

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik

Exempel, del I

G. Gripenberg

Aalto-universitetet

2 oktober 2013

Mängder, implikationer

Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 3, 4\}$ och $C = \{x : x \text{ är ett heltal } \geq 2\}$.
Vilka av följande påståenden är sanna?

- (a) $x \in A \cap C \rightarrow x \in B$ för alla x ?
- (b) $A \subset B \rightarrow C \subset A$?
- (c) Det finns ett $y \in C$ så att $y \in B \rightarrow y \notin A \cup B$?
- (d) $y \notin B \rightarrow y \notin A$ för alla $y \in C$?

Lösning: (a) Eftersom $A \cap C = \{2, 3, 4\}$ så gäller $2 \in A \cap C$ men eftersom $2 \notin B$ så gäller inte detta påstående (som är ett sätt att säga $A \cap C \subset B$).

(b) Eftersom $2 \in A$ men $2 \notin B$ så gäller inte $A \subset B$ och därför är $A \subset B \rightarrow C \subset A$ sant.

(c) Detta påstående är också sant eftersom tex. $2 \in C$, men $2 \notin B$ vilket betyder att $2 \in B$ inte är sant och därför gäller $2 \in B \rightarrow 2 \notin A \cup B$.

(d) Detta är inte sant för tex. $2 \in C$ och $2 \notin B$ men $2 \in A$ så att $2 \notin A$ är inte sant.

Slutledningsregler och bevis

Antag att p och q är två satser. Vi skall nu bevisa att q är sant om vi antar att $p \ \& \ !p$ är sant, vilket alltså visar att om man antar en motsägelse kan man bevisa vad som helst. Det finns många slutledningsregler men här skall vi bara använda följande:

$$(a) \ x \mid y$$

$$\underline{\quad !x \quad}$$

$$\therefore y$$

$$(b) \ \underline{x \ \& \ y}$$

$$x$$

$$(c) \ \underline{x}$$

$$x \mid y$$

Det som gör att tex. (a) är en slutledningsregel är att satsen

$$(x \mid y) \ \& \ !y \rightarrow x$$

är en tautologi, dvs. sann för alla sanningsvärden för x och y (vilket kan kontrolleras åtminstone så att man går genom alla möjligheter).

Slutledningsregler och bevis, forts.

Beviset ser nu ut på följande sätt:

- (1) $p \ \& \ !p$: Antagande
- (2) p : (b) tillämpat på (1) med $x = p$ och $y = !p$
- (3) $p \mid q$: (c) tillämpat på (2) med $x = p$ och $y = q$
- (4) $!p$: (b) tillämpat på (1) med $x = !p$ och $y = p$
- (5) q : (a) tillämpat på (3) och (4) med $x = p$ och $y = q$.

Observera att vi i punkt (4) också använde det faktum att $x \ \& \ y = y \ \& \ x$.

Induktion

Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 1.$$

Lösning: Påståendet $P(n)$ är alltså $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ och $n_0 = 1$. Då är påståendet $P(1)$ samma som att $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ vilket är sant. Antag nu att $P(k)$ är sant och $k \geq 1$. Eftersom $P(k)$ är sant gäller $\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$ vilket innebär att

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^k i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k+1)((k+2))}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}, \end{aligned}$$

vilket i sin tur innebär att $P(k+1)$ är sant. Enligt induktionsprincipen följer nu påståendet. (Ofta, men kanske inte här, lönar det sig att formulera det man skall visa som att ett uttryck skall vara 0.)

Hur många delmängder av en mängd med n finns det?

Det finns många sätt att besvara denna fråga och ett sätt är följande: Observera (eller anta) först att antalet delmängder bara beror på hur många element det finns i mängden (Detta är en följd av att om vi har en bijektion mellan två mängder så blir den också en bijektion mellan mängden av delmängder).

Låt $S(m)$ vara antalet delmängder av en mängd A med m element. Låt y vara ett element som inte hör till mängden A . Då är varje delmängd B av mängden $A \cup \{y\}$ antingen sådan att $y \in B$ eller $y \notin B$ (men förstås inte båda). I det första fallet är $B = C \cup \{y\}$ och i det senare fallet $B = C$ där C är en delmängd av A . eftersom vi kan välja C på $S(m)$ olika sätt finns det $2 \cdot S(m)$ sätt att välja en delmängd B av $A \cup \{y\}$ så vi kan dra slutsatsen att $S(m+1) = 2 \cdot S(m)$. Eftersom $S(0) = 1$ (den tomma mängden är den enda delmängden av den tomma mängden) så kan vi dra (med induktion om vi vill ha ett bevis) slutsatsen att $S(m) = 2^m$.

Andra sätt att räkna detta kan nog vara enklare!

Hur många funktioner från X till Y finns det då $|X| = m$ och $|Y| = n$?

För varje element x i X finns det n olika möjligheter att välja $f(x)$ och därför blir antalet funktioner n^m .

Ett annat sätt att uttrycka samma sak är att konstatera att funktionen kan skrivas som en lista $[f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)]$. Mängden av alla dessa listor är $\underbrace{Y \times Y \times \dots \times Y}_m = Y^m$ vilket dels ger antalet funktioner enligt

produktregeln och dels motiverar beteckningen Y^X för mängden av funktioner från X till Y .

Observera också att en delmängd B av en mängd A kan uttryckas med en funktion $f; A \rightarrow \{0, 1\}$ så att $B = \{x \in A : f(x) = 1\}$. Detta ger ett enkelt sätt att visa att antalet delmängder av A är $2^{|A|}$.

Ett ordningsproblem

18 personer har delats in i tre lika stora grupper. Alla av dessa skall nu i tur och ordning utföra ett uppdrag (tex. lösa en uppgift i diskret matematik) och villkoret är att vid varje tidpunkt skall skillnaderna mellan antalen personer i varje grupp som redan utfört uppdraget till sina absolutbelopp vara högst 1. På hur många sätt kan ordningsföljden då väljas (när gruppindelning är given)?

Ett annat sätt att formulera problemet är att man bildar 6 grupper, som alla innehåller exakt en medlem från var och en av de ursprungliga grupperna, och sedan sätter man dessa mindre grupper och medlemmarna i dem i ordningsföljd. Eller så att medlemmarna i de ursprungliga grupperna sätts i ordningsföljd och personerna med samma ordningsnummer bildar en grupp som sedan i sin tur ordnas.

Medlemmarna i de tre ursprungliga grupperna kan ordnas på $6! \cdot 6! \cdot 6!$ olika sätt och med hjälp av dessa ordningar utses medlemmar till de mindre grupperna som i sin tur kan ordnas var och en på 3! olika sätt så att det sammanlagd antalet alternativ blir

$$6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot (3!)^6 = 17414258688000.$$

Ett exempel i kombinatorik

- (a) *Fyra kort ur en normal kortlek med 52 kort placeras i en rad. På hur många sätt kan detta göras om alla kort i raden skall ha samma färg?*
- (b) *Fyra kort ur en normal kortlek med 52 kort placeras i en rad. På hur många sätt kan detta göras om raden skall innehålla exakt en knekt?*

(a) *Färgen kan väljas på 4 olika sätt och sedan skall man göra ett ordnat val av 4 kort bland 13 och detta kan göras på $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10$ olika sätt så antalet alternativ blir sammanlagt*

$$4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 68640.$$

(b) *Det finns 4 olika knektar att välja på och den kan placeras på 4 olika ställen, så sammanlagt ger detta 16 olika alternativ. Sedan skall man göra ett ordnat val av de 3 återstående 48 korten och detta kan göras på $48 \cdot 47 \cdot 46$ olika sätt så det sammanlagda antalet alternativ blir*

$$4 \cdot 4 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 = 1660416.$$

På hur många sätt kan man placera m identiska bollar i n identiska lådor?

Låt $A(m, n)$ vara detta antal. Eftersom vi kan placera $m \geq 0$ bollar i 1 låda på bara ett sätt så har vi $A(m, 1) = 1$ då $m \geq 0$. Om $m = 0$ förblir alla lådot tomma och det ger bara ett alternativ, dvs. $A(0, n) = 1$ för alla $n \geq 1$.

Antag nu att $m \geq 1$ och $n \geq 2$. Låt k vara antalet bollar i den låda (eller de lådor) som innehåller minst bollar. Olika värden på k ger upphov till olika fördelningar på bollarna i lådorna. Fördelningen av bollarna i lådorna kan nu göras så att vi först sätter k bollar i varje låda och sedan sätter de återstående $m - n \cdot k$ bollarna i de $n - 1$ lådor som kan innehålla flera än k bollar. Detta kan göras på $A(m - n \cdot k, n - 1)$ olika sätt. Eftersom vi måste ha $m - n \cdot k \geq 0$, dvs. $k \leq \frac{m}{n}$, så får vi

$$A(m, n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} A(m - n \cdot k, n - 1).$$