Ol. $X$ metrinen avaruus (tai yl. topologinen avaruus) (3.6.)
Aset.

$$C(X) = C(X, \mathbb{K}) := \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ jatkuva} \}$$ vektoriavaruus

Aset. $BC(X) = BC(X, \mathbb{K}) := B(X) \cap C(X)$ rajoitettujen ja jatkuvien kuvausten $X \to \mathbb{K}$ avaruus, $B(X)$:n v.a.a.

Os. $BC(X) \subset B(X)$ suljettu normin $\| \cdot \|_\infty$ suhteen

3.8. Lause $\forall\, t \in X$ vektorialiavaruus

$$BC_t(X) = \{ f \in B(X) \mid f \text{ on jatkuva pisteessä } t \} \subset B(X)$$

on suljettu normin $\| \cdot \|_\infty$ suhteen.

Tod:

Olk. $g \in \overline{BC_t(X)}$ ja $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, f \in BC_t(X)$ s.e.

$\| g - f \|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. $f$ j:va pist. $t \Rightarrow \exists$ $t$:n avoin ympäristö $V \subset X$

s.e. $|f(t) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, u \in V$.

$$\Rightarrow |g(t) - g(u)| \leq \underbrace{|g(t) - f(t)|}_{< \|g-f\|_\infty} + |f(t) - f(u)| + \underbrace{|f(u) - g(u)|}_{< \|g-f\|_\infty}$$

$$< 2\|g - f\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \forall\, u \in V.$$

$\therefore$ $g$ jatkuva pist. $t \Rightarrow \overline{BC_t(X)} = BC_t(X)$ eli

$BC_t(X)$ suljettu.

3.9. Seuraus $(BC(X), \| \cdot \|_\infty)$ on Banach-avaruus.

Tod: Selvästi $BC(X) = \bigcap_{t \in X} BC_t(X)$ suljettu

3.6. $\Rightarrow$ väite. □

3.10. Määritelmä. Metrinen avaruus $\mathbb{X}$ on kompakti (3.7.)
jos jokaisella $\mathbb{X}$:n jonolla on suppeneva osajono.
(jonokompaktius)
Osajoukko $M \subset \mathbb{X}$ on kompakti jos se on kompakti
$\mathbb{X}$:n aliavaruutena l. jokaisella $M$:n jonolla on
suppeneva osajono, jonka raja-arvo kuuluu joukkoon $M$.

Joukko $M \subset \mathbb{X}$ on relatiivisti kompakti jos $\overline{M}$ on
kompakti.

(3.7a) →→

3.11. Seuraus Jos $\mathbb{X}$ on kompakti metrinen avaruus,
niin $(C(\mathbb{X}), \|\cdot\|_\infty)$ on Banach avaruus. Erityisesti
siis $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ on Banach.

Tod: Koska: kompaktin metrisen avaruuden
jatkuvat kuvaukset ovat rajoitettuja: $C(\mathbb{X}) = BC(\mathbb{X})$.

Huom. Seuraus 3.11. pätee myös kompakteille topologisille
avaruuksille.

Esim $\quad c := \{ x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{K}, \ \exists \lim_{n\to\infty} x_n \}$

$c_0 := \{ x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{K}, \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \}$

ovat Banach-avaruuksia (HT)

Tarkastellaan vektoriarvoisia sarjoja ja todistetaan niiden
avulla keskeinen kriteero täydellisyydelle.

3.12. Määritelmä. Olkoon $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normiavaruus, $x_k \in \mathbb{X}$
$k \in \mathbb{N}$. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee jos osasummien
jono $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ suppenee kohti vektoria $s \in \mathbb{X}$
l. $\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\| = 0$.

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ on normisuppeneva (tai absoluuttisesti
suppeneva) jos ($\mathbb{R}$-terminen) sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ suppenee.

**Lemma** Metrisen avaruuden kompakti joukko on suljettu ja rajoitettu

Tod.: Ol. $M$ kompakti $\Rightarrow$

$M$ suljettu: Jos $(x_n) \subset M$ ja $x_n \to x$. Tällöin $x \in M$ kompaktiuden määritelmän perusteella

$M$ rajoitettu: Jos $M$ ei rajoitettu niin $\exists$ $(x_n) \subset M$ s.e. $d(x_n, y) > n$ $\forall n$ ja $y \in X$. Jonolla $(x_n)$ ei supp. osajonoa. (Muuten $d(x_{n_k}, y) \to d(x_0, y)$ mutta $d(x_{n_k}, y) \geq n_k \geq k \to \infty$).

Huom. Käänteinen tulos ei yleensä päde!

Esim. 1° $X = ]0,1[$, osajoukot $X$, $[\frac{1}{2}, 1[$ raj. & sulj. $X$:ssä mutta eivät kompakteja.

2° $\bar{B}(0,1) \subset \ell^\infty$ sulj., raj. ei kompakti: $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$:llä ei supp. osajonoa $e_n = (0,..0,1,0,..)$ ($1$ paikalla $n$)

**Lause** Ol. $X$ äärellisulotteinen normiavaruus. $M \subset X$.

$M$ on kompakti $\Leftrightarrow$ $M$ on suljettu ja rajoitettu

Tod. Valitsemalla $X$:lle kanta $\{f_1, \dots f_n\}$ saadaan lin. bijektio $h: X \to \mathbb{R}^n$ asettamalla $h(f_i) = e_i$ $\{e_1, \dots e_n\}$ $\mathbb{R}^n$:n tav. kanta ja jatkamalla lin. $h(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

$h, h^{-1}$ jatkuvia. $\Rightarrow$ Palautuu vast. tulokseen $\mathbb{R}^n$:n joukoille (Moda).

<u>Esim</u> $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^2$ kun $n \in \mathbb{N}$

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ suppenee $\ell^2$:ssa:

Merk $x = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ joten $x \in \ell^2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n} = x$ : $s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{e_n}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots)$

ja $\|x - s_m\|_2 = \|(\underbrace{0, \dots 0}_{m \text{ kpl}}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \dots)\|_2 = \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\right)^{1/2}$

$\to 0$ kun $m \to \infty$ (supp. sarjan „jäännöstermiä")

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ ei ole normisuppeneva avaruudessa $\ell^2$:

$\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{e_n}{n}\|_2 = \sum_{n=1} \frac{1}{n} \|e_n\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. □.

3.13. <u>Lause</u> Normiavaruus $X$ on Banach-avaruus jos ja vain jos sen jokainen normisuppeneva sarja $\sum_k x_k$ suppenee avaruudessa $X$.

<u>Tod:</u>

"$\Rightarrow$" Ol. $X$ Banach ja $\sum_k x_k$ sarja s.e. $\sum_k \|x_k\|$ supp.

Os. $(s_n)$ $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ Cauchy: $\forall p, n \in \mathbb{N}$

$\| s_{n+p} - s_n \| = \| \sum_{j=1}^{n+p} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j \| = \| x_{n+1} + \dots + x_{n+p} \|$

$\overset{\Delta\text{-ey}}{\leq} \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_{n+p}\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|x_j\| \to 0$ kun

$n \to \infty$. $X$ täyd $\Rightarrow$ $(s_n)$ supp.

"$\Leftarrow$" os. tätä varten hyödyllinen aputulos:

3.14 <u>Lause</u> Jos normiavaruuden $X$ Cauchy-jonolla $(x_n)$ on osajono $(x_{n_k})$ s.e. $\|x_{n_k} - y\| \to 0$ jollakin $y \in X$ niin tällöin $\|x_n - y\| \to 0$ kun $n \to \infty$.

Tod: A-cy $\Rightarrow \|x_n - y\| \le \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y\|$

valitsemalla annetulla $\varepsilon > 0$ Cauchyn ehdosta

$m_\varepsilon$ s.e. $\|x_k - x_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$ kun $k, j \ge m_\varepsilon$ ja

suppenevan osajonon $(x_{n_k}) \to y$ riittävän suuret

indeksit $n_k \ge m_\varepsilon$ s.e. $\|x_{n_k} - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$

saadaan $\|x_n - y\| < \varepsilon \quad \forall\, n \ge m_\varepsilon$. □.

Palataan lauseen 3.13 "⇐" todistukseen:

Ol. $(x_n)$ Cauchy-jono $X$:ssä, L. 3.14 nojalla

riittää löytää suppeneva osajono $(x_{n_k})$. Konstruoidaan

se induktiivisesti: $(x_n)$ Cauchy $\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ s.e.

$\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2} \quad \forall\, p, q \ge n_0$

Ol. indeksit $n_0 < n_1 < \dots < n_j$ valittu.

Val. indeksi $n_{j+1} > n_j$ s.e. $\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^{j+2}}$

$\forall\, p, q \ge n_{j+1}$.

Merk. $y_0 = x_{n_0}$, $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$, $j = 1, 2, \dots$

Pätee: $\|y_j\| = \|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\| < \frac{1}{2^j} \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$.

Jono $(y_j)$ on normisuppeneva: $\sum_{j=0}^{\infty} \|y_j\| < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} < \infty$.

Ol. $\Rightarrow (y_j)$ supp. Merk. $y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j$. Sarjan $\sum y_j$

osasummille pätee:

$\sum_{j=0}^{k} y_j' = x_{n_0} + (x_{n_1} - x_{n_0}) + \dots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = x_{n_k}$

$\therefore$ Jonon $(x_n)$ osajonolle $(x_{n_k}) \to y$ kun $k \to \infty$

L. 3.14 $\Rightarrow$ $X$ täydellinen. $\square$.

L. 3.13. antaa usein helpon todistuksen täydellisyydelle:

<u>Esim.</u> $(\mathbb{R}, |\cdot|_e)$ täydellinen: Ol. $\sum a_k$ itseisesti suppeneva sarja. Merk. $b_k = |a_k| - a_k$, $k \in \mathbb{N}$

Pätee $0 \le b_k \le 2|a_k|$. Vertailuperiaate $\Rightarrow$ $\sum_k b_k$ supp.

$\Rightarrow$ $a_k = |a_k| - b_k$ supp. L. 3.13 $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ täydellinen. $\square$

3.15. <u>Lause</u> Jokainen $\ell^p$-avaruus on Banach.

<u>Tod</u>: Ol. $\sum_n x^{(n)}$ normisuppeneva sarja $\ell^p$:ssä ł.

$\sum_{n=0}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p < \infty$. Vektorin (jono!) $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$

komponenteille pätee $\forall\, k \in \mathbb{N}$:

$$|x_k^{(n)}| \le \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)}|^p \right)^{1/p} = \|x^{(n)}\|_p \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_k^{(n)}| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p < \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{K}$ täydellinen $\Rightarrow$ skalaarisarja $\sum_{n=0}^{\infty} x_k^{(n)}$ supp.

Merk. $y_k = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$.

V: $\| \sum_{n=0}^{r} x^{(n)} - y \|_p \to 0$ kun $r \to \infty$ ja

$y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$.

Tästä seuraa L. 3.13. perusteella väite.

Os väite: (3.11.)

Ol. $\varepsilon > 0$. $\sum_n \|x^{(n)}\|_p$ supp $\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p \le \varepsilon \quad \text{(jäännöstermi)}$$

Ol. $i, r, s \in \mathbb{N}$, $m \le r < s$:

$$\sum_{k=0}^{i} \Big| y_k - \sum_{n=0}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p = \lim_{s\to\infty} \sum_{k=0}^{i} \Big| \sum_{n=0}^{s} x_k^{(n)} - \sum_{n=0}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p$$

$$\le \lim_{s\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \Big| \sum_{n=r+1}^{s} x_k^{(n)} \Big|^p}$$

$$= \Big\| \sum_{n=r+1}^{s} x^{(n)} \Big\|_p^p \le \Big( \sum_{n=r+1}^{s} \|x^{(n)}\|_p \Big)^p$$

$$\le \Big( \sum_{n=r+1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p \Big)^p \le \varepsilon^p$$

kun $s \to \infty$ $\quad \sum_{k=0}^{i} \big| y_k - \sum_{n=0}^{r} x_k^{(n)} \big|^p \le \varepsilon^p \quad \forall\, i \in \mathbb{N}, r \ge m$

Kun $i \to \infty$ saadaan

$$\Big\| y - \sum_{n=0}^{r} x^{(n)} \Big\|_p^p = \sum_{k=0}^{\infty} \Big| y_k - \sum_{n=0}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p \le \varepsilon^p \quad \text{kun } r \ge m$$

$$\therefore \Big( y_k - \sum_{n=0}^{m} x_k^{(n)} \Big)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$$

$\ell^p$ normiavaruus $\Rightarrow$

$$y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} = \Big( y_k - \sum_{n=0}^{m} x_k^{(n)} \Big)_{k\in\mathbb{N}} + \Big( \sum_{n=0}^{m} x_k^{(n)} \Big)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$$

$$\Rightarrow \Big\| y - \sum_{n=0}^{r} x^{(n)} \Big\|_p \le \varepsilon \quad \forall\, r \ge m$$

$\therefore$ $\sum x^{(n)}$ supp. $\ell^p$:ssä. L. 3.13 $\Rightarrow$ väite. $\square$.

Tarkastellaan neljä erikseen äärellisulotteisia normiavaruuksia.

3.16. <u>Lause</u> Ol. $X$ äärellisulotteinen vektoriavaruus ja $\|\cdot\|$ jokin sen normi. Ol. $\{e_1, \dots, e_n\}$ $X$:in kanta. Aset. vektorin $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ normi $\|x\|_1 := \big( \sum_{i=1}^{n} |\lambda_j|^2 \big)^{1/2}$.

Tällöin normit $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ ovat ekvivalentteja.

Tod: Aset $M := \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{1/2} > 0$. Saadaan (3.12)

$$\|x\| = \|\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\| \le \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \|e_j\| \underset{p=q=2}{\overset{\text{Hölder}}{\le}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2\right)^{1/2}}_{=\|x\|_1} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{1/2}}_{=M}$$

$$= M \|x\|_1$$

Aset. $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ehdosta $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \|\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\|$

$f$ jatkuva. Aset.

$S = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 = 1\}$ kompakti

$\Rightarrow \exists (\mu_1, \dots, \mu_n)$ (jos funktio saa kompaktissa joukossa pienimmän arvonsa)

s.e. $m = f(\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n) \le f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in S$.

Jos $m = 0$, niin $\|\sum_{j=1}^n \mu_j e_j\| = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \mu_j e_j = 0$ ↯

$\Rightarrow m > 0$.

Jos vektorilla $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ pätee $1 = \|x\|_1 = \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2\right)^{1/2}$ niin

$m \le f(\lambda_1, \dots \lambda_n) = \|x\|$. Saadaan $\forall y \in X \setminus \{0\}$:

$\left\|\frac{y}{\|y\|_1}\right\|_1 = 1 \Rightarrow \left\|\frac{y}{\|y\|_1}\right\| \ge m$

$\Rightarrow \|y\| \ge m\|y\|_1$.

Kun $y = 0$ ey triviaalisti voimassa □.

3.17. Seuraus Jos $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_2$ äärellisulotteisen vektoriavaruuden

$X$ normeja, niin ne ovat ekvivalentit

Tod. Val. $X$:lle kanta $\{e_1, \dots, e_n\}$ ja aset

$\|\cdot\|_1$ kuten L. 3.16. $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_2$ ekvivalentteja

normin $\|\cdot\|_1$ kanssa $\Rightarrow$ väite. □.

3.18. Lause Ol. $\underline{X}$ äärellisulotteinen vektoriavaruus ja $\{e_1, \dots, e_n\}$ sen kanta. Jos $\|\cdot\|_1$ on L. 3.16. määritelty normi, niin $(\underline{X}, \|\cdot\|_1)$ on Banach-avaruus.

Tod: Ol. $(x^{(m)})$ Cauchy-jono $\underline{X}$:ssä, $\varepsilon > 0$.
$x^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(m)} e_j$ jolloin $\lambda_j^{(m)} \in \mathbb{K}$. $(x^{(m)})$ Cauchy $\Rightarrow$

$\exists N_\varepsilon$ s.e. $\forall k, m \geq N_\varepsilon$ pätee

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j^{(k)} - \lambda_j^{(m)}|^2 = \|x^{(k)} - x^{(m)}\|_1^2 \leq \varepsilon^2$$

$\Rightarrow |\lambda_j^{(k)} - \lambda_j^{(m)}|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall k, m \geq N_\varepsilon, \quad 1 \leq j \leq n$

$\therefore \{\lambda_j^{(m)}\}$ Cauchy $\mathbb{K}$:ssa $\forall 1 \leq j \leq n$

$\mathbb{K}$ täydellinen $\Rightarrow \exists \lambda_j \in \mathbb{K}$ s.e. $\lim_{m \to \infty} \lambda_j^{(m)} = \lambda_j$

$\Rightarrow \exists N_\varepsilon^j \in \mathbb{N}$ s.e. $\forall m \geq N_\varepsilon^j$ pätee

$|\lambda_j^{(m)} - \lambda_j|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{n}$, olk. $N_\varepsilon^0 = \max(N_\varepsilon^1, \dots N_\varepsilon^n)$

ja aset $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$. Tällöin $\forall m \geq N_\varepsilon^0$

pätee $\|x^{(m)} - x\|_1^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j^{(m)} - \lambda_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$

$\therefore (x_m) \to x \in \underline{X}$. $\square$.

3.19. Seuraus Jos $\|\cdot\|$ on äärellisulotteisen vektoriavaruuden normi niin $(\underline{X}, \|\cdot\|)$ on Banach-avaruus.

Tod: 3,16. & 3,18.

3.20. Seuraus Normiavaruuden $(\underline{X}, \|\cdot\|)$ äärellisulotteinen vektoriavaruus $\underline{Y}$ on suljettu.

Tod: $(\underline{Y}, \|\cdot\|)$ ääre. ul. normiavaruutena Banach
3.7. $\Rightarrow$ väite. $\square$.

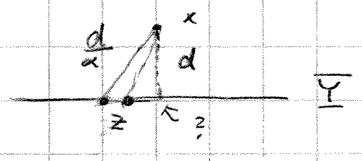
Esitetään vielä keskeinen äärellisulotteiset normiavaruudet karakterisoiva ominaisuus.

## 3.21. Rieszin lemma ("melkein kohtisuoruus normiavaruudessa")

Ol. $X$ normiavaruus, $Y$ $X$:n suljettu vektorialiavaruus $Y \subsetneq X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ s.e. $0 < \alpha < 1$. Tällöin löytyy $x_\alpha \in X$ s.e. $\|x_\alpha\| = 1$ ja $\|x_\alpha - y\| > \alpha$ $\forall y \in Y$.

Tod: $Y \neq X \Rightarrow \exists\, x \in X \setminus Y$, $Y$ suljettu $\Rightarrow$

$$d = \inf\{\|x - z\| \mid z \in Y\} > 0$$




$d < \frac{d}{\alpha} \Rightarrow \exists\, z \in Y$ s.e. $d \le \|x - z\| < \frac{d}{\alpha}$

Olk. $x_\alpha = \frac{x - z}{\|x - z\|}$, jolloin $\|x_\alpha\| = 1$ ja $\forall y \in Y$:

$$\|x_\alpha - y\| = \left\|\frac{x - z}{\|x - z\|} - y\right\| = \left\|\frac{x}{\|x - z\|} - \frac{z}{\|x - z\|} - \frac{\|x - z\|\, y}{\|x - z\|}\right\|$$

$$= \frac{1}{\|x - z\|}\,\|x - \underbrace{(z + \|x - z\|\, y)}_{\in Y}\| > \frac{\alpha}{d}\, d = \alpha. \quad \square$$

## 3.22. Lause

Ol. $(X, \|\cdot\|)$ ääretönulotteinen normiavaruus. Tällöin kuula $\bar{B}(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$ ja pallo $S(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ eivät ole kompakteja joukkoja.

Tod: Olk. $x_1 \in S(0,1)$. $X$ ei äärell. ul. $\Rightarrow \mathrm{sp}\{x_1\} \subsetneq X$

L.3.20 $\Rightarrow$ $\mathrm{sp}\{x_1\}$ suljettu. Riesz $\Rightarrow$ $\exists\, x_2 \in S(0,1)$ s.e.

$\|x_2 - \alpha x_1\| \ge \frac{3}{4}$ $\forall \alpha \in K$. Vastaavasti $\mathrm{sp}\{x_1, x_2\} \subsetneq X$ suljettu. $\Rightarrow \exists\, x_3 \in S(0,1)$ s.e. $\|x_3 - \alpha x_1 - \beta x_2\| \ge \frac{3}{4}$ $\forall \alpha, \beta \in K$.

Jatkamalla induktiivisesti saadaan jono $(x_n) \subset S(0,1)$ s.e.

$\|x_n - x_m\| \ge \frac{3}{4}$ $\forall n \neq m$. Tällaisella jonolla ei supp. osajonoa

$\Rightarrow$ väit.

## 4. Lineaariset operaattorit



Ol. $X$, $Y$ $\mathbb{K}$-kertoimisia vektoriavaruuksia. Operaattori (kuvaus, funktio)

$A: X \to Y$ on <u>lineaarinen</u> jos pätee $\forall x, x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad \text{(additiivisuus)}$$

$$A(\alpha x) = \alpha A x \quad \text{(homogeenisuus)}$$

$\Rightarrow A0 = 0$

Luonnollisia vektorialiavaruuksia:

$N(A) = \ker(A) = \{x \in X \mid Ax = 0\} \subset X$ A:n <u>ydin</u> (<u>nolla-avaruus</u>)

$R(A) = \mathrm{Im}(A) = A(X) = \{y \in Y \mid y = Ax, x \in X\} \subset Y$

A:n <u>kuva-avaruus</u>.

Lin. operaattori $A: X \to Y$ on <u>injektio</u> jos $x_1 \neq x_2 \Rightarrow Ax_1 \neq Ax_2$

e. $\ker(A) = \{0\}$. A on <u>surjektio</u> jos $R(A) = Y$

<u>Identtinen operaattori</u>: $I: X \to X$, $I(x) = x \quad \forall x \in X$

<u>Nolla operaattori</u>: $0: X \to X$, $0x = 0_Y \quad \forall x \in X$

Lin. operaattorin $A: X \to Y$ <u>käänteisoperaattori</u> $A^{-1}: Y \to X$

määräytyy ehdoista $A^{-1}A = I_X$, $AA^{-1} = I_Y$.

$\exists A^{-1}: Y \to X \Leftrightarrow (\ker(A) = \{0\}, \mathrm{Im}A = Y)$

4.1. <u>Määritelmä</u> Ol. $X$, $Y$ normiavaruuksia. Lin.

operaattori $A: X \to Y$ on <u>rajoitettu</u> jos $\exists$ vakio $C < \infty$

s.e. $\|Ax\|_Y \leq C \|x\|_X \quad \forall x \in X$.

HT: Lin kuvaus on $A: X \to Y$ on rajoitettu $\Leftrightarrow$ A kuvaa $X$:n rajoitetut joukot $Y$:n rajoitetuiksi joukoiksi

Esim $X = Y = \ell^2$, $A: X \to Y$, $A(x_k)_{k=1}^{\infty} = (3x_{k+1})_{k=1}^{\infty}$,

kun $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$. A lin, ja

$$\|Ax\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |3x_{k+1}|^2\right)^{1/2} = 3\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1}|^2\right)^{1/2} \le 3\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}$$

$$= 3\|x\|_2 .$$

$\therefore$ A rajoitettu.

4.2. <u>Määritelmä</u> Rajoitetun operaattorin $A: X \to Y$ pienin vakio $C$, jolle pätee $\|Ax\| \le C\|x\|$ on <u>operaattorin</u> A <u>normi</u>, merk $\|A\|$, siis $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ $\forall x \in X$.

Erityisesti A rajoitettu $\Leftrightarrow$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{0 \ne x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \infty$$

Merk. $\mathcal{L}(X, Y) = \{A: X \to Y \text{ lin} \mid A \text{ raj.}\}$

<u>Huom.</u> $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ normiavaruus, kun

$$\|A\| = \sup_{0 \ne x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} . \quad (HT).$$

$\leftarrow$ 20.9.

<u>Esim.</u> $X = \ell^2$, $Y = \ell^1$, $Ax = A(x_k)_{k=1}^{\infty} := \left(\frac{1}{k} x_k\right)_{k=1}^{\infty}$.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k| \underset{p=q=2}{\overset{\text{Hölder}}{\le}} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}}_{=: C < \infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} = C\|x\|_2 .$$

$\therefore$ A raj.