Mat-1.150 Reaalianalyysi
Harjoitus 1, 22.9.2004
Ratkaisuehdotuksia (NM)

1.

a) Kyllä, koska (Rudin: 1.2.a s. 8)

(i) $\emptyset \in \Gamma$, $X \in \Gamma$

(ii) Jos $V_1, \ldots, V_n \in \Gamma$, niin $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n \in \Gamma$, koska leikkaus on pienin joukoista $V_i \in \Gamma$, $i = 1, 2, \ldots, n$. (Joukot ovat sisäkkäisiä Γ:ssa.)

(iii) Jos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \Gamma$, niin $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ on suurin joukoista $V_\alpha \in \Gamma$.

b) Ei, koska $\{a\} \in \Gamma$, mutta $\{a\}^c = \{b, c, d\} \notin \Gamma$.

c) Olkoon M pienin X:n σ-algebra s.e. $\Gamma \subset M$. (Tällainen löytyy lauseen 1.10, Rudin s. 12, nojalla.) Silloin

$$\{b\} = \{a, b\} \setminus \{a\}, \quad \{c\} = \{a, b, c\} \setminus \{a, b\}, \quad \{d\} = \{a, b, c\}^c \in M$$

(Rudin 1.6.d, s. 10). Koska kaikki X:n osajoukot ovat yksiöiden $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ ja $\{d\}$ äärellisiä yhdisteitä, $\mathcal{P}(X) \subset M$. Toisaalta määritelmän nojalla $M \subset \mathcal{P}(X)$ $\therefore$ $M = \mathcal{P}(X)$.

d) Ei, koska $f^{-1}((3,5)) = \{x \in X : f(x) \in (3,5)\}$
$= \{d\} \notin \mathcal{M}$.

Siis avoimen joukon alkukuva ei ole avoin.

e) Kyllä, koska kaikilla $A \subset \mathbb{R}$ (erityisesti avoimilla)
$f^{-1}(A) \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{M}$.

2.
(i) $f(\bigcup_\alpha V_\alpha) = \bigcup_\alpha f(V_\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
y \in f(\textstyle\bigcup_\alpha V_\alpha) &\iff y = f(x) \text{ ja } x \in \textstyle\bigcup_\alpha V_\alpha \\
&\iff y = f(x) \text{ ja } x \in V_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A} \\
&\iff y \in f(V_\alpha) \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A} \\
&\iff y \in \textstyle\bigcup_\alpha f(V_\alpha) \qquad \square
\end{aligned}
$$

(ii) $f^{-1}(\bigcup_\beta W_\beta) = \bigcup_\beta f^{-1}(W_\beta)$:

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(\textstyle\bigcup_\beta W_\beta) &\iff x = f^{-1}(y) \text{ ja } y \in \textstyle\bigcup_\beta W_\beta \\
&\iff x = f^{-1}(y) \text{ ja } y \in W_\beta \text{ jollakin } \beta \in \mathcal{B} \\
&\iff x \in f^{-1}(W_\beta) \text{ jollakin } \beta \in \mathcal{B} \\
&\iff x \in \textstyle\bigcup_\beta f^{-1}(W_\beta) \qquad \square
\end{aligned}
$$

(iii) $f^{-1}(\bigcap_\beta W_\beta) = \bigcap_\beta f^{-1}(W_\beta)$:

$$x \in f^{-1}(\bigcap_\beta W_\beta) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ ja } y \in \bigcap_\beta W_\beta$$
$$\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ ja } y \in W_\beta \ \forall \beta \in \mathcal{B}$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(W_\beta) \ \forall \beta \in \mathcal{B}$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_\beta f^{-1}(W_\beta) \quad \square$$

(iv) $f(\bigcap_\alpha V_\alpha) \subset \bigcap_\alpha f(V_\alpha)$:

$y \in f(\bigcap_\alpha V_\alpha) \Rightarrow \exists x \in \bigcap_\alpha V_\alpha : y = f(x)$.

Näin ollen $y = f(x)$ ja $x \in V_\alpha \ \forall \alpha \in \mathcal{A}$,

jolloin $y \in f(V_\alpha) \ \forall \alpha \in \mathcal{A} \Leftrightarrow y \in \bigcap_\alpha f(V_\alpha)$ $\square$

Inkluusio on aito, kuten kuvaus

$f: \{0,1\} \longrightarrow \{0\}$, $x \longmapsto \{0\}$ osoittaa.

(Valitaan $\mathcal{A} = \{0,1\}$, $V_i = \{i\}$, $i = 0,1$, jolloin

$V_0 \cap V_1 = \emptyset$ ja $f(V_0) \cap f(V_1) = \{0\}$.)

Toisen esimerkin antaa kuvaus $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$x \longmapsto |x|$. Valitaan nyt $V_0 = (-\infty, 0]$ ja

$V_1 = [0, \infty)$. Tällöin $f(V_0 \cap V_1) = f(\{0\}) = \{0\}$ ja

$f(V_0) \cap f(V_1) = [0, \infty)$.

Todistetaan vielä, että jos kuvaus f on injektio $\bigcap_{\alpha} f(V_\alpha) \subset f(\bigcap_{\alpha} V_\alpha)$ (ts. saadaan yhtälö): olkoon

$y \in \bigcap_{\alpha} f(V_\alpha)$. Tällöin jokaisella $\alpha \in \mathcal{A}$ on olemassa $x_\alpha \in V_\alpha$ s.e. $y = f(x_\alpha)$. Koska f on injektio, joukko $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ on yksiö, eli on olemassa $x \in X$ s.e. $x = x_\alpha \in V_\alpha$ jokaisella $\alpha \in \mathcal{A}$. Näin ollen

$x \in \bigcap_{\alpha} V_\alpha$ ja $y = f(x) \in f(\bigcap_{\alpha} V_\alpha)$ $\square$

3.

Lemma 2.3 luennoilta (Rudin: 1.9.c, 1.11):

$h := f - g$ on mitallinen* (mikäli määritelty,

Erotus määritelty, jos missään $x \in X$ ei ole

$f(x) = \infty, g(x) = \infty$).

Tällöin

$$\{x \in X : h < 0\} = h^{-1}([-\infty, 0)) \text{ on mitallinen,}$$

koska h on mitallinen ($[-\infty, 0)$ avoin).

Toisaalta, jos $A := \{x \in X : h \geq 0\}$ ja

$B := \{x \in X : h \leq 0\}$, niin

$A^c = \{x \in X : h < 0\}$ mitallinen $\Rightarrow$ A mitallinen

ja

$B^c = \{x \in X : h > 0\} = h^{-1}((0, \infty])$ mitallinen

$\Rightarrow$ B mitallinen. Näin ollen

$$\{x \in X : h = 0\} = \{x \in X : h \leq 0\} \cap \{x \in X : h \geq 0\}$$

on mitallisten joukkojen leikkauksena

mitallinen.

---

* $f : X \to [-\infty, \infty]$ mitallinen $\Rightarrow$ $X = f^{-1}([-\infty, \infty])$ on mitallinen.

Toisaalta

$X = h^{-1}(+\infty) \cup h^{-1}(-\infty) \cup X_0$, missä $X_0 = h^{-1}(\mathbb{R})$

$h^{-1}(+\infty) = f^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(-\infty)$ mitallinen

$h^{-1}(-\infty) = f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(+\infty)$ mitallinen

$\Rightarrow$ X_0 mitallinen. Näin ollen $f|X_0$ ja $g|X_0$ mitallisia

$\Rightarrow$ $h^{-1}(G)$ mitallinen $\forall\, G \subset \mathbb{R}$ avoin $\Rightarrow$ h mitallinen.

4.

olkoot

$$A = f^{-1}([0,\infty)) \cap g^{-1}([0,\infty))$$
$$A_1 = \left(f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}((0,\infty])\right) \cup \left(f^{-1}((0,\infty]) \cap g^{-1}(\infty)\right)$$
$$A_2 = \left(f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}(0)\right) \cup \left(f^{-1}(0) \cap g^{-1}(\infty)\right).$$

Joukot A, A_1 ja A_2 ovat mitallisia (f, g mitallisia).

Olkoon $v: A \longrightarrow [0,\infty) \times [0,\infty)$, $x \longmapsto (f(x), g(x))$

ja $u: [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $(x,y) \longmapsto xy$.

Tällöin v on mitallinen ja u jatkuva, joten

$(fg)|A = u \circ v$ on mitallinen (Rudin: 1.7 ja 1.8, s. 10).

Koska $(fg)^{-1}(\infty) = A_1$, $(fg)^{-1}(\infty)$ on mitallinen. Riittää siis osoittaa, että $(fg)^{-1}(G)$ on mitallinen jokaisella avoimella $G \subset [0,\infty)$.

Jos $0 \notin G$, niin $(fg)^{-1}(G) = ((fg)|A)^{-1}(G)$

Jos $0 \in G$, niin $(fg)^{-1}(G) = ((fg)|A)^{-1}(G) \cup A_2$.

Molemmissa tapauksissa $(fg)^{-1}(G)$ on mitallinen.

$\therefore$ fg on mitallinen.

5. Merkitään

$$S := \{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ olemassa ja äärellinen}\}$$

$$S(n,k) := \bigcap_{i,j>n} \{x \in X : |f_i(x) - f_j(x)| < 1/k\}.$$

Koska joukko $\{x \in X : |f_i(x) - f_j(x)| < 1/k\}$ on avoimen joukon $B(0, 1/k) = (-1/k, 1/k)$ alkukuva mitallisella funktiolla $f_i - f_j$ ja lisäksi $\{i,j \in \mathbb{N} : i,j > n\} \subset \mathbb{N}^2$ on numeroituva, joukko $S(n,k)$ on mitallinen. Nyt silloin $\forall x \in X$ pätee

$$x \in S \iff \{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \text{ on Cauchy jono } (\mathbb{R}\text{:ssä})$$

$$\iff \forall k \in \mathbb{N}_+ \ \exists n \in \mathbb{N} : \forall i,j > n \ |f_i(x) - f_j(x)| < 1/k$$

$$\iff \forall k \in \mathbb{N}_+ \ \exists n \in \mathbb{N} : x \in S(n,k)$$

$$\iff \forall k \in \mathbb{N}_+ \ x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(n,k)$$

$$\iff x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}_+} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(n,k), \text{ joten}$$

$S = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_+} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(n,k)$ on mitallinen, koska numeroituvat yhdisteet ja leikkaukset mitallisista joukoista ovat mitallisia.