Mat-1.3430 Funktionaalianalyysin perusteet Harj. 9.
30.11.2007

1) Olkoon H Hilbert-avaruus ja $A \in \mathcal{L}(H)$. Osoita, että pätee a) $\ker A = \ker(A^*A)$
b) $\overline{\operatorname{Im} A^*} = \overline{\operatorname{Im} A^*A}$

2) Olkoon H Hilbert-avaruus ja $U \in \mathcal{L}(H)$ unitaarinen. Osoita, että lineaarikuvaus $f: \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$, $f(A) = U^*AU$ on isometria.

3) Olkoon $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ $A(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)$
a) Määrää $A^* \in \mathcal{L}(\ell^2)$.
b) Määrää $(A^*)^2$ ja osoita, että jos $|\mu| < 4$ niin μ on kuvauksen $(A^*)^2$ ominaisarvo.
c) Osoita, että $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 2\}$

4) Etsi operaattori $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ jolle $\sigma(A) = \{0\}$ mutta $A \neq 0$.

5) Olkoon H Hilbert-avaruus ja $y, z \in H$. Määritellään $A \in \mathcal{L}(H)$ asettamalla $Ax = (x|y)z$. Osoita, että A on kompakti

6) Olkoon X sisätuloavaruus ja $A, B \in \mathcal{L}(X)$ s.e. pätee $(Ax, x) = (Bx, x)$ $\forall x \in X$. Osoita:

a) $\forall x, y, u, v$: $4(u, y) = (u+v, x+y) - (u-v, x-y) + i(u+iv, x+iy) - i(u-iv, x-iy)$.

b) $A = B$.