

Pelttonen / Aalto

- 1) Olkoon  $X$  sisätuloavaruus ja  $\emptyset \neq A \subset X$ . Osoita, että
- tällöin
- a)  $A^{\perp\perp} = \overline{\text{span}(A)}$  ( $A^{\perp\perp} := (A^\perp)^\perp$ )
- b)  $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$  ( $A^{\perp\perp\perp} := ((A^\perp)^\perp)^\perp$ )

- 2) Olkoon  $M$  Hilbertin avaruuden  $H$  suljettu vektorialgebraavaruus. a) Osoita, että jos  $M \neq H$ , niin  $M^\perp \neq \{0\}$ .  
b) Pötkökö a)-kohdan väite ilman oletusta  $M$  suljettu? (Vihje: Harj. 3 teht. 1c)

- 3) Olkoon  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Hilbertin avaruuden  $H$  ortonormaali jono ja  $S = (e_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ .
- a) Osoita, että ei löydy kertoimia  $\alpha_n \in \mathbb{K}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  siten, että  $e_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_{2n}$ .

b) Anna esimerkiksi vektorista  $x \in H$ , jolle Besselin epäehtäjä on aito epäehtäjä.

- 4) Olkoon  $C(-5,5) = \{f: [-5,5] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}$  ja  $A = \{f \in C(-5,5) \mid f(0) = 1\}$ .

a) Osoita, että  $A$  on suljettu ja konveksi joukko normiavaruudessa  $(C(-5,5), \|\cdot\|_\infty)$ .

b) Osoita, että joukossa  $A$  on äärellisen määrän normin minimointia alkiota.

- 5) Oletetaan tunnetuksi, että  $L^2(-1,1)$  on Hilbertin avaruus.

Määrittä min  $\int_{-1}^1 |t^3 - a - bt - ct^2|^2 dt$ ,  
 $a, b, c \in \mathbb{R}$

- 6) Olkoon  $C(0,1) = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}$  ja  $A = \{f \in C(0,1) \mid f(0) = 0 \text{ ja } \int_0^1 f(t) dt = 1\}$ .

a) Osoita, että  $A$  on suljettu ja konveksi joukko normiavaruudessa  $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$

b) Osoita, että  $A$ :ssa ei ole normin minimointia alkiota.