\| \to 0$ (ja missä sekä L että η voivat riippua B:stä ja x:stä) ja silloin L on derivaatta. Muista myös, että jos M on $d \times d$-matriisi ja $\mathbf{u}$ sekä $\mathbf{v}$ ovat pystyvektoreita, niin $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}M\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$.

P4. Oleta, että funktio $u(t,x)$ toteuttaa yhtälön $u_t(t,x) = u_{xx}(t,x)$ kun $t > 0$ ja $0 < x < 1$ ja että $u(t,0) = u(t,1) = 0$. Määritä vakiot α, β ja γ, siten, että jos $v(s,y) = u(\gamma s, \alpha y + \beta)$ niin $v(s,y)$ toteuttaa yhtälön $v_s(s,y) = av_{yy}(s,y)$ kun $s > 0$ ja $A < y < B$ ja $v(s,A) = v(s,B) = 0$. Miten $u(0,x)$ olisi valittava jotta $v(0,y) = f(y)$, missä f in jokin annettu funktio?

Vastaus: $\alpha = \frac{1}{B-A}$, $\beta = -\frac{A}{B-A}$, $\gamma = \frac{a}{(B-A)^2}$, $u(0,x) = f((B-A)x + A)$.

P5. Oleta, että $u(t, x)$ on toteuttaa ns. aaltoyhtälön $u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x)$.

(a) Arvaamme (kun kaikki muut mahdollisuudet on käyty läpi) että voimme esittää ratkaisun muodossa $u(t, x) = v(x + ct, x - ct)$ ja määrittelemme $p = x + ct$ ja $q = x - ct$. Ratkaise x ja t näistä yhtälöistä ja esitä $v(p, q)$ funktion u avulla (sijoittamalla ratkaisut lausekkeeseen $u(t, x)$).

(b) Esitä $v_{pq}(p, q)$ funktion u osittaisderivaattojen avulla ja osoita, että $v_{pq}(p, q) = 0$.

(c) Millä perusteilla voit (b)-kohdan avulla päätellä, että $v_p(p, q) = h(p)$ missä h on jokin funktio ja tämän nojalla sitten, että $v(p, q) = f(p) + g(q)$.

(d) Mikä on (a)- ja (c) kohtien vastausten nojalla aaltoyhtälön $u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x)$ yleinen ratkaisu?

Vihje: Oleta, että kaikki funktiot ovat riitävän monta kertaa derivoituvia!