Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet

Harj. (6.)
26.10.2007

Peltonen / Aalto

1) Olkoot $U = \{(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \,/\, s_{2n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ ja $V = \{(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 / \ s_{2n-1} = n s_{2n} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$.
Osoita, että ℓ^1:n vektorialiavaruudet U ja V ovat suljettuja, mutta $U \oplus V$ ei ole suljettu (Vihje: Osoita ensin, että $\{(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 / s_n \neq 0$ enintään äärellisen monella indeksillä$\} \subset U \oplus V$).

2) a) Määrää funktioiden $f: t \mapsto t$ ja $g: t \mapsto t^2$ Fourier-kertoimet Hilbertin avaruuden $L^2(-\pi,\pi)$ Hilbertin kannan $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \,/\, n \in \mathbb{N}\right\}$ suhteen

b) Osoita Plancherelin kaavan avulla, että pätee $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Etsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

3) Banach–Steinhausin lauseen mukaan operaattoriperheelle $\{A_n : X \to Y \,/\, A_n$ lineaarinen ja jatkuva, $n \in \mathbb{N}\}$ (X, Y Banach-avaruuksia) pätee joko (1) $\exists\, C \in [0,\infty[$ s.e. $\|A_n\| \le C \ \forall n \in \mathbb{N}$ tai (2) $\exists\, x \in X$ s.e. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| = \infty$. Tutki seuraavissa tapauksissa, kumpi vaihtoehto pätee.

a) $X := \ell^2$, $Y := \ell^1$ $A_n : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (x_k \chi_n(k))_{k=1}^{\infty}$, missä $\chi_n(k) = 1$ jos $k \le n$ ja $\chi_n(k) = 0$ jos $k > n$

b) $X = Y = (C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ ja $A_n f = f \circ \varphi_n$, $\varphi_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$.

c) $X = Y = L^2(\mathbb{R})$, $A_n f(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

4) Olkoot X, Y ja Z Banach-avaruuksia. Kuvaus $A : X \times Y \to Z$ on bilineaarinen, jos kuvaukset $A_{1,z} : X \to Z$, $A_{1,z}(x) := A(x,z)$ ja $A_{2,w}(y) := A(w,y)$ ovat lineaarisia $\forall\, w \in X$ ja $z \in Y$.
Osoita Banach–Steinhausin lauseen avulla, että A on rajoitettu (eli $\|A\| := \sup\{\|A(x,y)\|_Z \,/\, \|x\|_X \le 1, \|y\|_Y \le 1\} < \infty$) jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_{1,z}$ ja $A_{2,w}$ ovat rajoitettuja kaikilla $w \in X$ ja $z \in Y$.

1. <u>U on suljettu</u>

Olkoon $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ ja $u \in \ell^1$ s.e. $u^n \xrightarrow{\ell^1} u$, kun $n \to \infty$. Osoitetaan, että $u \in U$. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ mieli-valtainen. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $u^n \to u$, on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e. $\| u^{n_\varepsilon} - u \|_{\ell^1} < \varepsilon$.

Nyt

$$|u_{2k}| = |u_{2k} - 0| = |u_{2k} - u_{2k}^{n_\varepsilon}|$$

$$\leq \| u - u^{n_\varepsilon} \|_{\ell^1}$$

$$< \varepsilon .$$

Tällöin $|u_{2k}| < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$ ja siten $u_{2k} = 0$. Näin ollen $u \in U$. □

<u>V on suljettu</u>

Olkoon $(v^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ ja $v \in \ell^1$ s.e. $v^n \to v$. Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e. $\| v^{n_\varepsilon} - v \|_{\ell^1} < \frac{\varepsilon}{1+k}$.

Tällöin

$$|v_{2k-1} - k v_{2k}| = |v_{2k-1} - 0 - k v_{2k}|$$

$$= |v_{2k-1} - v_{2k-1}^{n_\varepsilon} + k v_{2k}^{n_\varepsilon} - k v_{2k}|$$

$$\leq |v_{2k-1} - v_{2k-1}^{n_\varepsilon}| + k |v_{2k}^{n_\varepsilon} - v_{2k}|$$

$$\leq \|v - v^{n_\varepsilon}\|_{\ell^1} + k \|v^{n_\varepsilon} - v\|_{\ell^1}$$

$$= (1+k) \|v - v^{n_\varepsilon}\|_{\ell^1} < \varepsilon$$

Näin ollen $v_{2k-1} = k v_{2k}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, jolloin $v \in V$.

Olkoon $S = \{ s \in \ell^1 \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.e. } s_n = 0 \ \forall n \geq N \}$.

$\underline{S \subset U \oplus V:}$

Olkoon $s \in S$. Olkoon $N \in \mathbb{N}$ s.e.

$$s_k = 0 \quad \forall k \geq 2N+1.$$

Asetetaan jokaiselle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} v_{2k-1} = k\, s_{2k} \\ v_{2k} = s_{2k} \\ u_{2k-1} = s_{2k-1} - k\, s_{2k} \\ u_{2k} = 0 \end{cases}.$$

Nyt
$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = \sum_{k=1}^{2N} |v_k| < \infty,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=1}^{2N} |u_k| < \infty,$$

joten $u, v \in l^1$, missä $u = \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $v = \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Nyt $u_{2k} = 0$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, joten $u \in U$.

Toisaalta $v_{2k-1} = k\, v_{2k}$, joten $v \in V$.

<u>$U \oplus V$ ei ole suljettu:</u>

Osoitetaan ensinnäkin, että on eräs

$z \in l^1 \setminus U \oplus V$ s.e. $z \in \overline{U \oplus V}$.

Olkoon $z_k = \frac{1}{k^2}$. Nyt $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$.

Lisäksi jono

$$(z^n_k)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(1, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{9}, \dots, \tfrac{1}{n^2}, 0, 0, 0, \dots\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

on Cauchy ja $z^n \in U \oplus V$ kaikille $n \in \mathbb{N}$

ja $z^n \xrightarrow{\ell^1} z$. Siis $z \in \overline{U \oplus V}$.

Jos olisi ~~[illegible]~~ $u \in U$ ja $v \in V$ s.e. $z = u + v$,

niin olisi myös

$$\begin{cases} z_{2k} = u_{2k} + v_{2k} \\ z_{2k-1} = u_{2k-1} + v_{2k-1} \end{cases}$$

kaikille $k \in \mathbb{N}$. Mutta silloin

$$\begin{cases} v_{2k} = z_{2k} \\ v_{2k-1} = k\, z_{2k} \end{cases},$$

jolloin

$$\|v\|_{\ell^1} = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(|v_{2k}| + |v_{2k-1}|\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1+k)|z_{2k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{4k^2}$$

$$\geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty .$$

Siis $v \notin \ell^1$, jolloin $v \notin V$. Mutta silloin $z \notin U \oplus V$, mikä osoittaa, ettei $U \oplus V$ ole surjektio. □

2. Olkoon $f(t) = t$, $g(t) = t^2$.

Lasketaan funktioiden f ja g Fourier-kertoimet avaruuden $L^2(-\pi,\pi)$ kannassa

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lasketaan sisätulot:

$$\left\langle t, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\sqrt{2\pi}}\,dt = 0,$$

sillä integrandi on pariton välillä $(-\pi,\pi)$.

$$\left\langle t, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\cos nt}{\sqrt{\pi}}\,dt = 0,$$

$$\left\langle t, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\sin nt}{\sqrt{\pi}}\,dt = \frac{1}{n\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} nt\sin nt\,dt$$

$$\overset{\text{sij. } s=nt}{=} \frac{1}{n^2\sqrt{\pi}}\int_{-n\pi}^{n\pi} s\sin s\,ds \overset{\text{os. int.}}{=} \frac{1}{n^2\sqrt{\pi}}\left(\Big/_{\!-n\pi}^{\,n\pi} s(-\cos s) - \int_{-n\pi}^{n\pi} 1\cdot(-\cos s)\,ds \right)$$

$$= \frac{1}{n^2\sqrt{\pi}}\left(2n\pi(-\cos(n\pi)) + \underbrace{\Big/_{\!-n\pi}^{\,n\pi} \sin s}_{=0} \right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{n}(-1)^{n+1}$$

Lasketaan sitten g:n kertoimet

$$\langle g, e_1 \rangle = \langle t^2, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3} t^3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{\sqrt{2}\, \pi^{5/2}}{3}$$

$$\langle g, e_{2n} \rangle = \langle t^2, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt \, dt$$

os.int.
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\Big|_{-\pi}^{\pi} t^2 \tfrac{1}{n} \sin nt - \int_{-\pi}^{\pi} 2t \tfrac{1}{n} \sin nt \, dt \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n} \cdot 0 - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} t \sin nt \, dt$$

$$= -\frac{2}{n} \langle t, \sin nt \rangle = \frac{4\sqrt{\pi}}{n^2} (-1)^n$$

$$\langle g, e_{2n+1} \rangle = \langle t^2, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt \rangle = 0 ,$$

integrandin parittomuuden nojalla.

b) Sovelletaan Plancherelin kaavaa, joka sanoo: $x \in L^2(-\pi, \pi)$:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 .$$

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |t|^2\,dt = \Big|_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{3}t^3 = \tfrac{2}{3}\pi^3$$

$$\|g\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |t^2|^2\,dt = \Big|_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{5}t^5 = \tfrac{2}{5}\pi^5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2\sqrt{\pi}}{n}(-1)^{n+1}\right|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi \frac{1}{n^2}$$

$$= 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle g, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{4\sqrt{\pi}}{n^2}(-1)^n\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{2}}{3}\pi^{5/2}\right|^2$$

$$= 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \cancel{\tfrac{2}{3}\pi^5}\ \frac{2}{9}\pi^5$$

Nyt $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2$, joten

$$\frac{2}{3}\pi^3 = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Tormalla $\|g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle g, e_n\rangle|^2$, joten

$$\frac{2}{5}\pi^5 = \frac{2}{9}\pi^5 + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9}}{16}\pi^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

3. a) $X = \ell^2$, $Y = \ell^1$, $A_n : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (x_k \chi_n(k))_{k=1}^{\infty}$,

missä $\chi_n(k) = 1$, kun $k \leq n$ ja muuten $\chi_n(k) = 0$.

Operaattori A_n "katkaisee hännän pois".

Siksi vaihtoehto 2) toteutuu.

Olkoon $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$. Nyt

$x \in \ell^2$, sillä $\|x\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}} < \infty$.

Kuitenkin

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n x\|_Y = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n x\|_{\ell^1}$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \infty .$$

b) $X = Y = (C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ ja

$A_n f = f \circ \varphi_n$, missä $\varphi_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$.

Olkoon $f \in C(0,1)$. Nyt $|f|$ jatkuvana saavuttaa maksiminsa jossakin pisteessä $x_0 \in [0,1]$.

Siis $|f(x)| \leq f(x_0)$ kaikilla $x \in [0,1]$.

Nyt asettamalla $t_0 = x_0^{1/n}$ saadaan

$$|A_n f(t_0)| = |f(\varphi_n(t_0))| = |f(x_0)| .$$

~~Mutta kaikilla $t \in [0,1]$, $\varphi_n(t) \in [0,1]$ ja~~

~~niin $|A_n f(t_0)| = |f(\varphi_n(t))| \leq |f(x_0)|$~~

Olkoon nyt $t \in [0,1]$. Silloin myös $t^n \in [0,1]$.
Näin

$$|A_n f(t)| = |f(\varphi_n(t))| = |f(t^n)| \le \|f\|_\infty .$$

Siis kaikille $f \in C(0,1)$, pätee

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n f\|_\infty \le \|f\|_\infty ,$$

joten väite (1) pätee.

2) $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = L^2(\mathbb{R})$, $A_n f(x) = f(\frac{x}{n})$.

Olkoon $f(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [0,1] \\ 0, & \text{kun } x \notin [0,1] \end{cases}$.

Tällöin $\|f\| = 1$. Lasketaan $A_n f$.

$$A_n f(x) = f(\tfrac{x}{n}) = \chi_{[0,n]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [0,n] \\ 0, & \text{kun } x \notin [0,n] \end{cases}.$$

Nyt $\|A_n f\|_{L^2} = n$, jolloin

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n f\|_{L^2} = \infty ,$$

siispä (2) pätee.

4. Oletetaan, että $A_{1,z}$ ja $A_{2,w}$ ovat jatkuvia kaikille $z \in \overline{Y}$, $w \in \overline{X}$. Erityisesti, jos $w \in \overline{X}$, niin

$$(*) \qquad \sup_{\substack{\|y\| \le 1 \\ y \in \overline{Y}}} \|A_{2,w}\, y\|_{Z} = \|A_{2,w}\|_{Z} < \infty .$$

Tarkastellaan nyt operaattoriperhettä $\{A_{1,z}\}_{z \in J}$, missä $J = \{ j \in \overline{Y} \mid \|j\|_{\overline{Y}} \le 1 \}$. Tällöin mielivaltaiselle $x \in \overline{X}$ saadaan

$$\sup_{z \in J} \|A_{1,z}\, x\|_{Z} = \sup_{z \in J} \|A(x,z)\|_{Z}$$

$$= \sup_{z \in J} \|A_{2,x}\, z\|_{Z} ,$$

mikä on äärellinen $(*)$:n nojalla. Tällöin Banach-Steinhausin lauseen nojalla $\exists C > 0$ s.e.

$$\|A_{1,z}\| \le C \qquad \forall z \in J$$

$$\Longleftrightarrow \sup_{\substack{x \in \overline{X} \\ \|x\| \le 1}} \|A_{1,z}(x)\| \le C \qquad \forall z \in J$$

$$\Longleftrightarrow \sup_{\substack{x \in \overline{X} \\ \|x\| \le 1 \\ z \in \overline{Y} \\ \|z\| \le 1}} \|A(x,z)\| \le C \qquad \Longrightarrow \quad A \text{ on rajoitettu.}$$

$\square$