K3/P3, syksy 2001. Differenssiyhtälöt ja Z-muunnos
Pekka Alestalo

1 Johdanto

Differenssiyhtälö on differentiaaliyhtälön diskreetti vastine, jonka voidaan ajatella syntyvän siten, että esimerkiksi aika t muuttuu vain hyppäyksittäin eikä jatkuvasti. Tämän vuoksi differenssiyhtälöiden avulla voidaan mallintaa systeemejä, joita koskevat mittaukset tehdään esimerkiksi ajanhetkinä $0, T, 2T, 3T, \dots$, jolloin vastaavat mittaustulokset muodostavat lukujonon $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$. Tällaiset ilmiöt ovat yleisiä mm. säätötekniikassa ja taloustieteessä.

2 Differenssiyhtälöt

2.1 Peruskäsitteitä

Differenssiyhtälössä esiintyy tuntematon lukujono $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$, jonka peräkkäisten termien välillä on annettu jokin riippuvuus. Esimerkkejä differenssiyhtälöistä ovat $a_{n+1} - 3a_n = 0$, $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1$, $a_{n+3} + a_n = 3^n$. Yhtälön kertaluku on suurimman ja pienimmän indeksin erotus, esimerkkien kohdalla kertaluvut ovat 1, 2 ja 3.

Differenssiyhtälöihin liittyy yleensä joko alku- tai reunaehtoja. Alkuehtojen kohdalla tunnetaan jonon alkupään termejä, esim. $a_0 = 2$, $a_1 = 5$. Jos alkuehtoja on yhtä monta kuin on yhtälön kertaluku, niin yhtälön ratkaisu määräytyy yksikäsitteisesti. Reunaehtojen kohdalla tunnetaan kaksi jonon termiä, mutta ne eivät ole peräkkäisiä. Reunaehdot voivat olla esimerkiksi muotoa $a_0 = 1$, $a_{100} = 0$, jolloin yleensä vain näiden välissä olevat jonon termit $a_1, \dots, a_{99}$ ovat käytännön kannalta kiinnostavia, mutta muutkin määräytyvät yhtälön nojalla. Reunaehdot saattavat olla myös sellaista muotoa, ettei yhtälöllä ole lainkaan ratkaisua.

Differenssiyhtälöihin liittyvä terminologia on lähes sama kuin differentiaaliyhtälöiden kohdalla, joten käsitteet lineaarinen, epälineaarinen, vakiokertoiminen, homogeeninen tai epähomogeeninen differenssiyhtälö ovat helposti määriteltävissä. Käsittelemme pääasiassa toisen kertaluvun lineaarisia vakiokertoimisia differenssiyhtälöitä, jotka ovat yleisesti muotoa $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n = f(n)$, missä $p, q \in \mathbf{R}$ ja $f(n)$ on annettu lauseke; sitä kutsutaan yhtälön herätejonoksi. Homogeenisen yhtälön tapauksessa $f(n) = 0$ kaikilla n.

2.2 Lineaaristen yhtälöiden ratkaiseminen

Lineaariset vakiokertoimiset yhtälöt voidaan ratkaista esimerkiksi muotoa $a_n = \alpha^n$ olevan yritteen avulla. Tämä johtaa useisiin eri tapauksiin, ja seuraavassa käsittelemmekin differenssiyhtälöitä systemaattisemmin Z-muunnoksen avulla.

3 Z-muunnos

3.1 Peruskäsitteitä

Z-muunnos on tietysssä mielessä Laplace-muunnoksen diskreetti muoto, joka soveltuu differenssiyhtälöiden ratkaisemiseen siinä missä Laplace-muunnos sopii differentiaaliyhtälöihin.

Tarkastellaan lukujonoa $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$. Sanotaan, että jono on Z-muuntuva, jos sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ suppenee jollakin arvolla $z = z_0$. Majoranttiperiaatteen mukaan sarja suppenee tällöin kaikilla arvoilla z, joille $|z| > |z_0|$. Sarjan summafunktio

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

on tällöin lukujonon $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ Z-muunnos. Käytämme merkintöjä $A(z) = Z(a_n)$ ja lyhyemmin $A(z) \doteq (a_n)$.

Jos toisaalta tunnetaan funktio $A(z)$, joka on jonkin tuntemattoman jonon (a_n) Z-muunnos, saadaan jono (a_n) selville seuraavalla tavalla. Ensinnäkin $a_0 = \lim_{z\to\infty} A(z)$, ja sen jälkeen induktiivisesti $a_1 = \lim_{z\to\infty} z(A(z) - a_0)$, $a_2 = \lim_{z\to\infty} z^2(A(z) - a_0 - a_1/z)$, $a_3 = \lim_{z\to\infty} z^3(A(z) - a_0 - a_1/z - a_2/z^2)$ jne.

Jono (a_n) määräytyy siis yksikäsitteisesti funktiosta $A(z)$, ja voimme käyttää merkintää $(a_n) = Z^{-1}A(z)$.

Z-muunnoksen tärkeimmät ominaisuudet ovat

- lineaarisuus: $Z(a_n + b_n) = Z(a_n) + Z(b_n)$ ja $Z(ca_n) = cZ(a_n)$, kun $c \in \mathbf{R}$;
- käänteismuunnoksen lineaarisuus, joka seuraa edellisestä;
- derivointi: $Z(na_n) = -zA'(z)$, jos $Z(a_n) = A(z)$;
- tekijän erottaminen: $Z(c^n a_n) = A(z/c)$, jos $c \in \mathbf{R}$ ja $c \neq 0$.

Seuraavat Z-muunnokset voidaan johtaa suoraan määritelmää ja yllä mainittuja ominaisuuksia käyttämällä.

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
$(1) = (1, 1, 1, \dots)$	$z/(z-1)$
$(n) = (0, 1, 2, \dots)$	$z/(z-1)^2$
$(n^2) = (0, 1, 4, \dots)$	$z(z+1)/(z-1)^3$
$(\alpha^n) = (1, \alpha, \alpha^2, \dots)$	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n) = (0, \alpha, 2\alpha^2, \dots)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2)) = (1, 0, -1, 0, \dots)$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2)) = (0, 1, 0, -1, 0, \dots)$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha)) = (0, \sin\alpha, \sin 2\alpha, \dots)$	$z\sin\alpha/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha)) = (1, \cos\alpha, \cos 2\alpha, \dots)$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$

Esimerkki 1. Laskemme Z-käänteismuunnoksen lausekkeesta $\dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$. Käytämme osamurtohajotelmaa kuten Laplace-muunnosten kohdalla, mutta jätämme tällä kertaa z-termin aluksi erilleen. Siis

$$\frac{z}{(z-1)(z+2)} = z\left(\frac{1}{(z-1)(z+2)}\right),$$

ja koska $\dfrac{1}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{1/3}{z-1} - \dfrac{1/3}{z+2}$, niin $\dfrac{z}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{1}{3}\dfrac{z}{z-1} - \dfrac{1}{3}\dfrac{z}{z+2}$. Lineaarisuutta ja taulukkoa käyttämällä käänteismuunnokseksi saadaan jono $\frac{1}{3}(1) - \frac{1}{3}((-2)^n)$. Kysytyn jonon yleinen termi on siis muotoa $a_n = \frac{1}{3}(1-(-2)^n)$.

Esimerkki 2. Laskemme Z-käänteismuunnoksen lausekkeesta $\dfrac{z^2}{(z-1)(z+2)}$. Käytämme osamurtohajotelmaa kuten edellä, mutta taas haluamme jättää osoittajaan yhden z-termin. Siispä kirjoitamme

$$\frac{z^2}{(z-1)(z+2)} = z\left(\frac{z}{(z-1)(z+2)}\right)$$

ja koska $\dfrac{z}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{1/3}{z-1} + \dfrac{2/3}{z+2}$, niin $\dfrac{z^2}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{1}{3}\dfrac{z}{z-1} + \dfrac{2}{3}\dfrac{z}{z+2}$, josta käänteismuunnokseksi saadaan jono $\frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3}((-2)^n)$. Kysytyn jonon yleinen termi on siis muotoa $a_n = \frac{1}{3}(1+2\cdot(-2)^n)$.

3.2 Sovelluksia differenssiyhtälöiden ratkaisemiseen

Z-muunnoksen tärkein ominaisuus on se, että se muuntaa differenssiyhtälön tavalliseksi yhtälöksi samalla tavalla kuin Laplace-muunnos tekee diffrentiaaliyhtälöille. Esimerkiksi differenssiyhtälö $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 15a_n = 0$, $n \geq 0$, voidaan tulkita yhtälöksi kolmen jonon välillä; ts. $(a_{n+2}) + 2(a_{n+1}) - 15(a_n) = (0)$. Tässä jonojen summa ja vakiolla kertominen määritellään alkioittain, eli esimerkiksi $(2^n) + 3\cdot((-1)^n) = (2^n + 3\cdot(-1)^n) = (4,-1,7,5,\dots)$. Jonot $(a_{n+1}) = (a_1, a_2, \dots)$ ja $(a_{n+2}) = (a_2, a_3, \dots)$ on saatu alkuperäisestä jonosta (a_n) siirto-operaatioiden avulla.

Yleisesti määritellään jonolle (a_n) siirrot $S_+(a_n) = (a_{n+1}) = (a_1, a_2, \dots)$ ja $S_-(a_n) = (0, a_0, a_1, \dots) =$ "(a_{n-1})", jos määritellään $a_{-1} = 0$.

Jos differenssiyhtälöstä otetaan Z-muunnos, on osattava laskea muunnokset $Z(a_{n+1})$ ja $Z(a_{n+2})$. Nämä selviävät seuraavasta lauseesta.

Lause 3. Olkoon $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ lukujono ja $A(z) = Z(a_n)$. Silloin pätee

$$Z(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0), \quad Z(a_{n+2}) = z^2\left(A(z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\right)$$

ja

$$Z(S_-(a_n)) = \frac{1}{z}A(z), \quad Z(S_-(S_-(a_n))) = \frac{1}{z^2}A(z).$$

Näiden avulla voimme nyt ratkaista differenssiyhtälöitä.

Esimerkki 4. Ratkaise differenssiyhtälö $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 15a_n = 0$ alkuarvoilla $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Tulkitaan yhtälö jonojen välisenä yhtälönä kuten yllä, ja otetaan yhtälön molemmilla puolilla olevista jonoista Z-muunnos. Näin saadaan

$$Z(a_{n+2}) + 2Z(a_{n+1}) - 15Z(a_n) = Z(0) = 0.$$

Merkitään $A(z) = Z(a_n)$ kuten tavallisesti, jolloin lauseen perusteella $Z(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0) = zA(z)$ ja $Z(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z) = z^2(A(z) - 1/z) = z^2A(z) - z$. Sijoittamalla nämä Z-muunnettuun yhtälöön saadaan

$$z^2A(z) - z + 2zA(z) - 15A(z) = 0, \text{ joten } A(z) = \frac{z}{z^2+2z-15}.$$

Tässä

$$\frac{z}{z^2+2z-15} = z\left(\frac{1}{(z-3)(z+5)}\right) = \frac{1}{8}\frac{z}{z-3} - \frac{z}{8}\frac{1}{z+5},$$

joten taulukon avulla saadaan ratkaisuksi

$$(a_n) = Z^{-1}A(z) = \frac{1}{8}Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\} - \frac{1}{8}Z^{-1}\left\{\frac{z}{z+5}\right\} = \frac{1}{8}(3^n) - \frac{1}{8}((-5)^n).$$

Ratkaisujonon yleinen termi on siis muotoa $a_n = \frac{1}{8}(3^n - (-5)^n)$. Lopuksi kannattaa tarkistaa, että tulos antaa ainakin jonon alkupään termit oikein.

Esimerkki 5. Ratkaise differenssiyhtälö $a_{n+2} + a_n = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. Jonojen avulla kirjoitettuna yhtälö tulee muotoon $(a_{n+2}) + (a_n) = (1)$, josta Z-muuntamisen jälkeen saadaan yhtälö $Z(a_{n+2}) + Z(a_n) = Z(1) = z/(z-1)$. Ennenkuin voidaan käyttää siirretyn jonon Z-muunnoksen lauseketta, on saatava selville a_0. Se voidaan laskea suoraan differenssiyhtälöstä seuraavalla tavalla: koska $a_n = 1 - a_{n+2}$, niin sijoittamalla $n = 0$ saadaan $a_0 = 1 - a_2 = 1 - 0 = 1$. Tämän jälkeen saadaan

$$z^2(A(z) - 1 - 0/z) + A(z) = \frac{z}{z-1},$$

joten

$$A(z) = \frac{z^2}{z^2+1} + \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{z^2-z}{z^2+1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-1}.$$

Käänteismuunnokset saadaan taulukon avulla, ja siten ratkaisu on

$$\begin{aligned}(a_n) &= \frac{1}{2}Z^{-1}\left\{\frac{z^2}{z^2+1}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{z}{z^2+1}\right\} + \frac{1}{2}Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} \\ &= \frac{1}{2}((\cos(n\pi/2)) - (\sin(n\pi/2)) + (1)).\end{aligned}$$

Ratkaisun yleinen termi on siis muotoa $a_n = \frac{1}{2}(\cos(n\pi/2) - \sin(n\pi/2) + 1)$.