Mat-5.3740 Kontinuumimekaniikka **Lyly / Hannukainen**
Harjoitus 10, 13.12.2007 14-16 U322

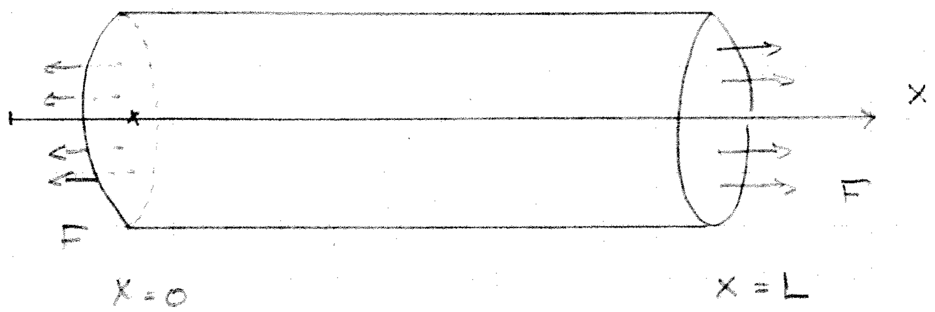
Välikoe : 18.12.2007 9-12
Tentti : 18.12.2007 12-15

1. Tarkastellaan ohutta, sylinterinmuotoista sauvaa, jota vedetään/puristetaan sylinterin akselin suuntaisella jännityksellä F. Tilavuusvoimien vaikutus ja poikittaiset voimat voidaan unohtaa. Laske jännitys, venymä sekä muodonmuutos.

2. Tarkastellaan pallonmuotoista säiliöä, jonka paksuus on d. Säiliön ulkopinta on paineessa p_1 ja sisäpinta paineessa p_2. Tilavuusvoimien vaikutus voidaan unohtaa. Oleta, että säiliön muodonmuutos riippuu ainoastaan säteestä ja määritä jännitys, venymä sekä muodonmuutos.

3. Tarkastellaan ohutta, sylinterinmuotoista sauvaa, jota kierretään päistä. Vääntö (torgue) sauvan päissä on voimakkuudeltaan $-M$ ja M ja akselin suuntaan. Tilavuusvoimien vaikutus ja poikittaiset voimat voidaan unohtaa. Laske jännitys, venymä sekä muodonmuutos.

1



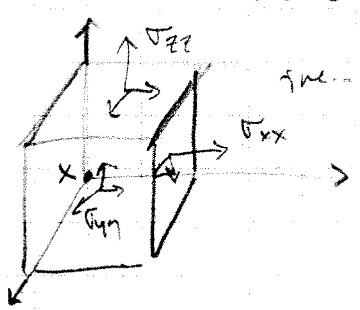
Sauvan pituus on L.

Jännitys on päissä tunnettu:

$\sigma_{11}(0) = -F \qquad \sigma_{21}(0) = \sigma_{31}(0) = 0$

$\sigma_{11}(L) = F \qquad \sigma_{21}(L) = \sigma_{31}(L) = 0$

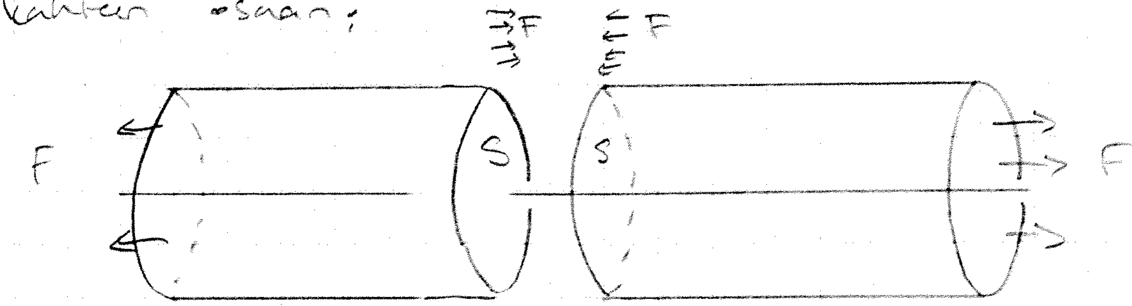
(MUISTELE σ:n merkitys: $\sigma(x)$ on pisteeseen x liitetyn differentiaalisen kuution pinta-voiman tiheys



jne...

Symmetria ⇔ kuutio pysyy paikallaan

Valitaan piste sauvalta ja ajatellaan sauva jaetuksi kahteen osaan:



Koska sauvan osat pysyvät paikallaan on pintavoiman oltava sama myös S:llä, joten

$\sigma_{11} = F$ ja $\sigma_{ij} = 0 \quad i \neq 1,\ j \neq 1.$

Materiaalilaki: $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\gamma}{E}\sigma_{ij} - \frac{\gamma}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$

koska $\sigma_{11} = F$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ saadaan $\sigma_{kk} = F$, eli:

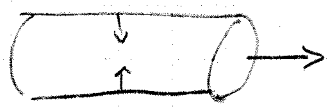
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\gamma}{E}\sigma_{ij} - \frac{\gamma}{E} F \delta_{ij}$$

jolen:

$$\varepsilon_{11} = \frac{F}{E}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\gamma}{E}F$$

$$\varepsilon_{ij} = 0 \quad j \neq 0$$

tästä voidaan päätellä hieman E:n ja γ:n merkityksestä:



vedossa E on "jousivakio" joka kuvaa kuinka paljon kappale venyy

γ - taas kuvaa kuinka paljon kappale kutistuu vetoa vastakkaiseen suuntaan.

Näistä saadaan laskettua u:

$$u_{i,j} + u_{j,i} = 2\varepsilon_{ij}$$

$$u_{1,1} + u_{1,1} = 2 \cdot \frac{F}{E} \qquad u_1 = \frac{F}{E}x_1 + A(x_2, x_3)$$

$$u_{2,2} + u_{2,2} = -\gamma\frac{F}{E} \quad \Rightarrow \quad u_2 = -\gamma\frac{F}{E}x_2 + B(x_1, x_3)$$

$$u_{3,3} + u_{3,3} = -\gamma\frac{F}{E} \qquad u_3 = -\gamma\frac{F}{E}x_3 + C(x_2, x_2)$$

Jäljelle jäänyt tuntematon muodon muutos

$\tilde{u} = [A \quad B \quad C]$ siis toteuttaa $\tilde{\varepsilon} = 0$.

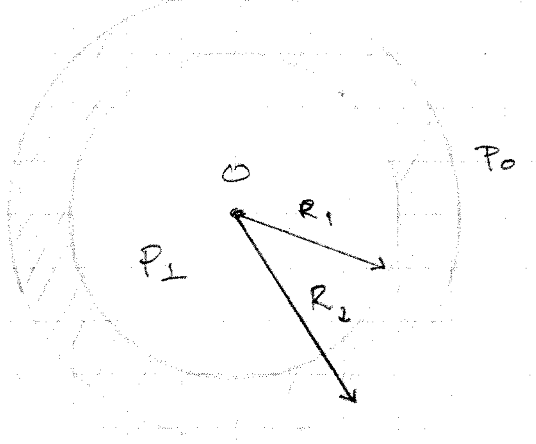
Joten $\hat{u}$ on jäykän kappaleen liike:

$$\underbrace{Bx}_{\text{Rotaatio}} + \underbrace{C}_{\text{Siirto}} \quad , B = -B^T$$

Eli tilanne on sama vaikka alkuleita liikuteltaan ja siirretään.

2.

Pallon muotoinen säiliö: (painepullo !)



$R_1 - R_2 = d.$

$f = 0.$

etsitään muodon muutosta $u(x) = \gamma(r)\,x$, $r = |x|$

Lasketaan Navierin yhtälöitä: (p. 205 lineaarisille el.)

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + \mu \Delta u + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u)}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, koska tarkastellaan stationaarista tilannetta.

Käytetään vektorikaavaa $\nabla\times\nabla\times = \nabla(\nabla\cdot) - \Delta$,
josta saadaan

$$\mu \nabla\times\nabla\times u - (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla\cdot u) = f$$

Nyt:

$$\nabla\times u = \nabla\times\left(\gamma(x)\vec{x}\right) = \nabla\gamma(x)\times\vec{x} + \gamma(x)\underbrace{\nabla\times\vec{x}}_{=0}$$

$$= \gamma'(r)\frac{\vec{x}}{r}\times\vec{x} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \nabla\gamma(r) = \gamma'(r)\frac{x}{r} \\ \nabla|x| = \nabla\sqrt{x^T x} \end{array}\right)$$

Eli Navierin yhtälö saa muodon:

$$\nabla(\nabla \cdot u) = 0$$

eli $\quad \nabla \cdot u = \text{vakio} = \nabla \cdot (\gamma(r)\vec{x})$

$$= \underbrace{\nabla\gamma(r) \cdot \vec{x}}_{\gamma'(r)\frac{x \cdot x}{|x|} = \gamma'(r)|x|} + \gamma(x)\underbrace{\nabla \cdot \vec{x}}_{=3}$$

$$= r\gamma'(r) + 3\gamma(r) = \underbrace{3\alpha}_{\text{"valittu"}}$$

Ratk. tulee siis

$$r\gamma'(r) + 3\gamma(r) = 3\alpha \quad , \quad \text{Ratk. tulee}$$

$$\gamma(r) = \alpha + \beta\frac{1}{r^3} \qquad \alpha, \beta \text{ ovat mielivaltaisia vakioita.}$$

josta $\quad \cancel{2}\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} = \cancel{2}u_{i,j}$

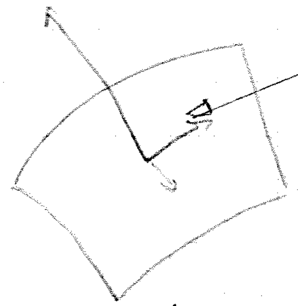
$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} = \gamma(r)\delta_{ij} + \frac{1}{r}\gamma'(r)x_i x_j$$

ja σ:ille saadaan: $\quad (\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda \operatorname{tr}\varepsilon\, \delta_{ij})$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda \operatorname{tr}\varepsilon\, \delta_{ij}.$$

tuntemattomat vakiot saadaan reunaehdoista.

TEMAMISSA on laskettu σ pallon pinnan koord.



$$\tilde{\sigma} = A \sigma A^T$$

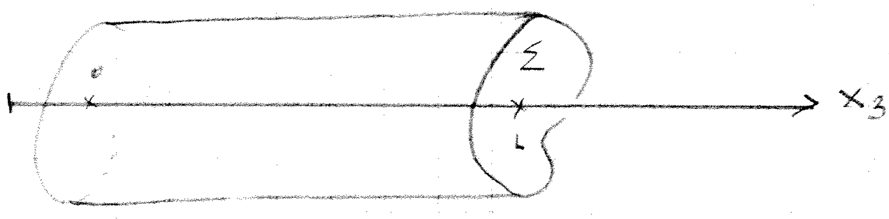
Temam: $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_2 & \\ 0 & & \sigma_3 \end{pmatrix}$.

$$\sigma_1 = 3\alpha K - \frac{4\mu\beta}{r^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 3\alpha K + \frac{2\mu\beta}{r^3}$$

$\sigma n = \sigma_1 n = -p_2 n$ sekä $\sigma n = \sigma_1 n = -p_1 n$

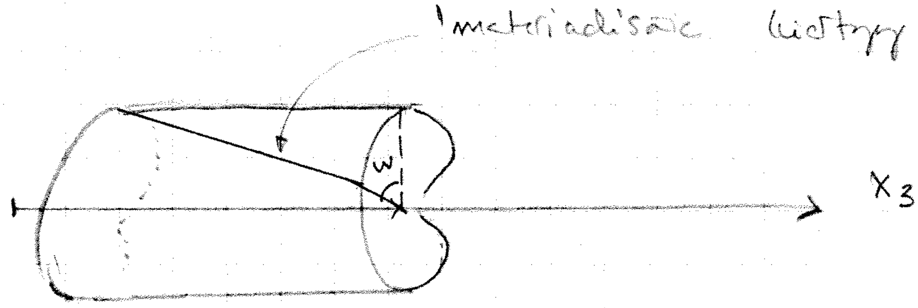
tästä voi ratkoa tuntemattomat. Ja määrätä ε, σ, μ:n.

3. Sylinterin muotoinen sauva.



poikkileikkaus on vakio Σ. Sauvaa kierretään päistä.

ajatellaan että sauva kiertyy akselinsa ympäri kulman $\omega(x_3)$:



koska sauva on homogeeninen ja poikkileikkaus Σ on vakio sekä kierto on tasaista päissä oletetaan ω lineaariseksi, eli $\ddot{\omega} = 0$.

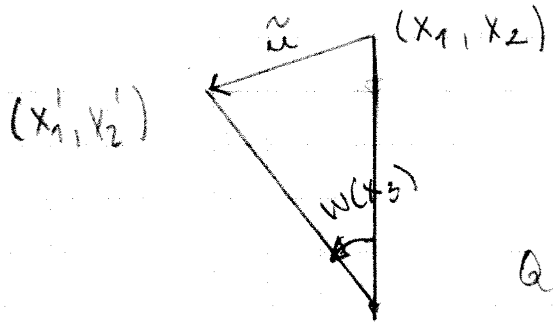
Tehdään myös muita oletuksia:

Kullakin poikkileikkauksella muodonmuutos on kierto tai "kupristuminen"

Koska sauva on homogeeninen "kiepistyminen" on sama kullakin poikkileikkauksella, eli

$$u_3 = u_3(x_2, x_1)$$

Kiertymä:



<u>Siis:</u>

vektorin kierto voidaan esittää matriisina:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{bmatrix}$$

(Rotaatiomatriisi esim. kompleksi lukujen kautta:

$$x_1, x_2 \to x_1 + ix_2 \quad \text{, kierto} \quad e^{iw}(x_1 + ix_2)$$

$$= (\cos w + i \sin w)(x_1 + ix_2)$$

$$= \cos w \, x_1 - \sin w \, x_2 + i(\cos w \, x_2 + \sin w \, x_1$$

kun w ovat riittävän pieniä, $Q \approx \begin{bmatrix} 1 & -w \\ w & 1 \end{bmatrix}$

eli $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - w x_2 \\ w x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w x_2 \\ w x_1 \end{pmatrix}$

jolloin $u_1 = -w x_2$, $u_2 = w x_1$.

Tähän mennessä on saatu: $\begin{cases} u_1 = -w(x_3)\, x_2 \\ u_2 = w(x_3)\, x_1 \\ u_3 = u_3(x_1, x_2) \end{cases}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{jolen}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0. \quad (\text{tilavuus ei muutu.})$$

Lisäksi: $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2}(-\omega + \omega) = 0.$

Materiaalilaki:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij}$$

jolen $\quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0.$

Eli ainoastaan: σ_{31}, σ_{32}, ε_{31} ja ε_{32} poikkeavat nollasta. Saadaan:

$$\sigma_{31} = 2\mu\,\varepsilon_{31} \quad , \quad \sigma_{32} = 2\mu\,\varepsilon_{32}.$$

Aikaisemman nojalla

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \dot{\omega}(x_3)\,x_2\right)$$

$$\varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dot{\omega}(x_3)\,x_1\right)$$

(HUOM: $\dot{\omega}(x_3)$ on oletusten nojalla vakio !)

Näiden yhtälöiden ratkaisemiseen voidaan soveltaa erilaisia tekniikoita. Tehdään tässä kuten TEMAM ja ratkotaan σ_{32} ja σ_{31}.

koska $\dot{\omega}$ = vakio voidaan $u_3(x_1, x_2)$ kirjoittaa muotoon

$$u_3(x_1, x_2) = \dot{\omega}\,\psi(x_1 x_2)$$

tässä ψ on nimeltään kiertymäfunktio (torsion function)

Saadaan:

$$\sigma_{31} = \mu\dot{\omega}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - x_2\right) \qquad \sigma_{32} = \mu\dot{\omega}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + x_1\right) \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\dot{\omega}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - x_2\right) \qquad \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\dot{\omega}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + x_1\right)$$

Näistä voidaan johtaa yhtälö ψ:lle. Kuitenkin erilainen formulaatio:

Tasapainoyhtälö: $\rho\ddot{\gamma}_i = f_i + \sigma_{ij,j}$

eli $\sigma_{ij,j} = 0$, $\sigma_{32,2} + \sigma_{31,1} = 0$

Jos määritellään vektori $(\sigma_{32}, -\sigma_{31}, 0)$

$$\left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = (f_{3,2} - f_{2,3})\,i + (f_{1,3} - f_{3,1})\,j + (f_{2,1} - f_{1,2})\,\vec{k}\right)$$

saadaan $\nabla \times (\sigma_{32}, -\sigma_{31}, 0) = 0$ joten

$(\sigma_{32}, -\sigma_{31}, 0)$ on gradientti: (vakio edessä voidaan valita vapaasti)

$$\sigma_{31} = \mu\dot{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \qquad \sigma_{32} = -\mu\dot{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$$

φ:lle saadaan yhtälö käyttämällä (1):ltä ensin:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{31} = \mu\dot{w}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} - 1\right) = \mu\dot{w}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{32} = \mu\dot{w}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} + 1\right) = -\mu\dot{w}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \quad (3)$$

Vähentämällä (2) − (3):

$$\Delta\varphi = -2.$$

<u>Reunaehto φ:lle:</u>

Tasapainoyhtälöstä saadaan: $\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0$
(eli pintavoimien summa on nolla)

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = \mu\dot{w}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}n_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}n_2\right)$$

$$= \mu\dot{w}\,\nabla\varphi\cdot(-n_2, n_1)$$

Nyt: $(n_1, n_2)\cdot(-n_2, n_1) = 0$ eli $(-n_2, n_1)$
on tangentti reunalla.

$$= \mu\dot{w}\,\nabla\varphi\cdot\vec{t}$$

Joten φ on reunalla vakio. Valitaan

$\varphi = 0$ reunalle. Saatiin siis:

$$\begin{cases}\Delta\varphi = -2 & \Omega\\ \varphi = 0 & \partial\Omega\end{cases} \qquad (\Omega = \text{poikkileikkaus})$$

(ongelmia reunaehdon kanssa tulee esim. ontossa palkissa.)

Ympyrän muotoiselle putkelle yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\varphi(r,\theta)\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\varphi(r,\theta) = -2 \\ \varphi(R,\theta) = 0 \end{cases}$$

symmetria $\Rightarrow$ $\varphi(r,\theta) = \varphi(r)$

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\varphi(r)\right) = 2 \\ \varphi(R) = 0 \end{cases}$$

yrite $\varphi(r) = Ar^2 + B$

$$\frac{\partial}{\partial r}(Ar^2 + B) = 2Ar$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(2Ar^2) = 4Ar$$

$$\Rightarrow \quad 4A = -2 \qquad \underline{\underline{A = -\frac{1}{2}}}$$

$$\varphi(r) = -\frac{1}{2}r^2 + B \qquad B = +\frac{1}{2}R^2$$

$$\varphi(r) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(r^2 + R^2)}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(R^2 - r^2)}}.$$