Mat-1.150 Reaalianalyysi

Harjoitus 7, 3.11.2004

Ratkaisuehdotuksia (WiM)

1.

Todistetaan aluksi, että jos $\{f_n\}$ on Cauchy-jono X:ssä, niin on olemassa osajono $\{f_{n_j}\}$ s.e. $d(f_{n_{j+1}}, f_{n_j}) \le \frac{1}{2^j}$.

Koska $\{f_n\}$ on Cauchy-jono, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e. $d(f_n, f_k) \le \varepsilon$ $\forall n, k \ge N_\varepsilon$.

Valitaan: $n_1 \ge N_{2^{-1}}$, $n_2 \ge N_{2^{-2}}, \dots, n_j \ge N_{2^{-j}}$ ja $n_{j-1} < n_j$, $j = 1, 2, \dots$ Koska $n_{j+1} > n_j \ge N_{2^{-j}}$,

$d(f_{n_{j+1}}, f_{n_j}) \le \frac{1}{2^j}$.

Olkoon $\{f_n\}$ Cauchy-jono $L^p(X)$:ssä. Valitaan osajono s.e.

$$\| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \|_p \le 2^{-j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Määritellään

$$g_j = \sum_{k=1}^{j} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| + |f_{n_1}|.$$

Koska jono $\{g_j\}$ on kasvava, $\exists\, g = \lim_{j \to \infty} g_j$.

Minkowskin epäyhtälöstä seuraa

$$\|g_j\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{j} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| + |f_{n_1}| \right\|_p$$

$$\leq \sum_{k=1}^{j} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_1}\|_p$$

$$\leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^{j} 2^{-k} \leq \|f_{n_1}\|_p + 1 \quad \forall j.$$

Näin ollen

$$\int_X g^p \, d\mu = \int_X \lim_{j\to\infty} g_j^p \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int_X g_j^p \, d\mu \leq (\|f_{n_1}\|_p + 1)^p$$

$$\Rightarrow \quad \|g\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1 < \infty \Rightarrow g(x) < \infty$$

m.k. $x \in X$. Tästä seuraa, että sarja

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

suppenee m.k. $x \in X$. Merkitään summaa $f(x)$:llä siinä joukossa, jossa sarja suppenee ja $f(x) \equiv 0$ siinä nollamittaisessa joukossa, jossa sarja ei suppene. Saatiin

$$f_{n_{j+1}} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{j} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \longrightarrow f$$

m.k. $x \in X$, kun $j \longrightarrow \infty$.

2. Olkoon $X = \mathbb{R}$.

- Esimerkiksi valitsemalla $f_n(x) = \frac{1}{n^{1/p}} \chi_{(0,n)}(x)$, $f_n \in L^p(\mathbb{R})$.

Tällöin $f_n \longrightarrow 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, kun $n \to \infty$, mutta

$$\|f_n - 0\|_p^p = \|f_n\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \, d\mu = 1$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

- Tai valitsemalla $f_k(x) = k^2 \chi_{(0,1/k)}(x)$, $f_k \in L^p(\mathbb{R})$.

Tällöin $f_k \longrightarrow 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, mutta

$$\|f_k - 0\|_p^p = \|f_k\|_p^p = k^{2-\frac{1}{p}} \geq k \longrightarrow \infty,$$

kun $k \to \infty$.

3. Olkoon $X = [0,1]$ ja $f_{2^n + j}(x) = n \chi_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]}(x)$,

missä $j = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Tällöin jokaiselle $p \in [1, \infty)$

$$\|f_{2^n+j}\|_p = n 2^{-n/p} \longrightarrow 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Mutta jono ei suppene millään $x \in [0,1]$, koska

$$\limsup_{n \to \infty} f_n(x) = \inf_{j \geq 0} \left(\sup_{n \geq j} f_n(x) \right) = \infty$$
$$\liminf_{n \to \infty} f_n(x) = \sup_{j \geq 0} \left(\inf_{n \geq j} f_n(x) \right) = 0.$$

Huomaa, että tehtävän 1 mukaisesti siirtymällä osajonoon $f_{2^n+1}(x) = n\chi_{\left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right]}(x)$

saadaan

$$\lim_{n\to\infty} f_{2^n+1}(x) = 0 \qquad \forall x \in [0,1].$$

4.

Osoitetaan, että $f = g$ m.k.

$$\begin{aligned}\int_X |f-g|^p \, d\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} |f_n - f|^p \, d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = 0 .\end{aligned}$$

Näin ollen $|f-g| = 0$ m.k.. eli $f=g$ m.k.

Tapa 2:

Tehtävän 1 nojalla jonolla $\{f_n\}$ on osajono, joka suppenee m.k. eli $f_{n_j} \to f$ m.k. Raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $f=g$ m.k.

5.

Valitaan $\varepsilon > 0$ ja olkoon $\delta > 0$ kuten tehtävänannossa. Koska $\mu(X) < \infty$, Egoroffin lauseen nojalla on olemassa mitallinen joukko $E \subset X$, jolle $\mu(X \setminus E) < \delta$ s.e. $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti E:ssä.

Näin ollen

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu = \int_E |f_n - f| \, d\mu + \int_{X\setminus E} |f_n - f| \, d\mu,$$

missä ensimmäinen integraali yhtälön oikealla puolella saadaan mielivaltaisen pieneksi suurilla n:n arvoilla, koska f_n suppenee f:ään tasaisesti E:ssä. Toinen integraali hoidetaan seuraavasti: koska $|f_n - f| \le |f_n| + |f|$, saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{X\setminus E} |f_n - f| \, d\mu &\le \int_{X\setminus E} |f_n| \, d\mu + \int_{X\setminus E} |f| \, d\mu \\
&= \int_{X\setminus E} |f_n| \, d\mu + \int_{X\setminus E} \liminf_{n\to\infty} |f_n| \, d\mu \\
&\le \varepsilon + \liminf_{n\to\infty} \int_{X\setminus E} |f_n| \, d\mu \\
&\le 2\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

$\therefore \; \|f_n - f\|_1 \to 0$, kun $n \to \infty$.